PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

Gabrielle Demange
Jean-Pierre Ponssard

Théorie des jeux et analyse économique

Théorie des jeux
et analyse économique

« ÉCONOMIE »
COLLECTION DIRIGÉE
PAR CLAUDE JESSUA, CHRISTIAN LABROUSSE
ET DANIEL VITRY

ÉCONOMIE

Théorie des jeux
et analyse économique

GABRIELLE DEMANGE
DELTA
Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales

JEAN-PIERRE PONSSARD
CRNS
Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

ISBN 2 13 045973 0
ISSN 0991-5168

Dépôt légal — 1re édition : 1994, mars

108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris

Sommaire

Introduction

La théorie des jeux a pour but d'analyser les prises de décision d'individus placés en situation d'interdépendance. Sa principale originalité consiste à postuler la rationalité des acteurs, ceux-ci étant conscients non seulement de leurs propres objectifs, mais aussi de ceux des autres protagonistes. Elle trouve l'origine de son appellation dans les jeux de société dont l'analyse nécessite à l'évidence la prise en compte de l'interaction stratégique entre les joueurs.

Ce domaine a connu une véritable explosion au cours des dernières années aussi bien sur le plan théorique qu'au niveau des applications. Il est à la base de nombreux développements dans les sciences sociales et plus particulièrement en sciences économiques : en microéconomie et en macroéconomie, mais aussi dans des domaines plus spécialisés tels que l'économie industrielle, la théorie du commerce international ou la théorie des organisations. A ce titre, la théorie des jeux connaît un succès considérable et elle est maintenant enseignée dans de nombreux cursus universitaires.

Cet enseignement pose des difficultés car la théorie des jeux fait appel à deux types de compétence. Elle requiert aussi bien un degré d'abstraction élevé qu'une bonne aptitude à la modélisation de situations concrètes. Ce livre se veut une réponse à ces difficultés. Il s'agit tout d'abord de permettre une bonne assimilation des techniques de base sans entrer dans le détail des développements auxquels elles ont pu donner lieu. Mais il s'agit aussi de modéliser sous forme de jeu des situations concrètes *a priori* complexes à analyser et de montrer les apports d'une démarche fondée sur l'interdépendance stratégique des joueurs. L'assimilation des techniques de base est indispensable au bon usage de la théorie des jeux en sciences économiques. La familiarité avec un certain nombre de « modélisations réussies » constitue un éclairage très utile pour progresser dans l'étude de techniques plus avancées. Le respect d'un équilibre entre techniques et modélisations contribue à faire de la théorie des jeux un instrument de clarification et de progrès pour les sciences sociales.

Ce livre est plus spécifiquement consacré à la théorie des jeux dits *non coopératifs*. Dans un jeu non coopératif, les joueurs ne peuvent pas conclure d'accords irrévocables entre eux avant de s'engager dans l'action. Cette hypothèse se justifie dans de multiples situations. Ces justifications peuvent être d'ordre physique (impossibilité de communiquer), d'ordre légal (interdiction de se concerter entre concurrents) ou d'ordre technique (difficulté à prévoir l'avenir et à s'engager dans un contrat). Partant de l'hypothèse que chaque joueur garde sa liberté d'engagement, l'objectif de la théorie des jeux non coopératifs est de caractériser les issues possibles d'une interaction stratégique lorsque chaque joueur aborde cette interaction de manière rationnelle.

Le livre comporte trois grandes parties. La première, qui traite des jeux sous forme normale, est la plus traditionnelle. La seconde porte sur les jeux sous forme développée qui sont les plus utiles lors des modélisations. La troisième décrit et analyse quelques modélisations particulièrement intéressantes. Présentons chacune de ces parties plus en détail.

La forme normale modélise de la façon la plus simple possible une situation d'interdépendance stratégique. En première analyse elle représente des situations où toutes les stratégies sont sélectionnées simultanément par tous les joueurs qui, de plus, connaissent l'évaluation des conséquences de ces stratégies pour chaque joueur. On dit que le jeu est simultané à information complète. L'objet d'étude principal du chapitre I est l'équilibre de Nash, qui constitue le point de départ de tous les développements ultérieurs.

