que sais-je?

LA LOGIQUE MODERNE

JEAN CHAUVINEAU

Le point des connaissances actuelles

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

La logique moderne

QUE SAIS-JE ?

La logique moderne

JEAN CHAUVINEAU
Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure
Agrégé de l'Université
Maître de Conférences honoraire de la Faculté des Sciences de Caen

Septième édition revue et corrigée

54e mille

DU MÊME AUTEUR

Sur la répartition dans **R** et dans $\mathbf{Q}_p$, *Acta arithmetica* 14 (1968), p. 225-313.

ISBN 2 13 036621 x

7[e] édition revue et corrigée : 4[e] trimestre 1980

108, Bd Saint-Germain, 75006 Paris

INTRODUCTION

La logique s'applique à découvrir et formuler les lois de la pensée claire ; il est donc naturel que ses recherches portent d'abord sur le langage, qui fournit à la pensée ses moyens d'expression habituels. Mais, au cours de son développement historique, la logique a pris peu à peu une conscience plus aiguë des équivoques et des illusions qui naissent, à cet égard, de l'exercice même du langage, car les mots qui s'unissent dans les phrases que nous prononçons ne visent pas seulement à expliquer nos idées, mais aussi à peindre nos sentiments ; en fait, leur fonction est tantôt de rendre intelligible à autrui une pensée claire que notre esprit conçoit, tantôt de lui rendre sensible une pensée obscure qui agite notre âme, et la frontière demeure souvent indécise entre ces deux usages complémentaires de la langue, que la science et la poésie modernes se proposent, croyons-nous, d'exploiter avec une égale rigueur. Aussi la logique en est-elle venue à se créer un langage symbolique, destiné avant tout à la mettre en garde contre l'illusion dangereuse — et souvent pressante — d'une corrélation étroite entre l'ordre logique et l'ordre grammatical. Cette « algèbre de la logique », fondée par A. de Morgan (1806-1871) et G. Boole (1815-1864), peut être considérée, en somme, comme la réalisation du projet grandiose de « caractéristique universelle » que G. W. Leibniz (1646-1716) avait conçu à l'âge de vingt ans. Profondément élaborée, enrichie et organisée par les travaux de D. Hilbert (1862-1943) et de B. Russell (1872-1970), elle est devenue, d'abord sous le nom de « logistique », puis aujourd'hui de *logique mathématique*, l'outil indispensable aux recherches du théoricien C'est pourquoi nous avons cru pouvoir l'appeler ici plus simplement la *logique moderne.*

Notre exposé voudrait être une initiation à la logique contemporaine qui, sans perdre son caractère simplement introductif, fût assez précise pour être efficace; Nous l'avons écrit en songeant d'abord aux étudiants qui, après de solides études scientifiques secondaires, se proposent d'approfondir, dans les Universités, soit leur culture philosophique, soit leur culture mathématique. Nous souhaitons qu'il puisse être pour eux un instrument de travail utile, dans un domaine où les ouvrages directement accessibles ne sont pas très nombreux.

L'étude se divise en deux parties. Nous avons accordé de beaucoup la plus large place à la première, qui tente de présenter un tableau d'ensemble de la logique moderne. Le chapitre I décrit le contenu de la *logique propositionnelle*, le chapitre II celui de la *logique fonctionnelle*, offerte sous les deux aspects corrélatifs de la compréhension et de l'extension. La seconde partie, consacrée à l'organisation déductive de la logique, exige sans doute une attention plus soutenue. Après quelques mots d'introduction, deux courts chapitres III et IV essaient de construire successivement la *logique propositionnelle déductive* et la *logique fonctionnelle déductive* ; nous avons tenu à y dégager avec une netteté suffisante les critères dont nous faisions usage, sans viser cependant à les énoncer sous une forme rigoureusement correcte, et à analyser les exemples de démonstrations que nous y donnions, en les accompagnant de références aux règles démonstratives qui permettent d'exercer un contrôle permanent sur le texte.

PREMIÈRE PARTIE

DESCRIPTION DE LA LOGIQUE

Chapitre Premier

LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

1. Notion de proposition. Valeurs logiques d'une proposition. — On dit couramment de la proposition qu'elle est l'énoncé d'un *jugement* ; on ajoute que le jugement réalise une composition des *idées*, et que le *raisonnement*, à son tour, est un mode d'assemblage des jugements.

