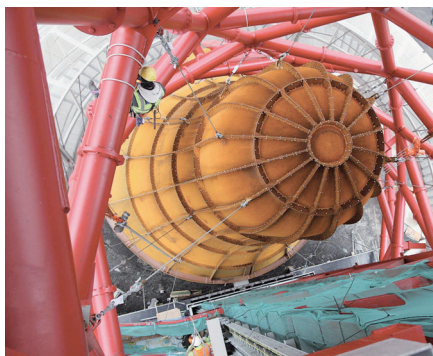
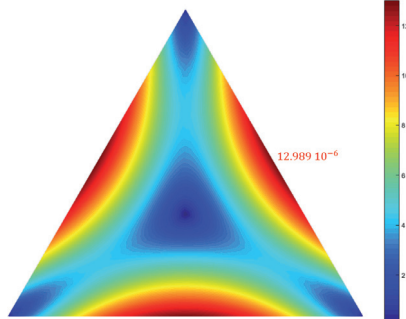


Erick Ringot  
avec Bernard Husson  
et Thierry Vidal

# CALCUL DES OUVRAGES APPLICATIONS

Exercices et problèmes  
résolus de résistance  
des matériaux et de  
calcul des structures

EYROLLES



# Erick Ringot, avec Bernard Husson et Thierry Vidal

# CALCUL DES OUVRAGES : APPLICATIONS

## Exercices et problèmes résolus de résistance des matériaux et de calcul des structures

Précédés d'une brève introduction à la mécanique générale, les **110 exercices et problèmes résolus** rassemblés ici embrassent un large panel d'applications, tant dans le domaine de la résistance des matériaux que dans celui du **calcul des ossatures**. Un éclairage particulier est apporté aux applications associées aux questions de **stabilité**, de **sismique** et d'**élastoplasticité**. Inspirés de situations réelles, les exemples sont originaux. Abondamment illustrés, ils sont systématiquement complétés par des **applications numériques**.

Chaque fois que nécessaire, les **développements mathématiques** utiles aux résolutions sont détaillés.

*Tous les sujets dont ce volume inédit est composé ont été conçus et expérimentés par l'équipe en charge de l'enseignement de la résistance des matériaux, du calcul des ouvrages béton et des constructions mixtes à l'université Paul Sabatier de Toulouse. Ils illustrent le manuel de cours intitulé Calcul des ouvrages.*

I. Mécanique générale. II. Statique. III. Théorie des poutres. IV. Cisaillement de flexion. V. Torsion. VI. Applications directes du principe des puissances virtuelles. VII. Méthode des forces. VIII. Méthode des déplacements. IX. Stabilité en régime élastique. X. Problèmes de synthèse

Ancien élève de l'École normale supérieure Paris-Orsay, professeur des universités, **Erick Ringot** enseigne la mécanique appliquée en licence et master de génie civil de l'université de Toulouse. Ses travaux de recherche portent aujourd'hui sur le sujet sensible de la qualité de l'air extérieur et dans les habitacles ainsi que sur les systèmes de protection des ouvrages en béton armé contre la corrosion. Il est très impliqué dans la valorisation de la recherche; ses travaux ont donné lieu à la création de deux entreprises à technologie innovante qu'il codirige avec ses anciens étudiants de thèse.

Agrégé de génie civil et docteur-ingénieur Insa, **Bernard Husson** est actuellement maître de conférences habilité à diriger les recherches à l'université Toulouse 3 – Paul Sabatier (UPS). Il effectue l'intégralité de son enseignement dans les filières génie civil de l'université (licence – master et 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> années de l'Upsitech, école interne d'ingénieurs de l'UPS); les principales disciplines enseignées sont le calcul des structures et le calcul du béton armé. Il est rattaché au laboratoire Matériaux et durabilité des constructions (LMDC – UPS-Insa Toulouse) où il travaille principalement sur la valorisation de sous-produits industriels et miniers dans les bétons et les matériaux de construction routière.

Docteur-ingénieur INSA en génie civil, **Thierry Vidal** est maître de conférences à l'université Toulouse 3 – Paul Sabatier (UPS). Les enseignements qu'il dispense dans les filières de génie civil de l'université (licence – master et 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> années de l'Upsitech, école interne d'ingénieurs de l'UPS) concernent principalement le calcul des structures, le béton précontraint et la construction mixte acier-béton. Il est chercheur au laboratoire Matériaux et durabilité des constructions (LMDC – UPS-Insa Toulouse) dans lequel il mène des travaux sur le comportement mécanique différé des bétons, retrait et fluage, notamment sur les **bétons fibrés ultra performants** (BFUP).

Manuel de cours correspondant, chez le même éditeur :

Erick Ringot, *Calcul des ouvrages. Résistance des matériaux et fondements du calcul des structures*, 512 p., 2017

En couverture :

Champ de contrainte de cisaillement de torsion de Saint-Venant dans un profil de section droite triangulaire équilatéral

Détail de construction d'ArcelorMittal Orbit. Cette tour métallique de 115 m conçue par le sculpteur Anish Kapoor et l'ingénieur structure Cecil Balmond fut construite à Londres à l'occasion des Jeux olympiques d'été de 2012 (photo © Pierre Engel)

Ossature métallique d'un parking aérien (Londres) en phase de construction (photo © Pierre Engel)

Ossature industrielle en treillis formant poutres (photo © Pierre Engel)

Faîtage et rive de fermes de charpente d'un bâtiment en construction. Détail sur un gousset d'assemblage (photo © Pierre Engel)

**PUBLICS**

Licence et master de génie civil

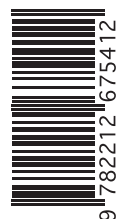
Diplôme d'ingénieur civil

Formation continue

60 €

[www.editions-eyrolles.com](http://www.editions-eyrolles.com)  
Groupe Eyrolles | Diffusion Geodif

Code éditeur : 667541  
ISBN : 978-2-212-67541-2



Erick Ringot  
avec Bernard Husson  
et Thierry Vidal

# **CALCUL DES OUVRAGES : APPLICATIONS**

**Exercices et problèmes résolus de résistance  
des matériaux et de calcul des structures**

**EYROLLES**



ÉDITIONS EYROLLES  
61, bd Saint-Germain  
75240 Paris Cedex 05  
[www.editions-eyrolles.com](http://www.editions-eyrolles.com)

*Les schémas et, sauf mention contraire, les photos illustrant l'ouvrage sont des auteurs.*

Aux termes du code de la propriété intellectuelle, toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle de la présente publication, faite par quelque procédé que ce soit (reprographie, microfilmage, scannérisation, numérisation...) sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles L.335-2 et suivants du code de la propriété intellectuelle. L'autorisation d'effectuer des reproductions par reprographie doit être obtenue auprès du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC) – 20, rue des Grands-Augustins – 75006 Paris.

© Groupe Eyrolles, 2018, ISBN : 978-2-212-67541-2

# Sommaire

I.	Exercices de mécanique générale .....	17
II.	Exercices de statique .....	79
III.	Théorie des poutres .....	151
IV.	Exercices de cisaillement de flexion .....	237
V.	Exercices de torsion .....	309
VI.	Applications directes du principe des puissances virtuelles .....	379
VII.	Méthode des forces .....	435
VIII.	Méthode des déplacements .....	489
IX.	Exercices de stabilité en régime élastique .....	575
X.	Problèmes de synthèse .....	651

Ce livre est dédié à Elena Ringot née le 6 novembre 2017  
à Toulouse pendant l'écriture de ce recueil d'exercices.

Les auteurs remercient chaleureusement le Professeur  
Rached El Fatmi de l'ENI de Tunis pour la mise à disposition  
de la suite logicielle CSB et les échanges instructifs sur la  
théorie des poutres. Notre collègue Bernard Étienne, ancien  
élève de l'École normale supérieure Paris-Saclay, professeur  
agrégé de génie civil et vacataire à l'université de Toulouse,  
a relu les épreuves de ce livre et en est vivement remercié.

Erick Ringot

# Table des matières

<b>1 Exercices de mécanique générale</b>	<b>17</b>
1.1 L'essentiel	17
1.2 Double produit vectoriel	20
1.2.1. Énoncé, 20 — 1.2.2. Solution, 20	
1.3 Théorème de Lagrange	21
1.3.1. Énoncé, 21 — 1.3.2. Solution, 21	
1.4 Invariance par permutation circulaire du produit mixte	22
1.4.1. Énoncé, 22 — 1.4.2. Solution, 22	
1.5 Division vectorielle	24
1.5.1. Énoncé, 24 — 1.5.2. Solution, 24	
1.6 Torseur formé par un ensemble de forces concentrées	25
1.6.1. Énoncé, 25 — 1.6.2. Solution, 26	
1.7 Tenseur antisymétrique et produit vectoriel	28
1.7.1. Énoncé, 28 — 1.7.2. Solution, 28	
1.8 Conditions pour qu'un torseur forme un glisseur	29
1.8.1. Énoncé, 29 — 1.8.2. Solution, 29	
1.9 Forces réparties sur un arc parabolique	30
1.9.1. Énoncé, 30 — 1.9.2. Questions, 30 — 1.9.3. Solution, 31	
1.10 Force transversale uniformément répartie sur un arc quelconque	39
1.10.1. Description, 39 — 1.10.2. Questions, 39 — 1.10.3. Solution, 39	
1.11 Plaque demi-circulaire soumise à une densité variable de force surfacique	42
1.11.1. Description, 42 — 1.11.2. Questions, 43 — 1.11.3. Solution, 43	
1.12 Étude cinématique d'un pendule suspendu à quatre câbles	45
1.12.1. Énoncé, 45 — 1.12.2. Hypothèse, 46 — 1.12.3. Solution, 46	
1.13 Série de mécanismes [1] – Détermination du nombre de degrés de liberté	49
1.13.1. Description, 49 — 1.13.2. Question, 49 — 1.13.3. Solution, 49	
1.14 Série de mécanismes [2] – Détermination du nombre de degrés de liberté	50
1.14.1. Description, 51 — 1.14.2. Question, 51 — 1.14.3. Solution, 51	
1.15 Paramétrage d'une rotation dans un mécanisme à 1 DDL	54
1.15.1. Description, 54 — 1.15.2. Questions, 55 — 1.15.3. Solution, 55	
1.16 Mécanisme en portique à cinq articulations	58

1.16.1. Description, 58 — 1.16.2. Questions, 58 — 1.16.3. Solution, 59	
1.17 Épure cinématique I . . . . .	63
1.17.1. Énoncé, 63 — 1.17.2. Questions, 63 — 1.17.3. Solution, 63	
1.18 Puissance d'une force répartie agissant sur une poutre indéformable . . . . .	66
1.18.1. Description, 66 — 1.18.2. Questions, 67 — 1.18.3. Solution, 67	
1.19 Puissance développée par un cycliste en ascension . . . . .	70
1.19.1. Description, 70 — 1.19.2. Question, 70 — 1.19.3. Solution, 71	
1.20 Conditions d'équilibre d'un mécanisme à 2 DDL . . . . .	71
1.20.1. Description, 71 — 1.20.2. Questions, 71 — 1.20.3. Solution, 72 — 1.20.4. Vérification à l'aide de pyBar, 76	
<b>2 Exercices de statique</b>	<b>79</b>
2.1 L'essentiel . . . . .	79
2.2 Arc funiculaire d'une charge de neige . . . . .	81
2.2.1. Description, 81 — 2.2.2. Hypothèses, 81 — 2.2.3. Questions, 81 — 2.2.4. Solution, 82 — 2.2.5. Conclusion, 83	
2.3 Étude statique d'un bâtiment agricole . . . . .	83
2.3.1. Description, 84 — 2.3.2. Questions, 84 — 2.3.3. Solution, 84 — 2.3.4. Conclusion, 92	
2.4 Statique d'un treillis . . . . .	93
2.4.1. Description, 93 — 2.4.2. Questions, 93 — 2.4.3. Solution, 94 — 2.4.4. Solution pyBar, 97	
2.5 Statique d'un portique à traverse droite . . . . .	98
2.5.1. Description, 99 — 2.5.2. Questions, 99 — 2.5.3. Solution, 100 — 2.5.4. Vérification pyBar, 107	
2.6 Statique d'un portique à traverse brisée . . . . .	108
2.6.1. Description, 108 — 2.6.2. Questions, 109 — 2.6.3. Solution, 109 — 2.6.4. Vérification pyBar, 121	
2.7 Abricycle . . . . .	122
2.7.1. Description, 122 — 2.7.2. Questions, 122 — 2.7.3. Solution, 123	
2.8 Relations entre moments fléchissants dans une structure hyperstatique . . . . .	129
2.8.1. Description, 129 — 2.8.2. Questions, 129 — 2.8.3. Solution, 129 — 2.8.4. Bilan, 134 — 2.8.5. Vérification à l'aide de pyBar, 135	
2.9 Étude d'une structure isostatique en « shed » . . . . .	135
2.9.1. Description, 136 — 2.9.2. Questions, 137 — 2.9.3. Solution, 137 — 2.9.4. Vérification à l'aide de pyBar, 143	
2.10 Cas limite mécanisme-structure . . . . .	144
2.10.1. Description, 144 — 2.10.2. Question, 144 — 2.10.3. Solution, 145 — 2.10.4. Conclusion, 148	
<b>3 Théorie des poutres</b>	<b>151</b>
3.1 L'essentiel . . . . .	151
3.2 Étude d'un profil en T . . . . .	152