Un jeu sous forme normale semble très éloigné des situations concrètes. Souvent, les joueurs entretiennent des relations qui s'étendent sur une période longue pendant laquelle ils interviennent à plusieurs reprises sans parfaitement prévoir les conséquences de leurs actions. La forme développée permet de modéliser de telles situations : elle explicite la chronologie des différentes actions possibles et l'information détenue par un agent lors du choix de ses actions. Le chapitre II est consacré à l'étude des jeux développés. Cette étude est organisée autour des quatre classes de jeux les plus couramment utilisées dans les modélisations économiques : jeux à information parfaite, jeux répétés, jeux simultanés à information incomplète et jeux développés à information incomplète. Pour chaque classe étudiée, on s'attache plus particulièrement à bien faire comprendre les relations qui existent entre forme normale et forme développée à travers le concept de stratégie. Ces relations et les conséquences opérationnelles qu'on en tire pour la résolution des jeux, justifient la place accordée à l'étude de la forme normale.

Ayant acquis les techniques de base, étant devenu familier avec les classes de modèles les plus courantes, notre réflexion se poursuivra au chapitre III avec l'étude détaillée de quelques situations d'interdépendance stratégique particulièrement complexes : le rôle de la concurrence potentielle dans les situations de rendements croissants, les mécanismes d'enchères pour l'attribution de marchés, le bluff dans les jeux de poker, la transmission de l'information dans les jeux de signaux. Ces deux derniers cas sont considérés à juste titre comme les exemples polaires de l'économie de l'information.

Même si les différentes techniques et modélisations présentées dans ce livre ne couvrent pas, loin de là, l'ensemble de la théorie des jeux non coopératifs, l'esprit dans lequel elles sont étudiées nous paraît bien adapté aux sciences économiques. La théorie des jeux fournit un cadre idéal pour analyser la rationalité individuelle, hypothèse fondamentale de l'*homo economicus.* Telle qu'elle est présentée ici, elle n'est pas une théorie des comportements qu'il s'agirait de tester, mais une manière de poser un problème sous une forme accessible à la réflexion économique, sans préjuger du rôle d'autres facteurs (psychologiques, sociologiques, politiques ...) tout aussi importants en pratique.

Chapitre 1

Jeux simultanés à information complète Jeux sous forme normale

Le but de ce chapitre est principalement technique. Il s'agit de présenter les outils d'analyse que sont *la forme normale* et les différents concepts de solution qu'on peut directement lui rattacher (sections 1 et 2). Parmi ceux-ci, une place primordiale doit être accordée à la notion d'*équilibre de Nash* dont il convient d'étudier les propriétés en détail (section 3).

Nous commencerons par *les jeux à deux joueurs et à somme nulle* dans lesquels le gain d'un joueur est la perte de l'autre. Cette classe de jeux, d'abord étudiée par Von Neumann et Morgenstern, constitue l'exemple fondateur de la théorie. L'hypothèse de rationalité et la notion d'équilibre ne posent aucune difficulté conceptuelle dans ce contexte. Aussi la recherche s'est-elle initialement orientée vers les problèmes d'existence et de calculs des équilibres. Ceci explique sans doute que la théorie des jeux soit appparue d'abord comme une branche des mathématiques. Il est clair maintenant que les jeux à deux joueurs et à somme nulle constituent une classe, certes intéressante, mais très particulière. Les propriétés remarquables des équilibres dans ces jeux ont occulté des difficultés majeures et suscité des attentes trop fortes. Il faut d'emblée souligner que ces propriétés ne se transposent pas au cas général.

Les sections 4 et 5 constituent des approfondissements fort utiles de l'équilibre de Nash au niveau des applications. Elles présentent les conditions d'existence et détaillent un certain nombre de méthodes permettant de les calculer de manière explicite.

Ce chapitre est émaillé d'un grand nombre d'exemples dont certains sont des classiques de la théorie des jeux et qu'il convient de bien connaître. Il est aussi complété par une introduction à la *rationalisabilité,* afin de souligner les problèmes éventuels de convergence vers un équilibre.