Pour le logicien, avant tout, la proposition exprime une pensée : « cette fleur est rouge », « l'enfant a renversé un encrier sur sa table ». Elle a une structure interne, puisque les significations de divers concepts s'y trouvent articulées les unes aux autres ; mais c'est pourtant un acte indivisible de l'esprit qui la pose d'un seul coup. De ce point de vue, la proposition, du fait même qu'elle énonce la pensée, l'unifie. Par ailleurs, quand on dit qu'elle constitue un jugement, on entend essentiellement — et c'est tout ce que nous retiendrons ici — que la pensée ainsi unifiée est conçue du même coup comme appréciable au regard de la connaissance ; il s'y attache nécessairement la possibilité d'une option, qui, lorsqu'elle est exercée, se manifeste par une acceptation ou un refus. Il est entendu que nous nous désintéressons du sujet qui formule la proposition et dont le choix peut être sous-entendu, indécis, expressément réservé, voire simulé. Détachée du psychisme, la proposition garde à nos yeux ce caractère indélébile d'être, en droit, inséparable d'un processus d'évaluation ; elle est, *a priori*, vraie ou fausse.

A vrai dire, l'option logique n'est pas, par sa conception même, réduite à cette alternative, et on peut être tenté de lui prêter des formes plus complexes. Par exemple, les propositions citées plus haut étant appréciées vraies ou fausses à la lumière de l'expérience, la phrase : « l'enfant renversera l'encrier » ne pourrait-elle être tenue pour une proposition qui recevrait la valeur du *possible* ? ou bien encore la phrase : « la fleur renverse la table » pour une proposition qui recevrait la valeur de l'*absurde* ? De nos jours, les logisticiens ont effectivement construit divers types de *logiques multivalentes* : logique intuitionniste de L. E. J. Brouwer et A. Heyting (interprétée comme logique multivalente par S. Jaskowski), logique probabilitaire de H. Reichenbach, logique quantique de P. Destouches-Février, logique trivalente, puis logique des négations généralisées de J. Lukasiewicz, logique modale de stricte implication de C. I. Lewis, etc. Nous n'étudierons pas ici ces théories ingénieuses et suggestives. La logique intuitionniste, qui rejette le principe du tiers exclu, a pris une grande importance dans la critique de la pensée mathématique ; quant aux autres, elles présentent un intérêt certain, sans pourtant avoir obtenu jusqu'ici de résultats décisifs.

Ainsi sommes-nous amenés à dégager simultanément deux notions, celle de *proposition* et celle de *valeur logique*, telles d'abord que chacune d'elles resterait pour nous inconcevable sans l'autre. *Nous considérons la proposition comme un énoncé pris en bloc, susceptible de recevoir l'une ou l'autre de deux valeurs logiques*, que nous nommons le *vrai* et le *faux*. La logique que nous allons construire sera donc une *logique bivalente*. Et puisque nous prenons le parti provisoire d'y traiter la proposition comme un tout indivis, cette logique sera dite *logique des propositions* ou *logique des énoncés* ; le plus souvent, nous l'appellerons *logique propo-*

sitionnelle. Mais on comprend dès maintenant qu'il nous faudra plus tard abandonner ce point de vue, pour décrire l'organisation intérieure des concepts dans l'énoncé qui les combine. D'ici là, les propositions seront simplement désignées par des lettres P, Q, R... Quant aux valeurs logiques, qu'on peut se contenter de noter à l'aide de leurs initiales par exemple, il est commode, pour en préparer un calcul éventuel, de leur attribuer des symboles numériques : le vrai sera la valeur 1 (probabilité d'un événement certain) et le faux la valeur 0 (probabilité d'un événement impossible).

2. Notion d'opération logique. Schème d'une opération logique. — On reconnaît sans peine dans le langage la présence de mots-outils assez nombreux, qui ne véhiculent aucune signification propre ; leur fonction est de lier entre elles certaines propositions et, du même coup, d'en faire apparaître d'autres, qui se présentent comme combinaisons des premières. Tel est le rôle, par exemple, pour nous borner à des cas qui nous frappent aussitôt, des conjonctions *et*, *ou*, *si*, *car*, *donc*. A la réflexion, d'ailleurs, on s'aperçoit que, si la signification de la proposition composée dépend naturellement des significations des propositions composantes, la composition révèle pourtant ici une forme caractéristique, qui, elle, se peut décrire en faisant abstraction de tous ces contenus de pensée. C'est ainsi que la conjonction *et*, en assemblant deux propositions du discours, y introduit une troisième proposition tenue pour vraie lorsque les deux premières le sont à la fois, et pour fausse dans tous les autres cas ; le rapport de la troisième proposition à l'ensemble des deux premières se trouve donc défini sans référence à leur substance conceptuelle. D'une manière générale, nous voyons comment, à travers la composition concrète des énoncés, se dessine une combinatoire abstraite de leurs valeurs logiques. Ces remarques nous orientent vers la construction d'une science des énoncés considérés indépendamment de leur contenu, qui reçoit le nom de *logique formelle* ; elles nous livrent le premier élément de cette construction, à savoir la notion d'opération logique, dont nous pouvons maintenant donner une définition précise.