3.2.1. Description, 152 — 3.2.2. Questions, 152 — 3.2.3. Solution, 153	
3.3 Section elliptique . . . . .	155
3.3.1. Description, 155 — 3.3.2. Questions, 155 — 3.3.3. Solution, 156 — 3.3.4. Solution CSection, 159	
3.4 Section droite délimitée par une enveloppe parabolique . . . . .	160
3.4.1. Description, 160 — 3.4.2. Questions, 160 — 3.4.3. Solution, 161 — 3.4.4. Solution CSection, 164	
3.5 Section en quart de rond . . . . .	165
3.5.1. Description, 165 — 3.5.2. Questions, 166 — 3.5.3. Solution, 166 — 3.5.4. Solution CSection, 172	
3.6 Modèle simplifié de cornière épaisse . . . . .	172
3.6.1. Description, 173 — 3.6.2. Questions, 173 — 3.6.3. Solution, 174 — 3.6.4. Solution CSection, 179	
3.7 Section mixte acier-béton . . . . .	180
3.7.1. Description, 180 — 3.7.2. Question, 181 — 3.7.3. Solution, 182 3.7.3.1. Aires partielles et aire homogénéisée, 182 — 3.7.3.2. Moments statiques et centres d'inertie, 182 — 3.7.3.3. Inerties quadratiques, 184 — 3.7.4. Calcul à l'aide d'un tableur, 185 — 3.7.5. Solution CSection, 186	
3.8 Console courte en quart de rond . . . . .	188
3.8.1. Description, 188 — 3.8.2. Questions, 189 — 3.8.3. Solution, 189 — 3.8.4. Solution CBeam, 196 — 3.8.5. Conclusion de l'exercice, 197	
3.9 Profil épais en forme de Z . . . . .	198
3.9.1. Description, 198 — 3.9.2. Questions, 198 — 3.9.3. Solution, 199 — 3.9.4. Solution CSection, 201	
3.10 Poutre sur deux appuis à profil en forme de Z . . . . .	202
3.10.1. Description, 202 — 3.10.2. Questions, 203 — 3.10.3. Solution, 203 3.10.3.1. Hyperstaticité et équilibre global, 203 — 3.10.3.2. Sollicitations, 204 — 3.10.3.3. Déformations et déplacements, 207 — 3.10.3.4. Contraintes normales dans la section médiane, 211 — 3.10.4. Solution CBeam, 212 3.10.4.1. Sollicitations et déplacements, 213 — 3.10.4.2. Contraintes de cisaillement dans le plan d'encastrement, 213	
3.11 Poutre infiniment longue posée sur un sol élastique . . . . .	215
3.11.1. Description, 215 — 3.11.2. Hypothèses, 216 — 3.11.3. Questions, 216 — 3.11.4. Solution, 216	
3.12 Contribution du cisaillement à la ligne déformée d'une console . . . . .	225
3.12.1. Description, 225 — 3.12.2. Questions, 226 — 3.12.3. Solution, 226 — 3.12.4. Solution CSB, 234 — 3.12.5. Conclusion, 235	
<b>4 Exercices de cisaillement de flexion</b>	<b>237</b>
4.1 L'essentiel . . . . .	237
4.1.1. Profils minces ouverts, 237 — 4.1.2. Profils minces fermés, 237 — 4.1.3. Sections réduites, 238 — 4.1.4. Centre de raideur, 238	
4.2 Cornière à ailes égales . . . . .	239
4.2.1. Description, 239 — 4.2.2. Questions, 240 — 4.2.3. Solution, 240 4.2.3.1. Position du centre de gravité $G$ par rapport au centre de flexion $C$ , 240 — 4.2.3.2. Moment de torsion $M_x$ , 241 — 4.2.3.3. Moments principaux d'inertie $I_y$ et $I_z$ , 241 — 4.2.3.4. Flux de cisaillement de	

flexion entraîné par l'effort de cisaillement, 242 — 4.2.4. Résultats avec CSection, 244	
4.3 Profil en « V » . . . . .	245
4.3.1. Description, 245 — 4.3.2. Questions, 245 — 4.3.3. Solution, 245 — 4.3.4. Solution CSection, 251	
4.4 Panne Z . . . . .	252
4.4.1. Description, 252 — 4.4.2. Questions, 252 — 4.4.3. Solution, 252 — 4.4.4. Solution CSection, 257	
4.5 Profil en oméga . . . . .	259
4.5.1. Description, 259 — 4.5.2. Questions, 259 — 4.5.3. Solution, 259 — 4.5.4. Solution CSection, 266	
4.6 Anneau circulaire cloisonné . . . . .	266
4.6.1. Description, 267 — 4.6.2. Questions, 267 — 4.6.3. Solution, 267 — 4.6.4. Solution CSection, 277	
4.7 Profil mince 4-connexe à double symétrie . . . . .	278
4.7.1. Description, 278 — 4.7.2. Questions, 279 — 4.7.3. Solution, 279 — 4.7.4. Solution CSection, 288	
4.8 Profil mince fermé 3-connexe . . . . .	289
4.8.1. Description, 290 — 4.8.2. Questions, 290 — 4.8.3. Solution, 290 — 4.8.4. Solution CSection, 298	
4.9 Profil 5-connexe à plan de symétrie . . . . .	299
4.9.1. Description, 299 — 4.9.2. Questions, 300 — 4.9.3. Solution, 300 — 4.9.4. Solution CSection, 306	
<b>5 Exercices de torsion</b>	<b>309</b>
5.1 L'essentiel . . . . .	309
5.1.1. Equation de la torsion, 309 — 5.1.2. Cas des profils minces, 310	
5.2 Profilé IPE120 laminé à chaud . . . . .	311
5.2.1. Description, 311 — 5.2.2. Questions, 313 — 5.2.3. Solution, 313 — 5.2.4. Solution CSection, 314	
5.3 Profil en aluminium extrudé . . . . .	316
5.3.1. Description, 316 — 5.3.2. Questions, 316 — 5.3.3. Solution, 317 — 5.3.4. Solution CSection, 318	
5.4 Tube serrurier « Z » à ailettes . . . . .	321
5.4.1. Description, 321 — 5.4.2. Questions, 322 — 5.4.3. Solution, 323 — 5.4.4. Solution CSection, 324	
5.5 Torsion d'un anneau circulaire cloisonné . . . . .	326
5.5.1. Description, 327 — 5.5.2. Questions, 327 — 5.5.3. Solution, 327 — 5.5.4. Vérification CSection, 329 — 5.5.5. Généralisation, 3295.5.5.1. Cas où le rayonnage est régulier, 329 — 5.5.5.2. Cas d'un rayonnage quelconque, 330 — 5.5.6. Conclusion, 332	
5.6 Anneau circulaire à cloisons parallèles . . . . .	333
5.6.1. Description, 333 — 5.6.2. Questions, 333 — 5.6.3. Solution, 333 — 5.6.4. Solution CSection, 336 — 5.6.5. Conclusion, 338	
5.7 Étude d'un voussoir de pont . . . . .	338
5.7.1. Description, 338 — 5.7.2. Questions, 339 — 5.7.3. Solution, 339 — 5.7.4. Solution	

CSection, 343	
5.8 Torsion d'une poutre de section elliptique . . . . .	346
5.8.1. Description, 347 — 5.8.2. Questions, 347 — 5.8.3. Solution, 348	— 5.8.4.
Solution CSection, 360	
5.9 Torsion d'une poutre de section triangulaire équilatérale . . . . .	361
5.9.1. Description, 361 — 5.9.2. Questions, 361 — 5.9.3. Solution, 362	— 5.9.4. Solution
CSection, 367	
5.10 Torsion d'une colonne circulaire avec lunule . . . . .	368
5.10.1. Description, 369 — 5.10.2. Questions, 369 — 5.10.3. Solution, 370	— 5.10.4.
Solution CSection, 377	
<b>6 Applications directes du principe des puissances virtuelles</b>	<b>379</b>
6.1 L'essentiel . . . . .	379
6.1.1. Principe des puissances virtuelles, 379 — 6.1.2. Intégrales de Mohr, 380	
6.2 Potence soumise à des efforts concentrés . . . . .	380
6.2.1. Description, 380 — 6.2.2. Question, 381 — 6.2.3. Solution, 381	— 6.2.4. Solution
pyBar, 385	
6.3 Déformation d'un arc circulaire surbaissé . . . . .	385
6.3.1. Description, 385 — 6.3.2. Questions, 386 — 6.3.3. Solution, 386	— 6.3.4. Solution
pyBar, 394	
6.4 Déformation thermique d'une ossature isostatique . . . . .	395
6.4.1. Description, 395 — 6.4.2. Questions, 396 — 6.4.3. Solution, 396	— 6.4.4.
Modélisation pyBar, 406 — 6.4.5. À retenir, 407	
6.5 Ligne d'influence d'un effort normal dans un treillis . . . . .	407
6.5.1. Description, 407 — 6.5.2. Questions, 408 — 6.5.3. Solution, 408	
6.6 Ligne d'influence d'un moment dans un portique . . . . .	410
6.6.1. Description, 410 — 6.6.2. Questions, 410 — 6.6.3. Solution, 411	
6.7 Ligne d'influence d'une réaction dans une poutre continue . . . . .	414
6.7.1. Description, 415 — 6.7.2. Question, 415 — 6.7.3. Solution, 415	— 6.7.4. Solution
pyBar, 417	
6.8 Ligne d'influence du moment sur appui dans une poutre continue . . . . .	418
6.8.1. Description, 418 — 6.8.2. Question, 418 — 6.8.3. Solution, 418	— 6.8.4. Conclusion, 421
6.9 Ligne d'influence de la rotation sur appui dans une poutre continue . . . . .	421
6.9.1. Description, 421 — 6.9.2. Questions, 421 — 6.9.3. Solution, 422	
6.10 Portique à traverse brisée soumise à une charge de neige . . . . .	424
6.10.1. Description, 424 — 6.10.2. Questions, 424 — 6.10.3. Solution, 425	— 6.10.4.
Solution pyBar, 432 — 6.10.5. Note générale quant au moment produit par la neige, 433	
<b>7 Méthode des forces</b>	<b>435</b>
7.1 L'essentiel . . . . .	435
7.2 Portique asymétrique hyperstatique d'ordre 1 . . . . .	437
7.2.1. Description, 437 — 7.2.2. Questions, 437 — 7.2.3. Solution, 438	— 7.2.4. Modélisation
pyBar, 441	

7.3	Structure industrielle soumise à force concentrée . . . . .	441
7.3.1.	Description, 442 — 7.3.2. Questions, 442 — 7.3.3. Solution, 443	
7.4	Pont suspendu à un arc circulaire . . . . .	451
7.4.1.	Description, 452 — 7.4.2. Questions, 453 — 7.4.3. Solution, 453 — 7.4.4.	
	Modélisation pyBar, 462 — 7.4.5. Code C pour le calcul des intégrales de Mohr, 462	
7.5	Poutre sur trois appuis : choix de l'inconnue hyperstatique . . . . .	464
7.5.1.	Description, 464 — 7.5.2. Hypothèses, 464 — 7.5.3. Questions, 465 — 7.5.4. Solution,	
465	— 7.5.5. Solution pyBar, 470 — 7.5.6. Conclusion, 470	
7.6	Pont hyperstatique de degré 2 . . . . .	471
7.6.1.	Description, 471 — 7.6.2. Hypothèses, 471 — 7.6.3. Questions, 471 — 7.6.4. Solution,	
472		
7.7	Portique à jambages obliques . . . . .	480
7.7.1.	Description, 481 — 7.7.2. Hypothèses, 481 — 7.7.3. Questions, 481 — 7.7.4. Solution,	
482	— 7.7.5. Solution pyBar, 487	
<b>8</b>	<b>Méthode des déplacements</b>	<b>489</b>
8.1	L'essentiel . . . . .	489
8.2	Détermination des degrés de liberté I . . . . .	489
8.2.1.	Description, 490 — 8.2.2. Questions, 490 — 8.2.3. Solution, 490	
8.3	Degrés de liberté II . . . . .	491
8.3.1.	Description, 491 — 8.3.2. Questions, 491 — 8.3.3. Solution, 491	
8.4	Degrés de liberté III . . . . .	492
8.4.1.	Description, 492 — 8.4.2. Questions, 493 — 8.4.3. Solution, 493	
8.5	Gestion des condensations statiques I . . . . .	495
8.5.1.	Description, 495 — 8.5.2. Question, 495 — 8.5.3. Solution, 495	
8.6	Condensation statique II . . . . .	497
8.6.1.	Description, 497 — 8.6.2. Question, 498 — 8.6.3. Solution, 498	
8.7	Structure en T à nœuds indéplaçables . . . . .	500
8.7.1.	Description, 500 — 8.7.2. Question, 501 — 8.7.3. Solution, 501	
8.8	Poutre continue posée sur cinq appuis . . . . .	503
8.8.1.	Description, 504 — 8.8.2. Question, 504 — 8.8.3. Solution, 504	
8.9	Structure en V . . . . .	509
8.9.1.	Description, 509 — 8.9.2. Questions, 510 — 8.9.3. Solution, 510 — 8.9.4. Vérification par	
	la statique et application du <b>PPV*</b> , 515	
8.10	Treillis isostatique . . . . .	517
8.10.1.	Description, 517 — 8.10.2. Questions, 517 — 8.10.3. Solution, 518	
8.11	Abri en demi-portique . . . . .	526
8.11.1.	Description, 526 — 8.11.2. Questions, 526 — 8.11.3. Solution, 527 — 8.11.4.	
	Vérification par la statique et application du <b>PPV*</b> , 532	
8.12	Portique à diagonale élastique . . . . .	533
8.12.1.	Description, 533 — 8.12.2. Questions, 533 — 8.12.3. Solution, 534	
8.13	Treillis hyperstatique sous chargement thermique . . . . .	540

8.13.1. Description, 540 — 8.13.2. Questions, 540 — 8.13.3. Solution, 540	
8.14 Portique à liaison interne élastique . . . . .	550
8.14.1. Description, 550 — 8.14.2. Questions, 550 — 8.14.3. Solution, 551 — 8.14.4. Structure en T à nœuds déplaçables et à appui élastique, 558 — 8.14.5. Description, 558 — 8.14.6. Question, 558 — 8.14.7. Solution, 558	
8.15 Structure à rotation imposée . . . . .	563
8.15.1. Description, 563 — 8.15.2. Questions, 563 — 8.15.3. Solution, 563	
8.16 Poutre continue comportant un appui élastique et un appui dénivelé . . . . .	567
8.16.1. Description, 568 — 8.16.2. Questions, 568 — 8.16.3. Solution, 568	
<b>9 Stabilité en régime élastique</b>	<b>575</b>
9.1 L'essentiel . . . . .	575
9.2 Stabilité d'un mécanisme I . . . . .	576
9.2.1. Description, 576 — 9.2.2. Questions, 577 — 9.2.3. Solution, 577	
9.3 Stabilité d'un mécanisme II, effet de la linéarisation . . . . .	580
9.3.1. Description, 580 — 9.3.2. Questions, 580 — 9.3.3. Solution, 580	
9.4 Effet d'un défaut géométrique sur la stabilité d'un mécanisme . . . . .	584
9.4.1. Description, 584 — 9.4.2. Questions, 584 — 9.4.3. Solution, 584	
9.5 Effet d'amplification de la déformée d'une charge compressive . . . . .	587
9.5.1. Description, 587 — 9.5.2. Questions, 587 — 9.5.3. Solution, 588	
9.6 Méthode de Rayleigh-Timoshenko : influence du motif de déplacement . . . . .	591
9.6.1. Description, 591 — 9.6.2. Questions, 591 — 9.6.3. Solution, 592	
9.7 Étude du flambement d'une poutre modélisée en 1 ou 2 éléments . . . . .	595
9.7.1. Description, 596 — 9.7.2. Question, 596 — 9.7.3. Solution, 596	
9.8 Stabilité d'un triple portique I . . . . .	600
9.8.1. Description, 600 — 9.8.2. Questions, 600 — 9.8.3. Solution, 600	
9.9 Stabilité d'un triple portique II . . . . .	606
9.9.1. Description, 606 — 9.9.2. Question, 607 — 9.9.3. Solution, 607	
9.10 Stabilité d'un module de structure en T . . . . .	611
9.10.1. Description, 611 — 9.10.2. Question, 612 — 9.10.3. Solution, 612	
9.11 Stabilité d'un demi-portique à jambage . . . . .	617
9.11.1. Description, 617 — 9.11.2. Questions, 617 — 9.11.3. Solution, 618	
9.12 Flambement d'une poutre avec appui élastique . . . . .	622
9.12.1. Description, 623 — 9.12.2. Questions, 623 — 9.12.3. Solution, 623	
9.13 Flambement d'une poutre continue sur trois appuis . . . . .	628
9.13.1. Description, 628 — 9.13.2. Questions, 629 — 9.13.3. Solution, 629	
9.14 Matrice de rigidité de Rayleigh-Ritz . . . . .	634
9.14.1. Description, 634 — 9.14.2. Questions, 634 — 9.14.3. Solution, 634	
9.15 Application de la matrice de rigidité de Rayleigh-Ritz . . . . .	640
9.15.1. Description, 640 — 9.15.2. Questions, 640 — 9.15.3. Solution, 641	
9.16 Étude de stabilité d'un portique symétrique . . . . .	645