1. MODÈLE ET EXEMPLES

1.1. La forme normale

La forme normale retient les éléments de base d'une situation d'interaction, à savoir les protagonistes et, pour chacun d'eux, leurs stratégies disponibles et leur évaluation des conséquences découlant des choix effectués par tous.

Aussi, un *jeu sous forme normale* est la donnée de (N, X_i, u_i, $i \in$ N), où :

— l'ensemble N = $\{ 1,..., i,..., n \}$ représente l'ensemble des protagonistes appelés *joueurs*;

— pour chaque joueur i, X_i est l'ensemble de ses *stratégies* disponibles. Le choix par chaque joueur d'une stratégie détermine l'*issue* du jeu. On notera :

x_i une stratégie de i,

$x = (x_1,..., x_n)$ une issue, $X = \Pi_{i=1}^{n} X_i$ l'ensemble des issues;

et aussi :

$x = (x_i, x_{-i})$ où x_{-i} représente les stratégies des joueurs autres que i,

$X_{-i} = \Pi_{j \neq i} X_j$ l'ensemble des stratégies des joueurs autres que i;

— pour chaque joueur i, u_i est une fonction numérique sur l'ensemble des issues X. La fonction u_i est appelée *fonction d'utilité* ou encore *fonction de paiement*. Elle représente les préférences du joueur sur les issues. Autrement dit :

$u_i(x) > u_i(x')$ signifie que le joueur i préfère strictement l'issue x à l'issue x' et
$u_i(x) = u_i(x')$ signifie qu'il est indifférent entre les deux issues.

Notons qu'une fonction d'utilité, concept classique en théorie de la décision, est définie à une transformation strictement croissante près. L'analyse d'un jeu est invariante par rapport à une telle transformation.

Les deux hypothèses suivantes sous-tendent la donnée d'un jeu sous forme normale :

— ***Indépendance stratégique :*** *les joueurs sélectionnent leur stratégie indépendamment les uns des autres.*

Toute coordination formelle entre les joueurs, par exemple sous la forme d'une sélection conjointe d'une issue du jeu, est ainsi exclue. Cette hypothèse, très importante, est réalisée par exemple si les stratégies sont sélectionnées simultanément ou en secret ; nous verrons au chapitre II comment des situations plus réalistes peuvent néammoins être appréhendées par la forme normale.

— ***Information complète :*** *les joueurs connaissent la forme normale* $(N, X_i, u_i, i \in N)$.

Les joueurs ont ainsi une connaissance commune de la situation à laquelle ils sont confrontés : ils connaissent les autres joueurs, leur ensemble de stratégies et leur fonction d'utilité. Cette hypothèse permet de construire une théorie de l'interaction stratégique en se situant du point de vue de l'ensemble des acteurs concernés.

1.2. Exemples

• *Les jeux finis*

Un jeu est dit fini si tous les ensembles de stratégies sont finis. Chacun des exemples suivants illustre une difficulté qu'il est utile de garder en mémoire.

La bataille des sexes

Les deux joueurs sont un homme (lui) et une femme (elle). Chacun a le choix entre deux possibilités : acheter un billet soit pour une représentation à l'opéra, soit pour un match de boxe. Ces possibilités seront notées respectivement par O et B. Ils préfèrent avant tout être ensemble, mais elle préfère l'opéra à la boxe et lui la boxe à l'opéra. On peut schématiser la situation par le tableau suivant dans lequel elle choisit une colonne et lui une ligne :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{B} & \mathrm{O} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{B} \\ \mathrm{O} \end{array} & \begin{pmatrix} 4,2 & 1,1 \\ 0,0 & 2,4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans un tel tableau, chaque case correspond à une issue. Le nombre de gauche donne le niveau d'utilité atteint par le premier joueur, qui choisit une ligne, le nombre de droite celui atteint par le deuxième joueur, qui choisit une colonne.

Ces conventions de notation seront systématiquement utilisées dans ce livre.