Soit un ensemble de propositions, trois par exemple, rangées dans un certain ordre P_1, P_2, P_3, et soit p_1, p_2, p_3 les valeurs logiques qui leur sont respectivement attribuées. Donnons-nous par ailleurs une loi de correspondance qui à tout système de valeurs logiques p_1, p_2, p_3 associe une valeur logique q ; avec les notations introduites plus haut, une telle loi est une fonction f de trois variables, définie seulement pour les valeurs 0 ou 1 de ces variables, et assujettie à ne prendre elle-même que les valeurs 0 ou 1. Alors cette fonction f associe à son tour à l'ensemble ordonné des propositions P_1, P_2, P_3 une proposition Q, à laquelle est attribuée la valeur logique q. On dit que la fonction f est un *opérateur logique*, et que la proposition Q est le résultat de l'*opération logique* mise en œuvre par f. Il est clair que ces considérations s'appliquent à un nombre quelconque de propositions données.

Ainsi, définir une opération logique portant sur deux (ou trois) propositions, c'est se donner une fonction f de deux (ou trois) variables satisfaisant aux conditions précédentes, et pour cela il suffit de dresser la table des quatre (ou huit) valeurs logiques qu'elle devra prendre dans les différents cas possibles ; par exemple, on pourra dresser des tables telles que celles-ci :

p_1	p_2	q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p_1	p_2	p_3	q
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Une table de ce genre, de quelque manière qu'on la présente, constitue le *schème* ou la *table de vérité* de l'opération logique qu'elle définit. On reconnaît aussitôt sur notre premier schème l'opérateur que la conjonction *et* introduit dans le discours.

Pour nous résumer simplement, disons qu'*une opération logique est une loi de composition des propositions définie par une loi de composition de leurs valeurs logiques.*

3. Dénombrement des opérations logiques. — Considérons une opération logique portant sur m propositions ; cet entier m sera dit son *ordre*. La fonction f est alors une fonction de m variables, et, comme chacune de ces variables peut recevoir deux valeurs (0 ou 1), nous avons ici $n = 2^m$ valeurs de f à choisir. Chacun de ces choix fournit un schème possible, dont la colonne q présente n éléments. Comme, en chaque occurrence, la fonction f à son tour peut recevoir deux valeurs (0 ou 1), il existe $\mathrm{N} = 2^n = 2^{2^m}$ schèmes possibles pour l'opération envisagée. Pour les premières valeurs de m, le calcul donne les valeurs suivantes de n et N :

m	n	N
1	2	4
2	4	16
3	8	256
4	16	65 536
...	...	...

Une opération logique étant caractérisée par son schème, on voit qu'il existe, en particulier, 4 *opérations d'ordre un* et 16 *opérations d'ordre deux* ; nous allons les déterminer et les désigner.

4. Table des opérations logiques d'ordre un. — Les quatre opérations possibles portant sur une proposition P trouvent leurs schèmes déterminés dans les colonnes successives d'un tableau dont la construction est immédiate :

	1	2	3	4
P	$\dot{P}$	$\overset{+}{P}$	$\bar{P}$	$\overset{o}{P}$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

— L'opération 1 associe à P un énoncé toujours vrai, noté $\dot{P}$; elle s'appelle *tautologie* de P, et peut se lire, si l'on veut : « P est P ».

— L'opération 2 associe à P un énoncé, noté $\overset{+}{P}$, tel que P et $\overset{+}{P}$ aient toujours la même valeur logique ; elle s'appelle *affirmation* de P, et signifie : « on a P ».

— L'opération 3 associe à P un énoncé, noté $\bar{P}$, tel que P et $\bar{P}$ aient toujours des valeurs logiques différentes ; elle s'appelle *négation* de P, et signifie : « on a non-P ». (On la note aussi $\sim$ P, ou encore $\urcorner$ P.)

— L'opération 4 associe à P un énoncé toujours faux, noté $\overset{o}{P}$; elle s'appelle *contradiction* de P, et peut se lire, si l'on veut : « P n'est pas P ».

5. Table des opérations logiques d'ordre deux. — De même, les 16 opérations possibles portant sur un couple ordonné de propositions P, Q trouvent leurs schèmes déterminés dans les colonnes successives d'un tableau qu'on construit méthodiquement en formant : le schème unique présentant quatre fois la valeur 1, les $C_4^1 = 4$ schèmes présentant

DEUXIÈME PARTIE

ORGANISATION DÉDUCTIVE DE LA LOGIQUE

Imprimé en France, à Vendôme
Imprimerie des Presses Universitaires de France
1980 — N° 27 028