9.16.1. Description, 645 — 9.16.2. Questions, 645 — 9.16.3. Solution, 646

<b>10 Problèmes de synthèse</b>	<b>651</b>
10.1 Introduction . . . . .	651
10.2 Grande roue . . . . .	651
10.2.1. Description, 651 — 10.2.2. Hypothèses, 651 — 10.2.3. Questions, 652 — 10.2.4. Solution, 652 — 10.2.5. Vérification pyBar, 655	
10.3 Étude des contraintes dans un profil en oméga . . . . .	656
10.3.1. Description, 656 — 10.3.2. Questions, 657 — 10.3.3. Solution, 658	
10.4 Étude d'un portique à nœuds indéplaçables . . . . .	665
10.4.1. Description, 665 — 10.4.2. Questions, 665 — 10.4.3. Solution, 667	
10.5 Hangar, choix du modèle de calcul . . . . .	674
10.5.1. Description, 675 — 10.5.2. Question, 675 — 10.5.3. Solution, 675	
10.6 Pont hyperstatique soumis à la composante verticale d'un séisme . . . . .	679
10.6.1. Description, 680 — 10.6.2. Questions, 681 — 10.6.3. Solution, 682 — 10.6.4. Solution CSB, 691 — 10.6.5. Correction du modèle, 693 — 10.6.6. Contraintes normales (section médiane), 696 — 10.6.7. Un mot sur les contraintes de cisaillement, 698 — 10.6.8. Conclusion de l'exercice, 698	
10.7 Flexion-torsion d'un profil en U . . . . .	699
10.7.1. Description, 699 — 10.7.2. Questions, 699 — 10.7.3. Solution, 700 — 10.7.4. Solution CSection, 709	
10.8 Courbe de capacité d'une structure hyperstatique . . . . .	711
10.8.1. Description, 711 — 10.8.2. Questions, 712 — 10.8.3. Solution, 713	
10.9 Contreventement d'un portique . . . . .	724
10.9.1. Description, 724 — 10.9.2. Questions, 725 — 10.9.3. Solution, 726	
10.9.3.1. Portique sans diagonale traité par la méthode des forces, 726 — 10.9.3.2. Portique avec diagonale traité par la méthode des déplacements, 731 — 10.9.4. Solution pyBar, 738	
10.10 Ossature de plancher . . . . .	740
10.10.1. Description, 740 — 10.10.2. Hypothèses, 740 — 10.10.3. Questions, 740 — 10.10.4. Solution, 741	
10.11 Efforts de renversement sous action sismique . . . . .	746
10.11.1. Description, 746 — 10.11.2. Hypothèses, 746 — 10.11.3. Questions, 747 — 10.11.4. Solution, 747 — 10.11.5. Conclusion, 751	
10.12 Torsion sous action sismique . . . . .	752
10.12.1. Description, 752 — 10.12.2. Hypothèses, 752 — 10.12.3. Questions, 753 — 10.12.4. Solution, 753 — 10.12.5. Conclusion, 759	

# Avant-propos

Ce recueil d'exercices vient en complément du livre *Calcul des ouvrages - résistance des matériaux et calcul des structures*<sup>1</sup> dont il illustre chaque chapitre. Les exercices se veulent être originaux, graduels dans leur difficulté et abondamment commentés, l'objectif étant de favoriser l'acquisition puis la maîtrise des concepts par le lecteur. Quelques rappels de mathématiques, lorsque cela a été jugé nécessaire par les auteurs, émaillent le discours çà et là. Les erreurs fréquentes et autres pièges ont été signalés et déjoués.

Ce recueil aborde les sujets suivants :

1. la mécanique générale utile à l'analyse de structures : torseurs et cinématique ;
2. la statique des structures sous l'hypothèse des petites perturbations par approche vectorielle et l'approche scalaire ;
3. la théorie des poutres ;
4. le cisaillement de flexion ;
5. le cisaillement de torsion de Saint-Venant ;
6. le principe des puissances virtuelles ;
7. la méthode des forces ;
8. la méthode des déplacements ;
9. la stabilité des structures élastiques ;
10. les problèmes de synthèse aux thématiques mixtes.

Chaque chapitre est introduit par un résumé de cours rappelant les notions essentielles utiles à la résolution des exercices qui suivent.

## Logiciels

Dans les exercices qui suivent, il sera fait mention de l'utilisation de logiciels utilisés à des fins de contrôle, d'enrichissement et d'illustration des solutions analytiques. Il s'agit de :

---

1. Erick Ringot, *Calcul des ouvrages : résistance des matériaux et fondements du calcul des structures*, 512 pages, Eyrolles, 2017 (ISBN 978-2-212-67370-8), également disponible au format numérique.

logiciel	statut	description	site
<b>pyBar</b>	freeware	logiciel de calcul de structure simple et pédagogique développé par Philippe Lawrence, ingénieur INSA et agrégé de génie civil. L'utilisation de ce programme est présentée dans le livre de cours cité plus haut (section ).	<a href="http://pybar.fr/">http://pybar.fr/</a>
<b>CSB</b>	commercial	voir la section ci-après.	<a href="http://www.nt4e.com/">http://www.nt4e.com/</a> 
<b>Gmsh</b>	open source	« mailleur » Open source utilisé pour la modélisation des sections calculées par le module CSection de CSB.	<a href="http://Gmsh.info/">http://Gmsh.info/</a> 

Nous aurons également recours à un tableur électronique pour résoudre des systèmes linéaires, tracer des champs de sollicitations ou de contraintes, rechercher des valeurs propres. De façon exceptionnelle, un peu de code en langage C sera proposé pour le calcul d'intégrales de Mohr sur des arcs (exercice 7.4).

## Introduction à CSB

### Présentation

Le logiciel CSB (Cross Section & Beam analysis) est une suite logicielle permettant le calcul des poutres de section homogène ou hétérogène (composite). Conçu et développé par le Professeur Rached El Fatmi de l'École Nationale des Ingénieurs de Tunis, CSB s'adresse à l'ingénieur ; il constitue un tandem de deux outils numériques complémentaires : CSection et CBeam qui, pour un problème de poutre donné, s'articule comme suit :

- CSection calcule les caractéristiques de la section droite, compte tenu de sa forme et du (des) matériau(x) qui la compose(nt) ;
- CBeam utilise ces caractéristiques de section pour assurer le calcul de la poutre :
  - en statique : sous chargement mécanique ou thermique, pour fournir les sollicitations, la déformée, ...etc ;
  - en dynamique : calcul des premières fréquences et des modes associés ;
  - en stabilité : calcul du facteur d'amplification critique et caractérisation du mode de bifurcation associé.

Les poutres traitées par CSB sont supposées droites et de section uniforme. Cependant la section peut être de forme et de constitution quelconque en termes de géométrie et de matériau(x). La forme peut ainsi être pleine ou cloisonnée, mince ou épaisse, ouverte ou fermée, symétrique ou non. Quant aux matériaux, de nature isotrope ou anisotrope, ils peuvent être librement agencés dans la section.



Pour les besoins des applications de ce livre, le module CSection sera utilisé de façon limitée aux sections isotropes.

CSection permet le calcul exact des caractéristiques de section ; on entend par « exact » le fait que ce programme met en œuvre la théorie de poutre de Saint-Venant (TPSV) qui constitue la référence absolue en tant que théorie de poutre se référant aux six efforts intérieurs classiques (un effort normal, deux efforts tranchants, deux moments de flexion et un moment de torsion) tels que classiquement enseignés dans les écoles d'ingénieurs (selon Bernoulli ou Timoshenko) . Le caractère « exact » vient de ce que la TPSV s'affranchit des hypothèses classiques des poutres telles que le mouvement rigide des sections ou l'hypothèse des sections minces pour déterminer précisément les distributions de cisaillement. Pour la TPSV, toutes les sections sont traitées de la même manière et elles sont libres de se déformer dans leur plan (effets Poisson) et hors de leur plan (gauchissement). Selon l'approche « ingénieur » de la théorie des poutres, CSection établit la relation linéaire entre les 6 efforts intérieurs  $[S]$  et les déformations associées  $[\varepsilon]$  :  $[S] = [[K]] \cdot [\varepsilon]$ . De cette relation, CSection déduit les caractéristiques de section utiles à l'ingénieur.

Au delà de ces caractéristiques de section, CSection permet aussi d'obtenir, pour toute combinaison des 6 efforts intérieurs, le champ des contraintes normales et de cisaillement dans la section. Enfin, même si cela ne constitue pas un résultat nécessaire à l'ingénieur, CSection fournit aussi les effets Poisson et les gauchissements de section que chacun des 6 efforts intérieurs engendre. Rappelons en effet que les calculs menés par CSection ne présupposent pas l'indéformabilité du plan de section droite contrairement aux hypothèses admises dans les théories communes.

Les calculs de CSection sont réalisés par application de la méthode des éléments finis sur la section ce qui nécessite de définir sa géométrie et de la mailler en éléments triangulaires. Cette étape est assurée par le générateur de maillage Gmsh (open source).

Aujourd'hui CSB trouve ses applications industrielles dans divers secteurs tels que l'automobile, l'aéronautique, le génie civil, l'énergie renouvelable.

### **Bibliographie résumée de Rached El Fatmi sur la théorie des poutres composites**

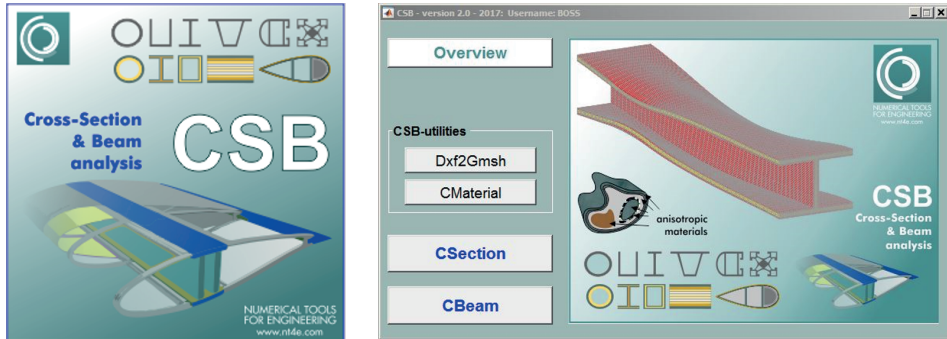
- *Thermo-mechanical analysis of composite beams*, 2017, M. Lahmar, F. Naccache, R. E.L. Fatmi.
- « A refined 1D beam theory built on 3D Saint-Venant's solution to compute homogeneous and composite beams », 2016, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, R. El Fatmi.
- « A novel tool for composite beam computations », 2013, *JEC Composites Magazine*, R. El Fatmi.



*Prof. El Fatmi*

Pour une description exhaustive de CSB se référer au site Internet <http://www.nt4e.com/>.

## Utilisation résumée de CSection



**FIGURE 1.** Menu principal de CSB avec ces trois modules CMaterial, CSection et CBeam. Dans le cadre de ce livre, le module CSection est utilisé en prenant des sections homogènes et un matériau isotrope homogène. Plusieurs exercices du chapitre « théorie des poutres » illustreront le module CBeam.

## Fonctionnalités

Selon l'approche « ingénieur » de la théorie des poutres, CSection établit la relation linéaire entre les 6 contraintes généralisées<sup>2</sup> et les déformations associées :

$$[S] = [[K]] \cdot [\varepsilon]$$

La matrice de comportement  $[[K]]$  est exprimée dans le système d'axes naturel de l'utilisateur qui peut différer du système d'axes principaux. C'est une des raisons pour lesquelles la matrice  $6 \times 6$  est « complète » (non-diagonale).

Une des fonctions de CSection est ainsi la détermination de la matrice de comportement qui peut ensuite être traduite en termes de caractéristiques :

- aire de section droite,
- inerties quadratiques,
- sections réduites,
- inertie de torsion.

CSection permet aussi la localisation des points singuliers de la section :

- centre d'inertie,
- centre de torsion,
- orientation des axes d'inertie.

Les contraintes généralisées étant données, CSection peut également établir :

- le champ des contraintes normales et de cisaillement,
- les variations dimensionnelles dues à l'effet Poisson,
- les effets de gauchissement.

<sup>2</sup>. On parle de « sollicitations » lorsque les contraintes généralisées sont projetées dans le système d'axes principal d'inertie.

## Étapes de calcul

1. Définir la géométrie d'une section. Pour cela, on utilise le mailleur externe Gmsh<sup>3</sup>. Il suffit d'écrire un script de description, de l'enregistrer (fichier d'extension .geo) puis de générer le maillage (fichier d'extension .msh) formé d'éléments triangulaires;
2. Définir un matériau grâce au module CMaterial à moins que celui-ci ne figure déjà au catalogue fourni avec le logiciel;
3. Importer le maillage dans CSection par la commande « Import mesh » du menu CSFile et définir un bloc composé d'un seul sous-domaine pour une section homogène;
4. Sélectionner le matériau de son choix dans la bibliothèque par la commande « open materials data » puis « select material » et l'associer au sous-domaine<sup>4</sup>;
5. CSB offre la possibilité de définir des « charges de distorsion » pour observer l'influence de la modalité d'application des forces exercées sur les profils minces. Nous n'emploierons pas cette option ici;
6. Enregistrer les données ainsi créées par la commande « Save » du menu CSFile;
7. Finalement « résoudre » la section par un simple clic de sorte à obtenir toutes les caractéristiques mécaniques de la section.