Le dilemme du prisonnier

Chaque joueur dispose de deux stratégies, l'une « Pacifique », P, l'autre « Agressive », A. Les paiements sont donnés par le tableau :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{P} & \mathrm{A} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{P} \\ \mathrm{A} \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1 & -1,2 \\ 2,-1 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cette matrice a sans doute été la plus discutée en théorie des jeux. L'histoire d'origine est la suivante. Deux individus, soupçonnés d'avoir accompli un sombre forfait, sont placés en garde à vue dans deux cellules différentes. Le juge propose à chacun le marché suivant : « Avoue ton crime et témoigne contre ton complice, tu bénéficieras d'une réduction de peine. Méfie-toi de lui, s'il est le seul à avouer, tu en prends pour vingt ans ». Le prisonnier est ainsi placé devant un dilemme. Dans les conditions de l'interrogatoire tel qu'il est précisé, il a intérêt à avouer quoi que fasse son complice (il choisit toujours A). Pourtant, s'ils pouvaient se concerter, ils n'auraient collectivement pas intérêt à avouer (ils choisiraient conjointement l'issue (P, P)).

Cet exemple célèbre illustre de façon criante le conflit possible entre la rationalité individuelle et une démarche collective qui voudrait que chaque joueur soit pacifique. De nombreuses situations économiques peuvent être représentées par le dilemme du prisonnier. Par exemple, dans une situation de duopole, la stratégie agressive correspond à un prix faible, et la stratégie pacifique à un prix élevé.

Pierre (P), *Ciseaux* (C), *Papier* (F *pour feuille*)

$$\begin{array}{c} \\ P \\ C \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & C & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,0 & 1,-1 & -1,1 \\ -1,1 & 0,0 & 1,-1 \\ 1,-1 & -1,1 & 0,0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Cette matrice représente un jeu apprécié des enfants : la Pierre l'emporte sur les Ciseaux qui l'emportent sur le Papier qui l'emporte sur la Pierre...

• *Un jeu non fini (Enchères)*

Un objet est mis aux enchères. Tout acheteur potentiel i attribue une valeur v_i à l'objet. Son niveau d'utilité est de la forme suivante :
— $(v_i - p)$ s'il reçoit l'objet et paye p,
— 0 sinon.

Considérons des enchères sous pli scellé : chaque joueur fait une seule offre, soumise dans une enveloppe cachetée. En pratique, deux types d'enchères sont communément utilisées, l'une dite au premier prix, l'autre au second prix. Dans les deux cas, l'objet est alloué au plus offrant (avec tirage au sort s'il en existe plusieurs). Dans l'enchère au premier prix, le bénéficiaire de l'objet paye son enchère, alors que dans l'enchère au second prix il paye seulement la seconde meilleure enchère.

Les ensembles de stratégies sont $X_i = [0, +\infty[$ où x_i représente l'enchère de i. Etant donné une issue x, ordonnons les enchères :

$$x_j \geq x_k \geq ..$$

et notons $\hat{x} = x_j$, $\tilde{x} = x_k$ ($\hat{x} = \tilde{x}$ si au moins deux personnes ont soumis l'enchère la plus élevée).

Les fonctions de paiement sont :

$$u_i(x) = (v_i - p)/m \quad \text{si} \quad x_i = \hat{x} \quad \text{et } m \text{ personnes ont annoncé } \hat{x}$$
$$= 0 \text{ sinon}$$

où

$p = \hat{x}$ pour l'enchère au premier prix,
$p = \tilde{x}$ pour l'enchère au second prix.

Nous avons ainsi modélisé une situation d'enchères comme un jeu sous forme normale.

2. DÉFINIR LA RATIONALITÉ

L'hypothèse fondamentale de la théorie des jeux est que chaque joueur cherche à maximiser son niveau d'utilité, indépendamment des autres et connaissant les données du jeu, à savoir (N, X_i, u_i, $i \in N$). Comme nous allons le voir, cette hypothèse ne permet pas de définir « la » solution du jeu.