## Adaptation des conventions et notations

CSB est basé sur la convention nord-américaine pour la désignation des axes de la poutres (figure 2). Ainsi :

convention de ce livre	convention CSB
$\vec{x}$	$+\vec{z}$
$\vec{y}$	$+\vec{y}$
$\vec{z}$	$-\vec{x}$

## CBeam

À partir d'une section droite générée par Gmsh et caractérisée par CSection, CBeam permet la génération d'une poutre droite par extrusion (figure 3). On peut ensuite charger la poutre de façon ponctuelle, linéique et/ou surfacique en précisant les régions du contour qui sont exposées aux efforts. Naturellement, les conditions d'appui sont totalement paramétrables.

CBeam permet les calculs de la poutre (sollicitations, déplacements, déformations et contraintes) selon deux modèles :

3. Gmsh est un logiciel Open Source sous licence GPL utilisé pour le maillage bi ou tridimensionnel de problèmes de physique préalablement à leur traitement par la méthode des éléments finis – voir le site <http://Gmsh.info/>.

4. Pour les besoins académiques de cet ouvrage, nous avons créé un matériau de module de Young unitaire  $E = 1$ , de coefficient de Poisson nul et, donc, de module de cisaillement  $G = 0.5$ . Ce matériau est systématiquement utilisé dans les illustrations CSection des chapitres 4 et 5.

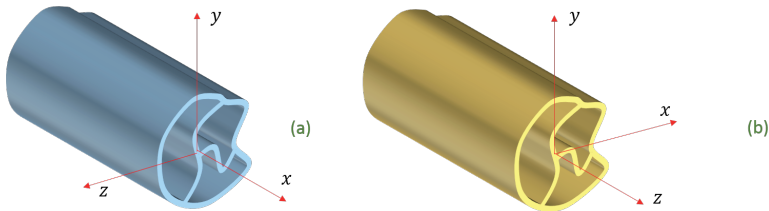


FIGURE 2. Système d'axes : (a) celui de ce livre d'exercices et (b) celui utilisé par le logiciel CSB.

1. SVBT : modèle de Saint-Venant natif;
2. RBT : modèle « Refined Beam Theory ». Ce dernier élargit le champ des possibles et des résultats grâce à la prise en compte de modes cinématiques riches dépendants de la forme de la section. On peut ainsi bloquer les déformations transversales dues à l'effet de Poisson et même bloquer les gauchissements. Le champ de contraintes au niveau des appuis est donc beaucoup plus réaliste. Qui plus est, on récupère également les composantes de contraintes hors plan de section droite  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{yz}$  que gomme la théorie native.

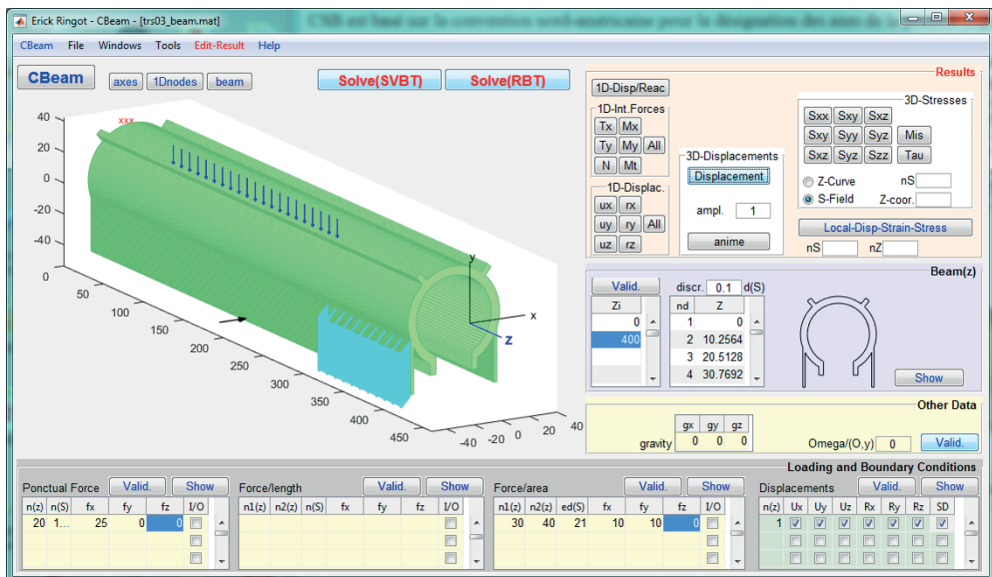


FIGURE 3. Page de saisie du module CBeam illustrant la possibilité de charger la surface d'une poutre par des forces ponctuelles, linéiques ou surfaciques.

## Chapitre 1

# Exercices de mécanique générale

### 1.1 L'essentiel

**Torseurs** Un torseur  $\{\mathcal{T}\}$  est formé d'une paire de champs vectoriels  $\{\vec{r}, \vec{m}\}_p$  tels que :

1. Le champ  $\vec{r}$  est uniforme sur l'espace affine (il est indépendant du point  $P \in \mathbb{R}^3$ );  $\vec{r}$  est appelé « résultante » du torseur  $\{\mathcal{T}\}$ .
2. Le champ  $\vec{m}$  vérifie la propriété de transport du moment :  $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{m}(Q) = \vec{m}(P) + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{r}$ ;  $\vec{m}(P)$  est appelé « moment » du torseur  $\{\mathcal{T}\}$  au point  $P$ . Le moment en  $P$  est aussi plus simplement noté  $\vec{m}_P$  :
  - la résultante  $\vec{r}$  constitue un « invariant » du torseur  $\{\mathcal{T}\}$  : elle ne dépend pas du point du plan affine où elle est évaluée;
  - la résultante  $\vec{r}$  et le moment  $\vec{m}_P$  sont appelés « éléments de réduction » du torseur  $\{\mathcal{T}\}$  au point  $P$  :

$$\{\mathcal{T}\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{r} \\ \vec{m}_P \end{array} \right\}_P$$

En mécanique, il est fait usage de différents torseurs parmi lesquels : le torseur cinématique caractérisant le champ de vitesse dans un solide indéformable, le torseur des forces, le torseur cinétique, le torseur dynamique.

**Équiprojectivité** La projection du moment  $\vec{m}_P$  sur la droite  $(\Gamma_{PQ})$  passant par  $P$  et  $Q$  est égale à la projection du moment  $\vec{m}_Q$  sur la même droite. C'est le théorème d'équiprojectivité du champ de moment d'un torseur :

$$\vec{m}_P \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{m}_Q \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Inversement, tout champ de vecteur équiprojectif est le champ de moment d'un torseur.

**Axe central et moment central** L'axe central d'un torseur est la droite  $(\Delta)$  de  $\mathbb{R}^3$  où le moment  $\vec{m}_P$  est colinéaire à  $\vec{r}$ .  $(\Delta) = \{P \in \mathbb{R}^3 / \vec{m}_P = \lambda \vec{r}\}$ . L'axe central est orienté par le vecteur résultante (si  $\vec{r} \neq \vec{0}$ ). Le facteur  $\lambda$  est uniforme le long de l'axe central; il est appelé « pas du torseur ». Si on pose  $\mathcal{A} = \vec{m}_P \cdot \vec{r}$  l'automoment – invariant – du torseur, alors on montre que :

$$\lambda = \frac{\mathcal{A}}{r^2}$$

### Torseurs particuliers

- Un couple est un torseur de résultante nulle.
- Un glisseur est un torseur de moment central nul.

**Action-réaction** Que ce soit en statique comme en dynamique, le torseur des forces de contact qu'exerce un solide ( $S_1$ ) sur un solide ( $S_2$ ) est opposé au torseur des forces de contact qu'exerce le solide ( $S_2$ ) sur le solide ( $S_1$ ).

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = -\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}$$

**Torseur cinématique - épure cinématique** Le champ de vitesse instantané d'un solide indéformable ( $S$ ) dans un repère  $\{R_0\}$  constitue le champ de moment d'un torseur appelé **torseur cinématique**  $\{\mathcal{C}\}$  ayant le vecteur vitesse de rotation pour résultante. Les éléments de réduction du torseur cinématique en un point  $A$  :

$$\{\mathcal{C}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \text{résultante} = \text{vecteur vitesse de rotation} = \vec{\Omega} \\ \text{moment} = \text{vecteur vitesse instantanée} = \vec{V}_A \end{array} \right\}_A$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP), on admet que le champ des petits déplacements d'un solide indéformable à partir d'une position instantanée donnée constitue également un torseur cinématique appelé torseur cinématique des petits déplacements.

Dans le cas des mouvements plans des solides indéformables, on introduit la construction graphique dite « transformation cinématique » suivante :

1. Partant du plan de situation  $\mathbb{R}^2$  d'axes  $x$  (axe « horizontal ») et  $y$  (axe « vertical ») dans lequel s'inscrit le mécanisme et les solides qui le composent.
2. On définit le plan cinématique  $\mathbb{P}$  d'axes  $u$  (vitesse « horizontale » // à  $x$ ) et  $v$  (vitesse « verticale » // à  $y$ ) dans lequel s'inscrivent les points images de  $\mathbb{R}^2$  par la transformation cinématique décrite au point suivant. Le centre  $o$  du repère cinématique constitue l'image de l'ensemble des points de vitesse nulle.
3. La transformation cinématique  $\mathcal{C}$  est une transformation de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{P}$  qui, à tout point  $P(x, y)$  de l'espace réel  $\mathbb{R}^2$ , associe le point  $p$  du plan cinématique tel que  $\vec{o\overline{p}} = \vec{V}_P$  :

$$\mathcal{C} : P \in \mathbb{R}^2 \longmapsto p \in \mathbb{P} \mid \vec{o\overline{p}} = \vec{V}_P$$

4. Pour tout couple de points  $A$  et  $B$  appartenant au même solide indéformable, la propriété mécanique d'équiprojectivité du torseur cinématique se traduit par une propriété géométrique dans le plan cinématique :

$$\vec{V}_A \cdot \vec{AB} = \vec{V}_B \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{AB} \perp \vec{ab}$$

Cette transformation permet la construction de l'épure cinématique d'un solide, mais plus souvent d'un ensemble de solides formant un mécanisme.

Il est souvent utile de procéder à la détermination de la vitesse de rotation d'un solide partant de la vitesse de deux points. La relation entre les vitesses de deux points du même solide plan est :

$$\vec{V}_B - \vec{V}_A = \vec{\Omega} \wedge \vec{AB} \quad \text{où} \quad \vec{\Omega} = \dot{\omega} \vec{z}$$

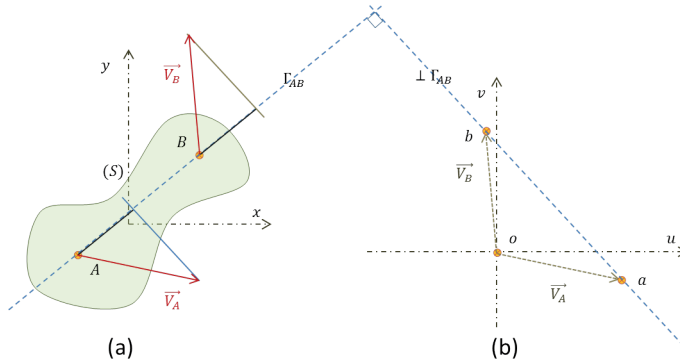


FIGURE 1.1. (a) Plan réel dit « de situation » et (b) plan cinématique. L'image d'un point  $P$  du solide  $(S)$  est le point  $p$  tel que  $\vec{op} = \vec{V}_P$ . L'équi-projectivité du champ de vitesse entre les points  $A$  et  $B$  se traduit par l'orthogonalité des droites  $(AB)$  et  $(ab)$ .

soit

$$\begin{cases} u_B - u_A = -\dot{\omega}(y_B - y_A) \\ v_B - v_A = +\dot{\omega}(x_B - x_A) \end{cases}$$

Il y a donc deux façons de calculer la vitesse de rotation :

$$\dot{\omega} = -\frac{\Delta u}{\Delta y}, \Delta y \neq 0 \quad \text{ou} \quad \dot{\omega} = +\frac{\Delta v}{\Delta x}, \Delta x \neq 0 \quad (1.1.1)$$

**Comoment, puissance** La puissance d'une distribution de forces  $\{\vec{f}\}$  agissant sur un solide  $(\Sigma)$  quelconque animé d'un champ de vitesse instantané  $\{\vec{v}\}$  s'exprime par :

$$\mathcal{P} = \int_{(\Sigma)} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Sigma$$

Dans le cas particulier d'un solide indéformable, la relation précédente peut être remplacée par le « comoment » du torseur de force et du torseur cinématique :

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{F}\} \otimes \{\mathcal{C}\} = \begin{matrix} \vec{R} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \vec{M}_A \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\Omega} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \vec{V}_A \end{matrix} = \vec{V}_A \cdot \vec{R} + \vec{\Omega} \cdot \vec{M}_A$$

C'est un invariant. Si le torseur de force est un glisseur passant par  $A$ , l'expression de  $\mathcal{P}$  se simplifie en :

$$\mathcal{P} = \vec{V}_A \cdot \vec{R}$$

## 1.2 Double produit vectoriel

LIM01 | Difficulté = 1

- Manipulation de produits vectoriels en coordonnées cartésiennes.
- Double produit vectoriel.
- Formule de Gibbs.

### 1.2.1 Énoncé

Démontrer la relation suivante (formule de Gibbs) :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} \quad (1.2.1)$$

Déduire une expression alternative à :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \quad (1.2.2)$$

### 1.2.2 Solution

On considère le plan  $(\Pi)$  formé par les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  supposés non colinéaires.

On considère la base orthogonale normée  $\{\vec{x}, \vec{y}\}$  telle que :

$$\vec{u} = u \vec{x} \quad \text{et} \quad \vec{v} = v_x \vec{x} + v_y \vec{y}$$

La normale unitaire au plan  $(\Pi)$  est :

$$\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$$

de sorte que la base  $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$  soit orthonormée directe. Le vecteur  $\vec{w}$  se projette sur ce système d'axes en :

$$\vec{w} = w_x \vec{x} + w_y \vec{y} + w_z \vec{z}$$

Calculons la première expression de l'égalité à démontrer :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = [u \vec{x} \wedge (v_x \vec{x} + v_y \vec{y})] \wedge (w_x \vec{x} + w_y \vec{y} + w_z \vec{z})$$

soit

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = [u v_y \vec{z}] \wedge (w_x \vec{x} + w_y \vec{y} + w_z \vec{z})$$

et encore

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = u v_y w_z \vec{y} - u v_y w_y \vec{x} \quad (1.2.3)$$

Calculons la seconde expression :

$$\begin{aligned} (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} &= [u \vec{x} \cdot (w_x \vec{x} + w_y \vec{y} + w_z \vec{z})] (v_x \vec{x} + v_y \vec{y}) \\ &\quad - [(v_x \vec{x} + v_y \vec{y}) \cdot (w_x \vec{x} + w_y \vec{y} + w_z \vec{z})] u \vec{x} \end{aligned}$$



c'est-à-dire

$$(\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} = u w_x (v_x \vec{x} + v_y \vec{y}) - (v_x w_x + v_y w_y) u \vec{x}$$

En simplifiant :

$$(\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} = u w_x v_y \vec{y} - v_y w_y u \vec{x} \quad (1.2.4)$$

Les expressions 1.2.3 et 1.2.4 sont égales, ce qui démontre la relation initiale 1.2.1.

Pour exprimer 1.2.2, on remarquera que :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u}$$

et que donc

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{u}) \vec{v}$$

Par conséquent :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

## 1.3 Théorème de Lagrange

LIM15 | Difficulté = 1

– Produit scalaire et produit vectoriel.

### 1.3.1 Énoncé

Démontrer la relation due à Lagrange :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \quad (1.3.1)$$

### 1.3.2 Solution

Soit  $\varphi$  l'angle que fait le vecteur  $\vec{v}$  par rapport au vecteur  $\vec{u}$  dans le plan  $(\Pi) = (\vec{u}, \vec{v})$ . Alors le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est égal au vecteur  $\vec{w}$  perpendiculaire au plan  $\Pi$  et tel que :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \varphi \vec{z} \quad (1.3.2)$$

où  $\vec{z}$  est un vecteur unitaire perpendiculaire à  $\Pi$ .

Par ailleurs, le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est égal au produit des modules des vecteur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils forment entre eux :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \varphi \quad (1.3.3)$$

Procédons à la combinaison d'équations (1.3.2)<sup>2</sup> + (1.3.3)<sup>2</sup>, alors :

$$(\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \varphi)^2 + (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \varphi)^2 = (\vec{u} \wedge \vec{v})^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Et donc :

$$\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u} \wedge \vec{v})^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Ce qui démontre la formule de Lagrange 1.3.1.

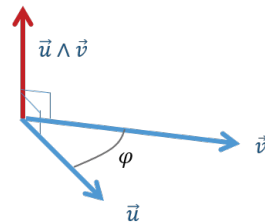


FIGURE 1.2. Vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  formant le plan  $(\Pi)$  et leur produit vectoriel.

## 1.4 Invariance par permutation circulaire du produit mixte

LIM14 | Difficulté = 2

- Produit scalaire et produit vectoriel.
- Interprétation géométrique du produit mixte.

### 1.4.1 Énoncé

On appelle produit mixte l'opération ternaire telle que :

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

Démontrer l'invariance par permutation circulaire :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) \quad (1.4.1)$$

### 1.4.2 Solution

**Invariance** Tout d'abord, considérons la situation où  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, alors le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est nul et le produit mixte également par voie de conséquence. Ensuite, le produit vectoriel  $\vec{v} \wedge \vec{w}$  est perpendiculaire à  $\vec{v}$  et donc à  $\vec{u}$  le produit scalaire  $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u}$  est donc nul. Selon le même raisonnement, le produit vectoriel  $\vec{w} \wedge \vec{u}$  est perpendiculaire à  $\vec{u}$  et donc à  $\vec{v}$  de sorte que le produit scalaire  $(\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$  est également nul. Finalement, on a démontré que :

$$\vec{v} = \lambda \vec{u} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

On peut ainsi énoncer la propriété du produit mixte :

**Propriété :** Le produit mixte de trois vecteurs dont deux quelconques sont colinéaires est nul.

Considérons maintenant le cas où  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires. Alors ils forment un plan ( $\Pi$ ) orthogonal au produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ . Tout vecteur  $\vec{w}$  se projette donc dans la base  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$  et s'écrit :

$$\vec{w} = a \vec{u} + b \vec{v} + c (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

Le premier produit mixte  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  prend alors pour expression :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot [a \vec{u} + b \vec{v} + c (\vec{u} \wedge \vec{v})] = c (\vec{u} \wedge \vec{v})^2$$

Le second produit mixte  $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$  prend pour expression :

$$(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{v} \wedge (a \vec{u} + b \vec{v} + c (\vec{u} \wedge \vec{v}))) \cdot \vec{u} = -(a (\vec{u} \wedge \vec{v}) + c (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u}$$

Utilisons la formule du double produit vectoriel (cf exercice 1.2 – identité 1.2.1) :  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v} - \vec{v}^2 \vec{u}$ , alors :

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) &= -c(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} \cdot \vec{u} \\ &= -c[(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v} - \vec{v}^2 \vec{u}] \cdot \vec{u} \\ &= c(\vec{u}^2 \vec{v}^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2) \end{aligned}$$

On reconnaît l'identité de Lagrange<sup>1</sup> :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \vec{v}^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Par conséquent :

$$(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = c(\vec{u} \wedge \vec{v})^2$$

Ce qui prouve bien que :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$$

On procéderait de même pour le troisième produit mixte.

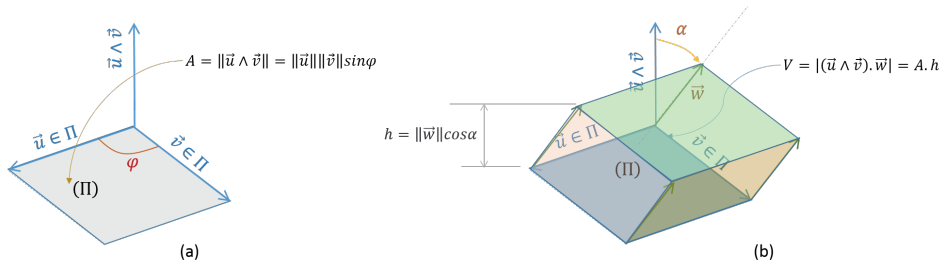


FIGURE 1.3. (a) Le produit vectoriel et (b) le produit mixte.

**Interprétation** Le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est un vecteur perpendiculaire au plan  $\Pi$  formé par les vecteurs opérands (ou le vecteur nul si ceux-ci sont colinéaires). Le module de ce vecteur est égal au produit des modules des vecteurs opérands multiplié par le sinus de l'angle qu'ils forment :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \varphi$$

Cette quantité n'est autre que l'aire du parallélogramme bâti sur les vecteurs opérands (figure 1.3-a) :

$$A = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

Le produit mixte  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$  est égal au produit scalaire de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  par  $\vec{w}$  dont la valeur absolue est égale à :

$$|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \overbrace{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}^A \overbrace{\|\vec{w}\| \cos \alpha}^h$$

1. Voir l'exercice 1.3.

or  $h = \|\vec{w}\| \cos \alpha$  est la hauteur du vecteur  $\vec{w}$  mesurée perpendiculairement au plan  $\Pi$  et  $V = A.h$  est le volume du parallélépipède bâti sur les trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ . Par conséquent :

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

**Propriété** La valeur absolue du produit mixte est égale au volume construit sur les trois vecteurs opérands.

## 1.5 Division vectorielle

LIM02 | Difficulté = 2

– Produit vectoriel et orthogonalité.

### 1.5.1 Énoncé

On considère la relation vectorielle :

$$\vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{B} \quad (1.5.1)$$

dans laquelle les vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont donnés et le vecteur  $\vec{X}$  est à déterminer.

Dire quelle est la condition de réalisation de cette relation et donner la famille des vecteurs  $\vec{X}$  solution de 1.5.1.

### 1.5.2 Solution

En premier lieu, la relation 1.5.1 nécessite que le vecteur  $\vec{B}$  soit perpendiculaire au vecteur  $\vec{A}$ , sinon il n'existe aucune solution. Cette condition nécessaire s'exprime par :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

En second lieu, appuyons-nous sur l'expression du double produit vectoriel (relation de Gibbs) selon laquelle :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$$

Post-multiplions la relation 1.5.1 par le vecteur  $\vec{A}$ . Alors :

$$(\vec{A} \wedge \vec{X}) \wedge \vec{A} = \vec{B} \wedge \vec{A}$$

soit

$$A^2 \vec{X} - (\vec{X} \cdot \vec{A}) \vec{A} = \vec{B} \wedge \vec{A}$$

Décomposons le vecteur  $\vec{X}$  en un vecteur parallèle à  $\vec{A}$  et un vecteur orthogonal :

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + \lambda \vec{A} \quad \text{avec} \quad \vec{X}_0 \cdot \vec{A} = 0$$

alors

$$A^2(\vec{X}_0 + \lambda \vec{A}) - ((\vec{X}_0 + \lambda \vec{A}) \cdot \vec{A}) \vec{A} = \vec{B} \wedge \vec{A}$$

donc

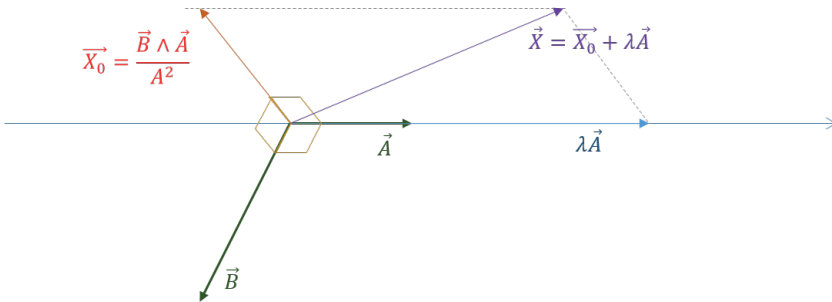
$$A^2(\vec{X}_0 + \lambda \vec{A}) - (\lambda A^2) \vec{A} = \vec{B} \wedge \vec{A}$$

et, par conséquent

$$\vec{X}_0 = \frac{\vec{B} \wedge \vec{A}}{A^2}$$

La solution de l'équation 1.5.1 est donc la famille de vecteurs :

$$\vec{X} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{A}}{A^2} + \lambda \vec{A}$$



**FIGURE 1.4.** Exercice 1.5 – Illustration du problème de la division vectorielle et construction de sa solution. En vert, les deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont connus et nécessairement orthogonaux. Le vecteur  $\vec{X}_0$  en rouge est une solution particulière de la division  $\vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{B}$  perpendiculaire au plan formé par le couple  $(\vec{A}, \vec{B})$ . En indigo, la solution générale obtenue en ajoutant à  $\vec{X}_0$  tout vecteur parallèle à  $\vec{A}$ .

## 1.6 Torseur formé par un ensemble de forces concentrées

LIM03 | Difficulté = 1

- Construction d'un torseur de forces.
- Extraction de ses éléments de réduction et de ses invariants

### 1.6.1 Énoncé

On considère un solide  $(S)$  sur lequel agissent  $N$  efforts concentrés  $\vec{F}_k$  appliqués aux points  $A_k$ . Soit un point  $O$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , quels sont les éléments de réduction du torseur formé par ces efforts? Quel est son axe central? Quelle est la valeur du moment central?

**Cas particulier** On considère le solide cubique de côté  $c$  bâti sur les axes cartésiens  $\{Oxyz\}$  soumis aux forces  $\vec{F}_A = F \vec{z}$  appliquées en  $A(c, 0, 0)$ ,  $\vec{F}_B = 2F \vec{x}$  appliquées en  $B(0, c, 0)$  et  $\vec{F}_C = -F \vec{y}$  appliquées en  $C(0, 0, c)$ . Quels en sont les éléments de réduction en  $O$ ? Quel est l'axe central? Quel est le moment central? Ce système de forces forme-t-il un glisseur?

### 1.6.2 Solution

**Résultante** Le torseur  $\{\mathcal{F}\}$  comporte deux éléments de réduction. La résultante est égale à la somme des vecteurs :

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k$$

**Moment** Le moment en  $O$  est quant à lui égal à :

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^N \vec{OA}_k \wedge \vec{F}_k$$

**Axe central** L'axe central  $(\Delta)$  du torseur  $\{\mathcal{F}\}$  est le lieu des points où le moment est colinéaire à la résultante. Par hypothèse, nous envisagerons le cas où la résultante est non nulle, sinon nous aurions affaire à un couple. Soit  $P$  un point de  $(\Delta)$ , alors, par définition :

$$\vec{M}_P \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

or

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O - \vec{OP} \wedge \vec{R}$$

et, donc

$$(\vec{M}_O - \vec{OP} \wedge \vec{R}) \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Compte tenu de la formule de Gibbs du double produit vectoriel (équation 1.2.1) :

$$\vec{M}_O \wedge \vec{R} = - \underbrace{(\vec{OP} \wedge \vec{R}) \wedge \vec{R}}_{\mu} + R^2 \vec{OP}$$

Ainsi :

$$\vec{OP} = \underbrace{\lambda}_{\mu/R^2} \vec{R} + \frac{\vec{M}_O \wedge \vec{R}}{R^2}$$

L'ensemble des points  $P$  est donc constitué d'une droite  $(\Delta)$  orientée par le vecteur  $\vec{R}$  : c'est l'axe central.

**Moment central** Le moment central est égal à :

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O - \vec{OP} \wedge \vec{R} = \vec{M}_O - \left( \lambda \vec{R} + \frac{\vec{M}_O \wedge \vec{R}}{R^2} \right) \wedge \vec{R}$$

Soit :

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \frac{1}{R^2} \left[ (\vec{M}_O \cdot \vec{R}) \vec{R} - R^2 \cdot \vec{M}_O \right]$$

En simplifiant :

$$\vec{M}_P = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R} = \mathcal{A} \vec{R}$$

où  $\mathcal{A}$  représente l'automoment. Le moment central est bien uniforme.