Nous tenterons d'abord de définir une notion décentralisée de rationalité individuelle. Ceci nous conduira à étudier les *stratégies dominantes, dominées, prudentes* et à définir un premier concept d'équilibre, obtenu par *éliminations successives des stratégies strictement dominées*. Cependant, cette approche se révèle en général insuffisante et d'autres concepts doivent être introduits. Puisque les niveaux d'utilité de chacun dépendent des stratégies des autres et puisque chacun le sait, la notion de rationalité doit être abordée simultanément pour l'ensemble des joueurs. L'*équilibre de Nash* répond à cette vision d'une interaction stratégique.

2.1. Relations de dominance

• *Dominance stricte*

Pour un joueur donné, deux stratégies sont comparables sans ambiguïté si l'une d'elles donne un paiement strictement meilleur que l'autre *quelles que soient* les stratégies des autres joueurs. On dit que la première domine strictement l'autre.

DÉFINITIONS. — *Une stratégie x_i du joueur i domine strictement une stratégie x_i' si :*

(1) $$u_i(x_i, x_{-i}) > u_i(x_i', x_{-i}) \quad \forall x_{-i} \in X_{-i}.$$

Une stratégie du joueur i est strictement dominante si elle domine strictement toutes les autres stratégies de ce joueur.

Une stratégie du joueur i est strictement dominée s'il existe une stratégie qui la domine strictement.

Si un joueur possède une stratégie strictement dominante, elle est unique et toutes les autres stratégies sont strictement dominées. Le joueur peut alors la jouer sans aucune hésitation. Il lui est inutile de prévoir le comportement d'autrui puisque son meilleur choix en est indépendant.

Nous allons introduire un concept d'équilibre fondé sur la relation de stricte dominance. Il faut cependant garder en mémoire que cette relation d'ordre n'est pas « complète » dans le sens où deux stratégies ne sont en général pas comparables (opposer sur ce point *la bataille des sexes* et *le dilemme du prisonnier*).

• *Elimination successive des stratégies strictement dominées*

Lorsque chaque joueur a une stratégie strictement dominante, le jeu est immédiatement résolu. On dit alors qu'on a un *équilibre en stratégies strictement dominantes.* C'est le cas par exemple du *dilemme du prisonnier* où la stratégie agressive est une stratégie strictement dominante pour chacun des deux joueurs. Cependant les jeux qui admettent un tel équilibre sont très rares. Aussi il est intéressant d'élargir ce concept peu opérationnel. Nous allons montrer que certains jeux peuvent être « résolus » par l'utilisation des relations de dominance de *tous* les joueurs. Explicitons ce processus.

Chacun connaît les stratégies strictement dominées de tous les joueurs. Chacun peut mentalement les « éliminer » en faisant l'hypothèse qu'elles ne seront jamais jouées. Dans la forme normale réduite ainsi obtenue (la même pour tous), chacun peut à nouveau éliminer les stratégies strictement dominées s'il en existe et ainsi de suite... Si ce processus d'élimination converge vers une issue unique, chacun peut anticiper sans ambiguïté le comportement des autres. L'issue ainsi obtenue est appelée *équilibre par élimination des stratégies strictement dominées.*

Définissons ce processus plus formellement. Notons pour simplifier J le jeu :

$$(N, X_i, u_i, i \in N).$$

Etape 1 :

considérer le jeu $J_1 = (N, X_i^1, u_i, i \in N)$ où X_i^1 est l'ensemble des stratégies de i non strictement dominées dans J. Si $J = J_1$ arrêter le processus, sinon aller à la deuxième étape.

⋮

Etape k :

considérer le jeu $J_k = (N, X_i^k, u_i, i \in N)$ où X_i^k est l'ensemble des stratégies de i non strictement dominées dans J_{k-1}. Si $J_k = J_{k-1}$ arrêter le processus, sinon aller à l'étape $k + 1$.

Pour simplifier supposons le jeu fini. Alors le processus s'arrête nécessairement à une étape k. Si chaque joueur n'a plus qu'une seule stratégie, l'issue obtenue est appelée équilibre par élimination des stratégies strictement dominées. Un tel équilibre est par définition unique s'il existe. On a ainsi généralisé le concept d'équilibre en stratégies strictement dominantes puisque celui-ci s'obtient dès la première étape du processus d'élimination.