**Cas particulier** Calculons la résultante :

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = F(\vec{z}' + 2\vec{x}' - \vec{y}')$$

Calculons le moment en  $O$  :

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B + \vec{OC} \wedge \vec{F}_C$$

soit

$$\vec{M}_O = c \vec{x}' \wedge F \vec{z}' + c \vec{y}' \wedge 2F \vec{x}' + c \vec{z}' \wedge -F \vec{y}' = -cF(\vec{y}' + 2\vec{z}' + \vec{x}')$$

Automoment :

$$\mathcal{A} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 3cF^2$$

Moment central (uniforme le long de l'axe central) :

$$\vec{M}_P = \frac{\mathcal{A}}{R^2} \vec{R} = \frac{cF^2}{6F^2} F(2\vec{x}' - \vec{y}' + \vec{z}') = \frac{1}{6} cF(2\vec{x}' - \vec{y}' + \vec{z}')$$

Axe central :

$$\vec{OP} = \lambda \vec{R} + \frac{\vec{M}_O \wedge \vec{R}}{R^2} = \lambda \vec{R} + \frac{cF(\vec{y}' + 2\vec{z}' + \vec{x}') \wedge F(\vec{z}' + 2\vec{x}' - \vec{y}')}{6F^2}$$

soit

$$\vec{OP} = \lambda \vec{R} + \frac{c}{2}(\vec{x}' + \vec{y}' - \vec{z}')$$

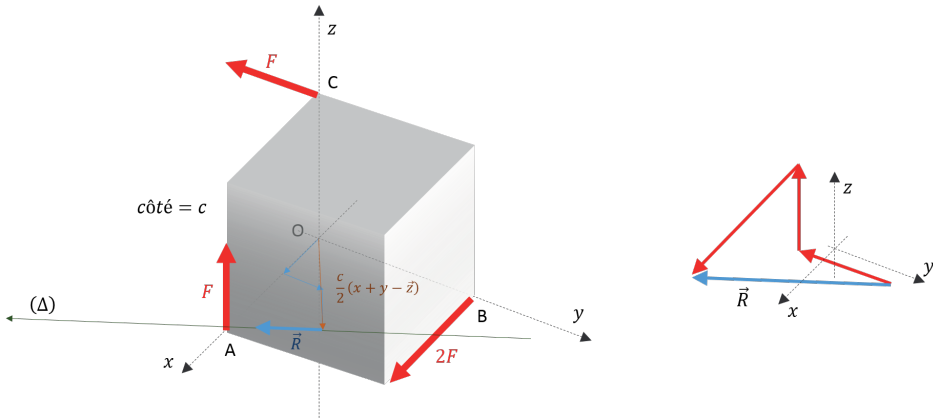


FIGURE 1.5. Illustration du torseur de trois forces et de son axe central. À droite, la construction de la résultante.

## 1.7 Tenseur antisymétrique et produit vectoriel

LIM06 | Difficulté = 1

– Équivalence entre un tenseur antisymétrique et un produit vectoriel.

### 1.7.1 Énoncé

Démontrer qu'appliquer un tenseur antisymétrique  $\overline{\overline{T}} = \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} \\ -t_{13} & -t_{23} & 0 \end{pmatrix}$  à un vecteur quelconque  $\vec{V}$  est équivalent à un produit vectoriel  $\overline{\overline{T}}\vec{V} = \vec{\Omega} \wedge \vec{V}$  et déterminer  $\vec{\Omega}$ .

### 1.7.2 Solution

Appliquons le tenseur au vecteur en posant  $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ , alors :

$$\overline{\overline{T}}\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} \\ -t_{13} & -t_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{12}v_2 + t_{13}v_3 \\ -t_{12}v_1 + t_{23}v_3 \\ -t_{13}v_1 - t_{23}v_2 \end{pmatrix} \quad (1.7.1)$$

Posons  $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$  et calculons  $\vec{\Omega} \wedge \vec{V}$  :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{pmatrix} \quad (1.7.2)$$



Identifions les formes 1.7.1 et 1.7.2 :

$$\begin{pmatrix} t_{12}v_2 + t_{13}v_3 \\ -t_{12}v_1 + t_{23}v_3 \\ -t_{13}v_1 - t_{23}v_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \omega_2v_3 - \omega_3v_2 \\ \omega_3v_1 - \omega_1v_3 \\ \omega_1v_2 - \omega_2v_1 \end{pmatrix} \quad \forall v_1, v_2, v_3$$

Il vient :

$$\omega_1 = -t_{23} \quad \omega_2 = t_{13}, \quad \omega_3 = -t_{12}$$

Par conséquent :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} -t_{23} \\ +t_{13} \\ -t_{12} \end{pmatrix}$$

## 1.8 Conditions pour qu'un torseur forme un glisseur

LIM07 | Difficulté = 1

– Torseur, glisseur.

### 1.8.1 Énoncé

Un torseur est donné par ses éléments de réduction en un point  $A$  :

$$\{\mathcal{T}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A$$

À quelles conditions un tel torseur peut-il être un glisseur? Caractériser ce dernier.

### 1.8.2 Solution

L'axe central  $\Delta$  est orienté par la résultante; par conséquent, si cette dernière est nulle, le torseur ne peut être un glisseur :

$$\text{condition 1} \quad \vec{R} \neq \vec{0}$$

Par définition, un glisseur est un torseur de moment central nul. Il existe donc un point  $G$  tel que  $\vec{M}_G = \vec{0}$ . Appliquons la relation de transfert de moment :

$$\vec{M}_G = \vec{M}_A + \vec{GA} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Par conséquent :

$$\vec{R} \wedge \vec{GA} = \vec{M}_A$$

où  $G$  est inconnu (point de l'axe central  $\Delta$ ).

1. Si le moment  $\vec{M}_A$  est nul, alors l'axe central passe par le point  $A$  et  $\vec{AG} = \lambda \vec{R}$  est la représentation paramétrique de  $\Delta$ .

2. Si le moment  $\vec{M}_A$  n'est pas nul, alors il est nécessairement orthogonal à  $\vec{R}$  et le vecteur  $\vec{G}\vec{A}$  est solution du problème de « division vectorielle » examinée lors de l'exercice 1.5.

$$\text{condition 2} \quad \vec{M}_A \cdot \vec{R} = 0$$

Par conséquent :

$$\vec{G}\vec{A} = \lambda \vec{R} + \frac{\vec{M}_A \wedge \vec{R}}{R^2}$$

## 1.9 Forces réparties sur un arc parabolique

LIM08 | Difficulté = 3

- Géométrie de la parabole.
- Force répartie.
- Projection.
- Intégrale curviligne.

### 1.9.1 Énoncé

On considère un arc parabolique  $\widehat{AB}$  de portée  $a$  de hauteur  $h$  dont la tangente est horizontale en  $B$  (figure 1.6). Tout point  $P$  de l'arc est repérable par son abscisse  $x$ , son ordonnée  $y$  ou son abscisse curviligne  $s$ .

On envisage quatre cas de charge :

1.  $\{\mathcal{F}_1\}$  force uniforme  $q_1$  agissant verticalement le long de l'arc (typiquement le poids propre) ;
2.  $\{\mathcal{F}_2\}$  force uniforme  $q_2$  agissant verticalement sur la projection horizontale de l'arc (typiquement une charge de neige) ;
3.  $\{\mathcal{F}_3\}$  force uniforme  $q_3$  agissant horizontalement le long de l'arc ;
4.  $\{\mathcal{F}_4\}$  force uniforme  $q_4$  agissant perpendiculairement à l'arc en tout point ;

### 1.9.2 Questions

1. En préambule, montrer que la dérivée de la fonction

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left[ x \sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]$$

est égale à

$$\Phi'(x) = \phi(x) = \sqrt{1+x^2}$$

2. Caractériser la géométrie de l'arc parabolique et exprimer l'élément de longueur de parabole  $ds$  à l'aide de la fonction  $\phi$ .
3. Pour chaque cas de charge, dans le cas particulier où  $a = 2h$ , déterminer le torseur par ses éléments de réduction. Caractériser le torseur en tant que glisseur.

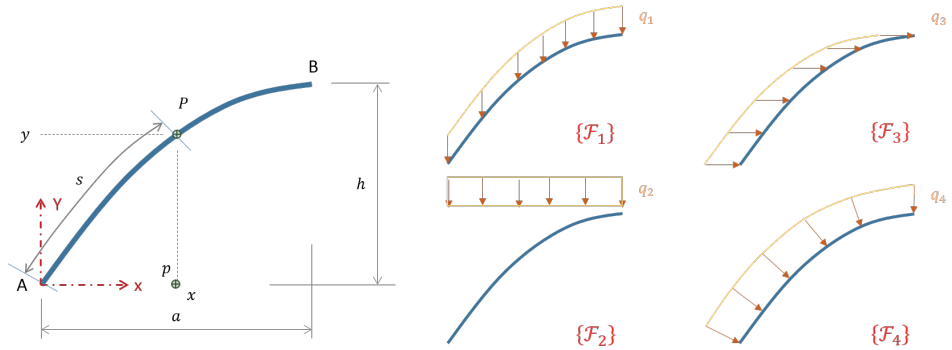


FIGURE 1.6. Arc parabolique et les quatre systèmes d'effort étudiés.

### 1.9.3 Solution

**Un peu de mathématiques** On remarquera tout d'abord que :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} [x\phi(x) + \ln(x + \phi(x))]$$

Suite à quoi :

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2} \left[ \phi(x) + x\phi'(x) + \frac{1 + \phi'(x)}{x + \phi(x)} \right]$$

De plus :

$$\phi'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\phi(x)}$$

Par conséquent :

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2} \left[ \phi(x) + \frac{x^2}{\phi(x)} + \frac{1 + \frac{x}{\phi(x)}}{x + \phi(x)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \phi(x) + \frac{x^2}{\phi(x)} + \frac{1}{\phi(x)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \phi(x) + \frac{1+x^2}{\phi(x)} \right]$$

Et donc :

$$\Phi'(x) = \phi(x)$$

**Géométrie de l'arc** Attachons le repère  $\{x, y\}$  cartésien à l'origine A de l'arc. Dans ce repère, l'équation de l'arc est :

$$y = h \frac{x}{a} \left( 2 - \frac{x}{a} \right)$$

et sa fonction dérivée

$$y' = \frac{2h}{a} \left( 1 - \frac{x}{a} \right)$$

L'élément de longueur d'arc  $ds$  est égal à :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{4h^2}{a^2} \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2} dx$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$ds = \phi(y'(x)) dx = \phi\left(\frac{2h}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right) dx \quad (1.9.1)$$

**Cas de charge**  $\{\mathcal{F}_1\}$  Sur chaque élément de longueur d'arc infinitésimal  $ds$  agit un effort  $df = q_1 ds$  agissant vers le bas (selon  $-\vec{y}$ ). Nous cherchons le torseur équivalent à la distribution des efforts  $df$ .

**Résultante** La résultante est simplement la somme vectorielle des efforts appliqués. Dans le cas présent, tous les efforts sont orientés vers  $-\vec{y}$  ; il en sera donc de même pour la résultante  $R_1$  de sorte que :

$$R_1 = \int_{\widehat{AB}} q_1 ds = q_1 \overbrace{\int_{\widehat{AB}} ds}^{\text{longueur de l'arc}}$$

La longueur de l'arc de parabole est ainsi égale à :

$$L = \int_{\widehat{AB}} ds = \int_{x=0}^a \phi\left(\frac{2h}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right) dx$$

Procédons à un premier changement de variable :

$$u = 1 - \frac{x}{a} \Rightarrow du = -\frac{dx}{a}$$

Alors :

$$L = \int_{u=1}^0 -\phi\left(\frac{2h}{a}u\right) a du = a \int_{u=0}^1 \phi\left(\frac{2h}{a}u\right) du$$

Puis à un second changement de variable :

$$t = \frac{2h}{a}u \Rightarrow dt = \frac{2h}{a} du$$

De sorte que :

$$L = \frac{a^2}{2h} \int_{t=0}^{\frac{2h}{a}} \phi(t) dt = \frac{a^2}{2h} [\Phi(t)]_0^{\frac{2h}{a}}$$

Dans le cas où  $a = 2h$  :

$$L = a(\Phi(1) - \Phi(0))$$

Or :

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= 0 \\ \Phi(1) &= \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] = 1,147794\end{aligned}$$

Donc :

$$L = 1,147794 a \quad (1.9.2)$$

La résultante de la force uniforme  $q_1$  est donc :

$$\vec{R}_1 = -1,147794 q_1 a \vec{y}$$

**Moment en B** Le moment élémentaire  $dm_B$  produit par la charge élémentaire  $df$  en  $B$  est égal à <sup>2</sup> :

$$dm_B = (a - x) df$$

Donc :

$$M_B = \int_{\widehat{AB}} dm_B = \int_{\widehat{AB}} (a - x) \cdot q_1 ds = q_1 a \int_{\widehat{AB}} \left(1 - \frac{x}{a}\right) ds$$

Par conséquent :

$$M_B = q_1 a \int_{x=0}^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \phi\left(\frac{2h}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right) dx$$

Posons :

$$t = \frac{2h}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) \Rightarrow dx = -\frac{a^2}{2h} dt$$

Procédons au changement de variable dans l'intégrale :

$$M_B = q_1 a \int_{t=\frac{2h}{a}}^0 \frac{a}{2h} t \cdot \phi(t) \times -\frac{a^2}{2h} dt = q_1 \frac{a^4}{4h^2} \int_{t=0}^{\frac{2h}{a}} t \cdot \phi(t) dt$$

On notera que :

$$x \phi(x) = x \sqrt{1 + x^2}$$

est une forme

$$u^\alpha du \quad \text{où } u = 1 + x^2 \quad \text{et } \alpha = \frac{1}{2}$$

dont la primitive est

$$\int u^\alpha du = \frac{u^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

---

2. Nous choisissons de calculer le moment en  $B$  plutôt qu'en  $A$  par commodité. En effet, le calcul fait apparaître un « bras de levier » égal à  $a - x$ , ce qui prépare le changement de variable qui suit.

Donc<sup>3</sup> :

$$\int x \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{1+x^2}^3 \quad (1.9.3)$$

Reprenons le calcul du moment :

$$M_B = q_1 \frac{a^4}{4h^2} \int_{t=0}^{\frac{2h}{a}} t \cdot \sqrt{1+t^2} dt = q_1 \frac{a^4}{4h^2} \left[ \frac{\sqrt{1+t^2}^3}{3} \right]_0^{\frac{2h}{a}}$$

Dans le cas où  $a = 2h$  :

$$M_B = \frac{q_1 a^2}{3} [\sqrt{8}-1] = 0,609457 q_1 a^2$$

Les éléments de réduction du torseur  $\{\mathcal{F}_1\}$  en  $B$  sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 = -1,147794 q_1 a \vec{y} \\ \vec{M}_B = +0,609457 q_1 a^2 \vec{z} \end{array} \right\}$$

Glisseur On cherche le point  $Q$  de l'arc où le moment du torseur est nul :

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_B + \vec{Q}B \wedge \vec{R}_1 = \vec{0} \Rightarrow x_B - x_Q = \frac{M_B}{R_1} = 0,53 a \Rightarrow x_Q = 0,47 a$$

L'équivalence entre la distribution des efforts  $q_1$  et son glisseur est illustrée en figure 1.7.

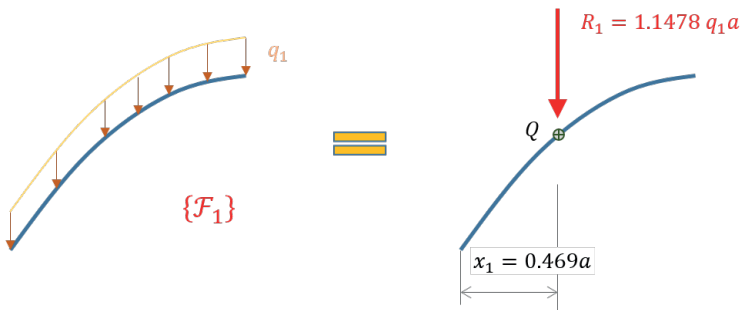


FIGURE 1.7. Chargement  $\{\mathcal{F}_1\}$  et le glisseur statiquement équivalent.

**Cas de charge  $\{\mathcal{F}_2\}$**  La charge agit sur la projection au sol de l'arc. Sur chaque élément de longueur infinitésimal  $dx$  agit un effort  $df = q_2 dx$  agissant vers le bas (selon  $-\vec{y}$ ).

3. De façon générale :  $(\phi^n)' = nx\phi^{n-2}$ .

**Résultante** La résultante est simplement la somme vectorielle des efforts appliqués le long de la projection de l'arc. Ainsi :

$$R_2 = \int_{\widehat{AB}} q_2 dx = q_2 \overbrace{\int_{\widehat{AB}} dx}^{\text{projection de l'arc}} = q_2 a$$

**Moment en A** Le moment élémentaire  $dm_A$  produit par la charge élémentaire  $df$  en A est égal à :

$$dm_A = -x df$$

Donc :

$$M_A = \int_{\widehat{AB}} dm_A = - \int_{\widehat{AB}} x \cdot q_2 dx = -q_2 \int_{x=0}^a x dx = -\frac{1}{2} q_2 a^2$$

Les éléments de réduction du torseur  $\{\mathcal{F}_2\}$  en A sont particulièrement simples à calculer et valent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_2 = -q_2 a \vec{y} \\ \vec{M}_A = -\frac{1}{2} q_2 a^2 \vec{z} \end{array} \right\}$$

**Glisseur** On cherche le point Q de l'arc où le moment du torseur est nul (figure 1.8) :

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_A + \vec{QA} \wedge \vec{R}_2 = \vec{0} \Rightarrow -x_Q = \frac{M_A}{R_2} = -\frac{1}{2} a \Rightarrow x_Q = \frac{a}{2}$$

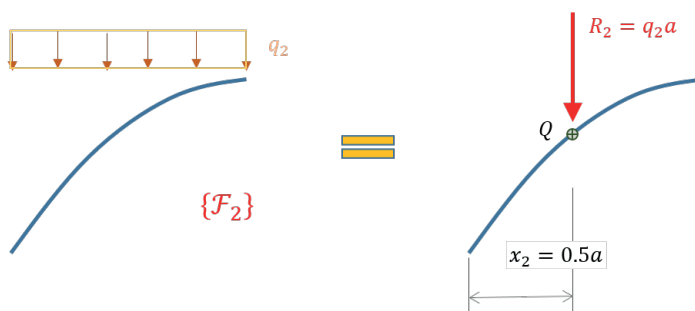


FIGURE 1.8. Chargement  $\{\mathcal{F}_2\}$  et le glisseur statiquement équivalent.

**Cas de charge  $\{\mathcal{F}_3\}$**  Sur chaque élément de longueur d'arc infinitésimal  $ds$  agit un effort  $df = q_3 ds$  agissant vers la droite (selon  $+\vec{x}$ ). Nous cherchons le torseur équivalent à la distribution des efforts  $df$ .

**Résultante** La résultante est la somme des efforts appliqués. Dans le cas présent, tous les efforts sont orientés vers  $+\vec{x}$ ; il en sera donc de même pour la résultante  $R_1$  de sorte que :

$$R_3 = \int_{\widehat{AB}} q_3 ds = q_3 \overbrace{\int_{\widehat{AB}} ds}^{\text{longueur de l'arc}} = q_3 L$$

La longueur de l'arc a déjà été calculée (expression 1.9.2) de sorte que :

$$\vec{R}_3 = +1,147794 q_3 a \vec{x}$$

**Moment en A** Le moment en A s'écrit :

$$M_A = - \int_{\widehat{AB}} y \cdot q_3 ds = -q_3 \int_{\widehat{AB}} y(x) \cdot \phi \left( \frac{2h}{a} \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \right) dx$$

Plutôt que de rechercher une solution analytique à ce calcul intégral, nous proposons le recours à un tableur électronique pour exécuter un calcul numérique approché (figure 1.9).

lim08 - arc parabolique					
paramètres		a=	1		
		h=	0.5		
		q=	1		
		dx=	0.02		
x	t	y	phi	x.phi	y.phi
0.00	1.00	0.0000	1.4142	0.0000	0.0000
0.02	0.98	0.0198	1.4001	0.0280	0.0277
0.04	0.96	0.0392	1.3862	0.0554	0.0543
0.06	0.94	0.0582	1.3724	0.0823	0.0799
0.08	0.92	0.0768	1.3588	0.1087	0.1044
0.96	0.04	0.4992	1.0008	0.9608	0.4996
0.98	0.02	0.4998	1.0002	0.9802	0.4999
1.00	0.00	0.5000	1.0000	1.0000	0.5000
			R	M1A	M3A
		SOMME	1.1478	0.5383	0.3638
			x1=	0.4690	
			y3=	0.3169	

**FIGURE 1.9.** Tableau de calcul des intégrales; seule une partie des lignes est représentée. Le domaine d'intégration est découpé en 50 tronçons. La colonne t correspond à la variable  $t = \frac{2h}{a} \left( 1 - \frac{x}{a} \right)$ . Pour la somme intégrale, on utilise l'approximation du trapèze :  $S = \left[ \sum_{k=2}^{N-1} v_k + \frac{1}{2} (v_1 + v_N) \right] dx$ . À noter que la somme de la colonne notée « phi » correspond bien à la solution analytique 1.9.2. La colonne « x.phi » permet le calcul du moment en A du cas de charge n° 1 et de l'abscisse  $x_1$ . La colonne « y.phi » permet le calcul du moment en A du cas de charge n° 3 et de l'ordonnée  $y_3$ .



Le calcul du moment  $M_A$  pour le cas de charge n° 3 donne :

$$M_A = -0,363770 q_3 a^2$$

Le vecteur glisseur de résultante  $R_3 = 1,1478 q_3 a$  est appliqué au point Q situé à l'ordonnée  $y_3$  telle que :

$$y_3 = -\frac{M_A}{R_3} = \frac{0,363770}{1,147794} a = 0,316924 a$$

À partir de laquelle on peut calculer l'abscisse  $x_3$  du point Q situé sur la parabole :

$$h \frac{x_3}{a} \left( 2 - \frac{x_3}{a} \right) = y_3 \Rightarrow \lambda(2 - \lambda) = \alpha \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{y_3}{h}$$

Donc :

$$\lambda^2 - 2\lambda + \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = 1 - \sqrt{1 - \alpha}$$

Dans le cas présent :

$$\alpha = \frac{y_3}{h} = \frac{0,316924 a}{0,5 a} = 0,633848 \Rightarrow \lambda = 0,394895 \Rightarrow x_3 = 0,394895 a$$

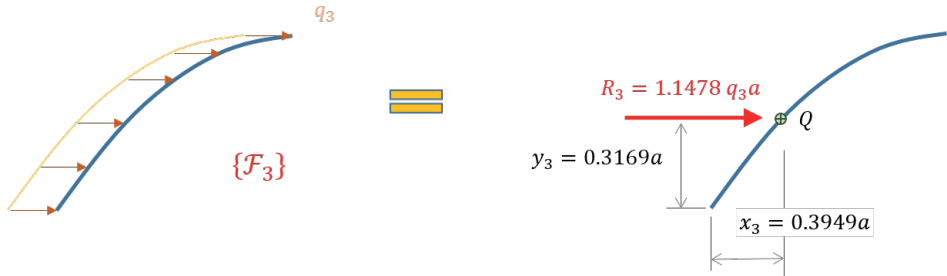


FIGURE 1.10. Chargement  $\{\mathcal{F}_3\}$  et le glisseur statiquement équivalent.

**Cas de charge  $\{\mathcal{F}_4\}$**  Dans ce cas de charge, l'effort  $q_4$  est appliqué transversalement à l'arc. Le calcul de la résultante nécessite de projeter les composantes du vecteur  $\vec{q}_4$  sur la verticale et l'horizontale (figure 1.11 à gauche). L'angle de contingence est noté  $\alpha$  et, par définition de la tangente :

$$\tan \alpha = y'(x)$$

Composante verticale Selon  $-\vec{y}$  :  $R_4^Y = \int_{\widehat{AB}} q_4 \cos \alpha \, ds$

Or :

$$dx = \cos \alpha \, ds$$

Par conséquent :

$$R_4^Y = q_4 \int_{\widehat{AB}} dx = q_4 a$$

Composante horizontale Selon  $\vec{x}$  :  $R_4^X = \int_{\widehat{AB}} q_4 \sin \alpha \, ds$

Or :

$$dy = \sin \alpha \, ds$$

Par conséquent :

$$R_4^X = q_4 \int_{\widehat{AB}} dy = q_4 h = \frac{1}{2} q_4 a$$

Moment en A Le moment en A s'écrit :

$$\vec{M}_A = \int_{\widehat{AB}} (x \vec{x} \wedge -q_4 \cos \alpha \vec{y} + y \vec{y} \wedge q_4 \sin \alpha \vec{x}) \, ds$$

Soit (selon  $\vec{z}$ ) :

$$M_A = -q_4 \int_{\widehat{AB}} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \, ds = -q_4 \left[ \int_{\widehat{AB}} x \, dx + \int_{\widehat{AB}} y \, dy \right] = -q_4 \left[ \frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{2} \right] = -\frac{5}{8} q_4 a^2$$

Le vecteur glisseur de résultante  $\vec{R}_4$  est appliqué au point Q de coordonnées  $(x_4, y_4 = y(x_4))$  tel que :

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_A - \vec{AQ} \wedge \vec{R}_4 = \vec{0}$$

Par conséquent :

$$M_A \vec{z} = (x_4 \vec{x} + y_4 \vec{y}) \wedge (R_4^X \vec{x} - R_4^Y \vec{y}) = (-x_4 R_4^Y - y_4 R_4^X) \vec{z} \Rightarrow M_A = -(x_4 R_4^Y + y_4 R_4^X)$$

Donc :

$$-M_A = a \frac{x_4}{a} R_4^Y + h \frac{x_4}{a} \left( 2 - \frac{x_4}{a} \right) R_4^X$$

Posons  $\lambda = \frac{x_4}{a}$  et tenons compte de ce que  $h = \frac{a}{2}$  :

$$\frac{5}{8} q_4 a^2 = a \lambda q_4 a + \frac{a}{2} \lambda (2 - \lambda) \frac{q_4 a}{2} \Rightarrow \frac{5}{8} = \lambda + \frac{1}{4} \lambda (2 - \lambda) \Rightarrow \lambda^2 - 2 \times 3 \lambda + \frac{5}{2} = 0$$

Discriminant réduit :

$$\delta = 3^2 - \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$$

Solution :

$$\lambda = 3 - \sqrt{\delta} = 0,450490$$

Ainsi :

$$x_4 = 0,450490 a \quad \text{et} \quad y_4 = \frac{a}{2} \lambda (2 - \lambda) = 0,349020 a$$

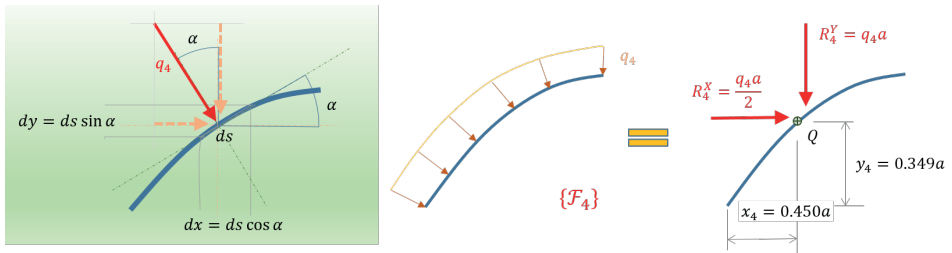


FIGURE 1.11. Chargement  $\{\mathcal{F}_4\}$  et le glisseur statiquement équivalent. Encadré vert : relation entre  $ds$ ,  $dx$ ,  $dy$  et projection de la densité d'effort  $q_4$  sur les axes vertical et horizontal.

## 1.10 Force transversale uniformément répartie sur un arc quelconque

LIM09 | Difficulté = 1

- Force répartie perpendiculairement à l'arc.
- Projections.
- Généralisation exercice 1.9.

### 1.10.1 Description

On considère un arc continu et continûment dérivable  $\widehat{AB}$  de forme quelconque. On pose  $a$  la distance horizontale entre les extrémités  $A$  et  $B$ , et  $b$  la distance verticale (figure 1.12). Un point  $P$  de l'arc est repérable par son abscisse  $x$ , son ordonnée  $y$  ou son abscisse curviligne  $s$ .

L'arc est soumis à une répartition uniforme de charge  $q$  qui lui est appliquée transversalement. En tout point, le vecteur  $\vec{q}$  est donc perpendiculaire à l'arc.

### 1.10.2 Questions

1. Calculer les éléments de réduction du torseur formé par la charge  $q$  en  $A$ .
2. Traiter l'exemple de l'arc circulaire intercepté par les rayons polaires inclinés par rapport à la verticale d'un angle  $-\frac{\pi}{3}$  à  $+\frac{\pi}{4}$ .

### 1.10.3 Solution

**Géométrie de l'arc** En coordonnées cartésiennes, l'arc peut être soit défini par une équation  $y = f(x)$ , soit – ce qui est plus général – par une représentation paramétrique :

$$\begin{aligned} x &= x(\lambda) \\ y &= y(\lambda) \end{aligned}$$

En tout point, l'élément de longueur d'arc  $ds$  est incliné de l'angle de contingence  $\alpha$  tel que :

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$$

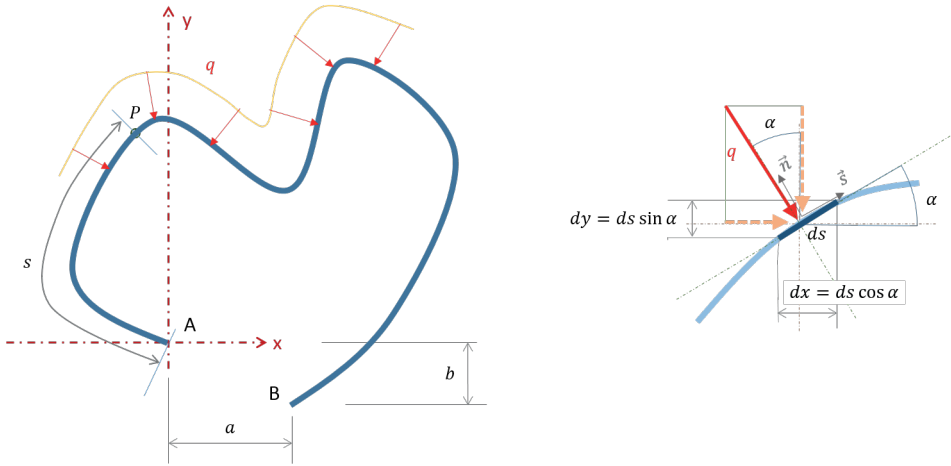


FIGURE 1.12. À gauche : arc quelconque et son chargement transversal. À droite : analyse locale de la géométrie.