En fait, un équilibre par élimination des stratégies strictement dominées n'existe que très rarement. Le processus d'élimination s'arrête alors que les joueurs ont encore plusieurs stratégies possibles, aucune d'entre elles n'étant strictement dominées. Cependant, le jeu réduit ainsi obtenu est essentiel car, même si son issue n'est pas déterminée, les joueurs doivent rationnellement n'utiliser que des stratégies de ce jeu réduit ([1]).

EXEMPLE

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 3,1 & 8,0 & 2,6 \\ 4,3 & 2,2 & 3,0 \\ 3,2 & 3,1 & 4,1 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{\text{Elimination de C}} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 3,1 & 2,6 \\ 4,3 & 3,0 \\ 3,2 & 4,1 \end{bmatrix} \end{array}$$

([1]) Ce point sera précisé dans la section 3.2.

$$\xrightarrow{\text{Elimination de H}} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 4,3 & 3,0 \\ 3,2 & 4,1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{\text{Elimination de D}} \begin{array}{c c} & G \\ \begin{array}{c} M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 4,3 \\ 3,2 \end{pmatrix} \end{array} \to \overset{G}{M(4,3)}.$$

Pour interpréter le processus d'élimination des stratégies strictement dominées comme un processus mental opéré par chaque joueur, il n'est pas inutile de vérifier la robustesse de ce processus à des modifications dans sa mise en œuvre. Plus précisément que se passe-t-il si un joueur n'élimine pas systématiquement toutes les stratégies strictement dominées? Si on traite les joueurs séquentiellement plutôt que simultanément? On peut montrer ([1]) que la convergence du processus n'est pas altérée par de telles modifications dès lors qu'un joueur élimine au moins une stratégie strictement dominée tant que c'est possible.

On pourrait penser que la stricte dominance est une restriction trop forte, et tenter de l'affaiblir.

- ***Dominance au sens faible***

Définition. — *Une stratégie x_i du joueur i domine faiblement une stratégie x_i' si :*

(2) $$u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(x_i', x_{-i}) \qquad \forall x_{-i} \in X_{-i}.$$

Elle la domine si une inégalité au moins est stricte.
Evidemment on a les implications suivantes :

x_i domine strictement $x_i' \Rightarrow x_i$ domine x_i'
x_i domine $x_i' \Rightarrow x_i$ domine faiblement x_i'

Remarquons cependant que même la relation de dominance faible ne permet pas de comparer toutes les stratégies entre elles. A partir de ces relations on peut introduire de façon évidente les notions de stratégies dominantes ou faiblement dominantes, et de stratégies dominées ou faiblement dominées.

Définitions. — *Une stratégie d'un joueur est (faiblement) dominante si elle domine (faiblement) toutes ses autres stratégies.*

([1]) Voir par exemple le livre de Van Damme cité dans la bibliographie en fin de ce chapitre.

Une stratégie est (faiblement) dominée s'il existe une autre stratégie qui la domine (faiblement).

Si une stratégie dominante existe, elle est unique. Nous montrerons qu'une telle stratégie peut souvent être retenue. Par contre, l'élimination des stratégies faiblement dominées posent de nombreux problèmes. Le lecteur doit être mis en garde contre des tentatives d'extension de la démarche développée dans la section précédente à propos de la dominance stricte. Aussi après l'étude de l'enchère au second prix qui illustre les définitions, nous donnons trois exemples mettant chacun en évidence une difficulté possible.

EXEMPLES

L'enchère au second prix

Nous allons montrer qu'annoncer sa propre évaluation pour l'objet, $x_i = v_i$, est une stratégie dominante du joueur i. En effet, soit un ensemble de stratégies x_{-i} pour les autres joueurs. Quitte à changer les indices des joueurs, on peut supposer $i = 1$ et $x_2 \geq x_j$, $j \geq 2$. Montrons que :

(3) $$u_1(v_1, x_{-1}) \geq u_1(x_1, x_{-1}) \quad \forall (x_1, x_{-1}).$$

Considérons trois cas :

(i) $v_1 < x_2$.

Alors $u_1(v_1, x_{-1}) = 0$ puisque 1 n'obtient pas l'objet. Pour l'obtenir, il doit annoncer au moins x_2; le prix est alors x_2 et son niveau d'utilité est $v_1 - v_2$ qui est strictement négatif : (3) est vérifié.

(ii) $v_1 = x_2$.

Alors toute stratégie de 1 lui donne un profit nul : soit $x_1 < x_2$ et il n'obtient pas l'objet; soit $x_1 \geq x_2 = v_1$ et il obtient l'objet au prix v_1. Donc (3) est trivialement vérifié.

(iii) $v_1 > x_2$.

Alors $u_1(v_1, x_{-1}) = v_1 - x_2$. Toute autre stratégie x_1 lui permet soit d'obtenir l'objet au même prix ($x_1 \geq x_2$), soit de ne pas l'obtenir. Le niveau $u_1(x_1, x_{-1})$ est donc soit $v_1 - x_2$, soit 0, ce qui démontre (3).

Ainsi enchérir v_1 est une stratégie dominante et c'est évidemment la seule.

Renvoyez l'ascenseur

Bien qu'un joueur n'a en général *aucune* stratégie faiblement dominante, il peut aussi en avoir plusieurs. Le choix de l'une d'entre elles peut se révéler complexe comme l'illustre le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 \\ 0,1 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Chaque joueur est totalement indifférent entre ses deux stratégies qui sont donc faiblement dominantes. Pourtant, les issues ne sont pas toutes équivalentes. Ainsi, l'existence de stratégies faiblement dominantes ne permet ici de prévoir ni l'issue du jeu ni les paiements.

Processus d'élimination sur les stratégies dominées

Envisageons un processus d'élimination sur les stratégies dominées. Comme dans le cas des stratégies strictement dominées, le processus ne converge pas nécessairement. Même s'il converge, les résultats ne sont pas toujours satisfaisants.

Considérons le jeu suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 4,2 & 1,4 & 2,2 \\ 3,0 & 1,5 & 2,8 \\ 1,4 & 1,4 & 3,4 \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut éliminer successivement en stratégies dominées :

— M, D, B, G conduisant à l'issue (H, C) ou
— G, H, C, M conduisant à l'issue (B, D).

Ainsi le processus converge vers différentes issues, suivant l'ordre d'élimination des stratégies. Or il n'y a aucune raison que les joueurs suivent « en pensée » le même processus d'élimination.

Dans le jeu :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 10,10 & 0,10 \\ 10,0 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

H est dominée par B et G est dominée par D. Ici le processus d'élimination converge vers une unique issue, (B, D). Or l'issue (H, G), La théorie des jeux a pour ambition d'analyser les prises de décision d'individus placés en situation d'interdépendance. Sa principale originalité consiste à postuler la rationalité des acteurs, ceux-ci étant conscients non seulement de leurs propres objectifs, mais aussi de ceux des autres protagonistes. De telles situations abondent en pratique, notamment dans les domaines relevant des sciences de l'homme et de la société.

Aussi la théorie des jeux est-elle devenue un outil privilégié de formalisation et ceci tout particulièrement en sciences économiques. Que ce soit en microéconomie et en macroéconomie, mais aussi dans des domaines plus spécialisés tels que l'économie industrielle, la théorie du commerce international ou la théorie des organisations, la théorie des jeux permet d'expliciter le raisonnement économique le plus pertinent.

Répondant au besoin de nombreux étudiants, ce livre introduit aux techniques de base dont l'assimilation est indispensable au bon usage de la théorie des jeux. Mais il présente aussi des « modélisations exemplaires », illustrant ainsi l'originalité et la réussite de la théorie des jeux.

Ce livre a pour point de départ des enseignements de 2e et 3e cycles effectués par les auteurs à l'ENSAE, Paris I, Paris IX, Paris XIII, l'Ecole Polytechnique et l'EHESS. Nous remercions les étudiants qui, à travers leurs remarques et suggestions, ont contribué à en améliorer le contenu.

9 782130 459736

199 FF

22409620/3/94