Le vecteur  $\vec{ds}$  possède deux composantes selon  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  :

$$\vec{ds} = ds \vec{s} = dx \vec{x} + dy \vec{y} \quad \text{avec} \quad \vec{s} = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}$$

de sorte que

$$dx = ds \cos \alpha \quad \text{et} \quad dy = ds \sin \alpha$$

**Charge élémentaire** La force élémentaire agissant sur un élément infinitésimal d'arc est perpendiculaire à l'arc  $\vec{ds}$  et est égale à :

$$\vec{df} = -q ds \vec{n} \quad \text{où} \quad \vec{n} = -\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{y} \quad \vec{n} \perp \vec{s}$$

Par conséquent :

$$\vec{df} = q dy \vec{x} - q dx \vec{y}$$

### Résultante

La résultante est la somme vectorielle des efforts appliqués :

$$\vec{R} = \int_{\widehat{AB}} \vec{df} = q \left[ \vec{x} \int_{\widehat{AB}} dy - \vec{y} \int_{\widehat{AB}} dx \right]$$

Or :

$$\int_{\widehat{AB}} dy = y_B - y_A = b \quad \text{et} \quad \int_{\widehat{AB}} dx = x_B - x_A = a$$

Par conséquent :

$$\vec{R} = q (b \vec{x} - a \vec{y})$$

**Moment en A**

Le moment en A est égal à :

$$\vec{M}_A = \int_{\widehat{AB}} \vec{AP} \wedge d\vec{f} = -q \vec{z} \int_{\widehat{AB}} y dy + x dx$$

Soit :

$$M_A = -q \left[ \int_{x=x_A}^{x_B} x dx + \int_{y=y_A}^{y_B} y dy \right] = -\frac{q}{2} (a^2 + b^2)$$

**Glisseur** La charge répartie  $q$  forme le torseur  $\{\mathcal{Q}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A$  qui est un glisseur dont la résultante passe par le point  $K$  tel que  $\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_K = \vec{0} \end{array} \right\}_K$ .

Le point  $K$  est donc déterminé par la relation de transfert de moment :

$$\vec{M}_K = \vec{M}_A + \vec{KA} \wedge \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} \wedge \vec{KA} = \vec{M}_A \quad (1.10.1)$$

La recherche de  $K$  relève d'un problème de division vectorielle (exercice 1.5). Nous savons d'ores et déjà que  $K$  se trouve sur une droite. Il y a pluralité de solutions formant une droite parallèle à  $\vec{R}$  : raison pour laquelle on parle de « glisseur ». Dans le cas présent, nous cherchons la solution particulière où le point  $K$  est situé sur l'arc. Nous allons supposer que ce dernier est défini par une équation  $y = y(x)$ . Alors la relation 1.10.1 s'écrit :

$$\begin{aligned} -\frac{q}{2} (a^2 + b^2) \vec{z} &= q (b \vec{x} - a \vec{y}) \wedge [(x_A - x_K) \vec{x} + (y_A - y_K) \vec{y}] \\ \vec{z} &= q [b (y_A - y_K) + a (x_A - x_K)] \end{aligned}$$

Et, puisque  $y_K = y(x_K)$  :

$$\frac{1}{2} (a^2 + b^2) = b [y(x_K) - y_A] + a [x_K - x_A] \quad (1.10.2)$$

Ce qui constitue une équation en  $x_K$ . Selon la forme de l'arc, la résolution peut en être faite analytiquement ou numériquement.

**Exemple de l'arc circulaire** L'arc circulaire de rayon  $R$  est décrit par la figure 1.13 à gauche. Dans le système d'axes choisi, son équation est  $x^2 + y^2 = R^2$ .

Résultante

$$\vec{R} = \left( \begin{array}{c} \frac{qR}{2} (\sqrt{2}-1) \\ -\frac{qR}{2} (\sqrt{3}+\sqrt{2}) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} +0,2071 \\ -1,5731 \end{array} \right) qR$$

Moment en A

$$M_A = -\frac{qR^2}{2} \times \frac{1}{4} [(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - 1)^2] = -\frac{4 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} qR^2 = -1,2588 qR^2$$

Point de passage du glisseur

$$1,2588 R^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} R \left[ \sqrt{R^2 - x_K^2} - \frac{R}{2} \right] + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} R \left[ x_K + \frac{\sqrt{3}}{2} R \right]$$

En posant  $\lambda = \frac{x_K}{R}$  :

$$1,2588 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \left[ \sqrt{1-\lambda^2} - \frac{1}{2} \right] + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} \left[ \lambda + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

ou

$$\sqrt{1-\lambda^2} + 7,5957\lambda = 0 \Rightarrow 1 - \lambda^2 = 57,6947\lambda^2$$

dont la solution numérique est :

$$\lambda = -0,1305 \Rightarrow x_K = -0,1305 R \quad \text{et} \quad y_K = 0,9914 R$$

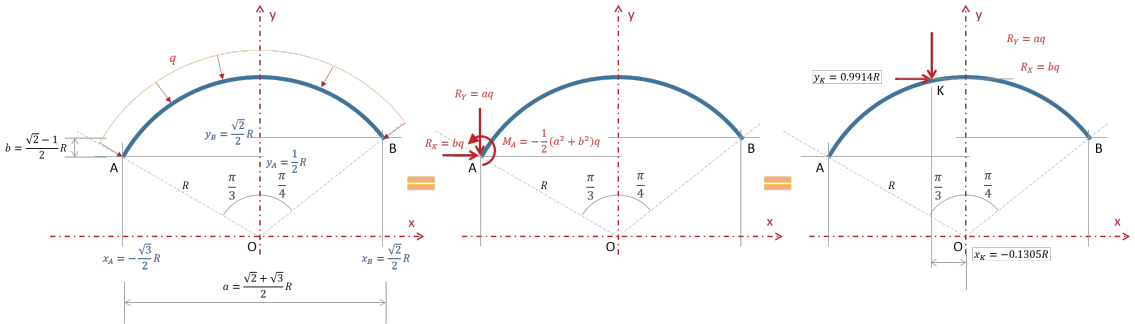


FIGURE 1.13. À gauche : arc circulaire asymétrique soumis à un chargement transversal. Au centre : éléments de réduction du torseur en A. À droite : glisseur équivalent.

## 1.11 Plaque demi-circulaire soumise à une densité variable de force surfacique

LIM10 | Difficulté = 1

- Force répartie perpendiculairement à une plaque demi-circulaire.
- Torseur de force, glisseur.

### 1.11.1 Description

On considère une plaque demi-circulaire ( $\Sigma$ ) de rayon  $R$  soumise à une répartition surfacique de force dont la densité varie linéairement avec la distance au centre de la plaque (figure 1.14) de sorte que  $\vec{q} = -q(r)\vec{z}$  avec  $q(r) = q_0 \left[ 1 - \frac{r}{R} \right]$  où  $q_0$  est la densité centrale. Tout point  $P$  de la plaque est repérable par ses coordonnées polaires  $\{r, \theta\}$ .

**1.11.2 Questions**

1. Calculer les éléments de réduction du torseur formé par la charge  $q$  en  $O$ .
2. Trouver le glisseur équivalent.

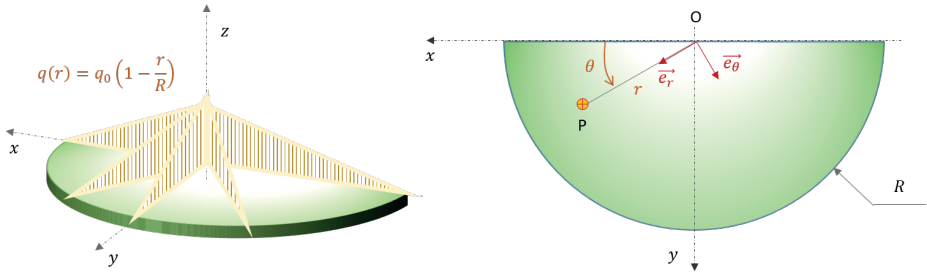


FIGURE 1.14. Plaque demi-circulaire soumise à une densité variable de force surfacique.

**1.11.3 Solution**

**Résultante** La résultante  $F$  agit selon  $-\vec{z}$  avec une intensité égale à :

$$F = \iint_{\Sigma} q(r) \, d\Sigma$$

Pour le calcul de cette intégrale double, on décompose la plaque en éléments d'aire  $d\Sigma = r \, dr \, d\theta$  :

$$F = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R q_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r \, dr \, d\theta$$

Puis, moyennant le changement de variable<sup>4</sup>  $r = Rt$  :

$$F = \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \times \int_{r=0}^R q_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r \, dr = \pi \times R^2 q_0 \int_{t=0}^1 (1-t)t \, dt = \frac{1}{6} \pi R^2 q_0$$

**Moment en O** Le moment en  $O$  se calcule selon la relation générale :

$$\vec{M}_O = \iint_{\Sigma} \vec{OP} \wedge \vec{q}(r) \, d\Sigma = \iint_{\Sigma} r \vec{e}_r \wedge -q(r) \vec{z} \, d\Sigma = \iint_{\Sigma} r q(r) \vec{e}_{\theta} \, d\Sigma$$

4. Dans le cas présent, l'intégrande est une fonction de  $r$  seul et les bornes de l'intégrale double sont des constantes. L'intégrale double se commue alors en simple produit de deux intégrales simples.

Le vecteur orthonormal  $\vec{e}_\theta$  se projette selon  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  :  $\vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{x} + \cos\theta \vec{y}$  de sorte que le moment comporte également deux composantes selon ses axes :

$$\vec{M}_O = -\vec{x} \underbrace{\iint_{\Sigma} r q(r) \sin\theta \, d\Sigma}_{M_X} + \vec{y} \underbrace{\iint_{\Sigma} r q(r) \cos\theta \, d\Sigma}_{M_Y}$$

Calculons chaque composante :

-  $M_X$

$$M_X = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R r q_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r \, dr \sin\theta \, d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_{r=0}^R q_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 \, dr$$

donc :

$$M_X = +2 \times q_0 R^3 \underbrace{\int_{t=0}^1 (1-t)t^2 \, dt}_{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}} = \frac{1}{6} R^3 q_0$$

-  $M_Y$

$$M_Y = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R r q_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r \, dr \cos\theta \, d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \underbrace{\cos\theta \, d\theta}_{[\sin\theta]_0^{\pi}=0} \int_{r=0}^R q_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 \, dr = 0$$

par conséquent

$$\vec{M}_O = -\frac{1}{6} R^3 q_0 \vec{x}$$

**Glisseur** Nous cherchons le point  $K$  de la plaque où le moment produit par la force surfacique est nul :

$$\vec{M}_K = \vec{M}_O + \vec{K}O \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -\frac{1}{6} R^3 q_0 \vec{x} = (x_K \vec{x} + y_K \vec{y}) \wedge -\frac{1}{6} \pi R^2 q_0 \vec{z}$$

Soit :

$$-R \vec{x} = (x_K \vec{x} + y_K \vec{y}) \wedge -\pi \vec{z} = \pi x_K \vec{y} - \pi y_K \vec{x}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} x_K &= 0 \\ y_K &= \frac{R}{\pi} \end{aligned}$$

La figure 1.15 illustre le glisseur de résultante  $\vec{F}$  passant par  $K$ .



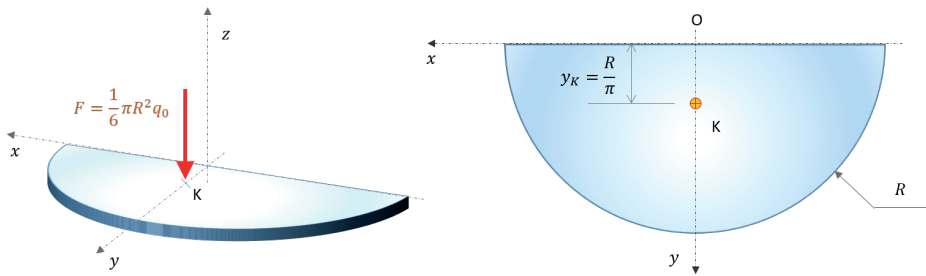


FIGURE 1.15. Illustration du glisseur statiquement équivalent à la distribution de charge surfacique.

## 1.12 Étude cinématique d'un pendule suspendu à quatre câbles

LIM05 | Difficulté = 2

– Exploitation des relations de la cinématique du solide indéformable.

### 1.12.1 Énoncé

On considère un pendule (figure 1.16) constitué d'une masse cylindrique suspendue à quatre câbles d'égale longueur de façon symétrique par rapport au plan diamétral vertical. Le déport latéral des points d'attache est noté  $c$  et la distance verticale entre les points d'attache au bâti et les ancrages au cylindre est notée  $b$ . La distance entre les deux ancrages est notée  $a$ .

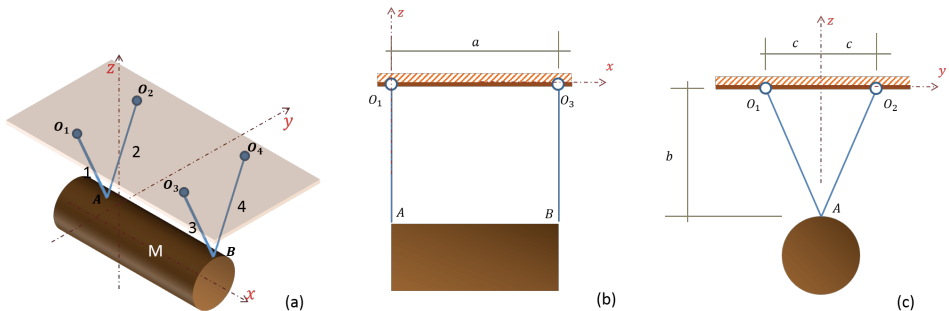


FIGURE 1.16. (a) Pendule de calibration d'accéléromètres; (b) vue latérale; (c) vue de bout.

Un tel pendule est utilisé en dynamique des structures pour calibrer des accéléromètres par application de la seconde loi de Newton (figure 1.17 à gauche). On frappe le solide pesant à l'aide d'un marteau instrumenté par un capteur de force dans le même temps qu'on enregistre l'accélération ainsi conférée. Le rapport  $F/\gamma$  est normalement égal à la masse  $M$  du mobile.

### Question

1. Combien de degrés de liberté le système mécanique formé par la masse et ses élingues présente-t-il?

### 1.12.2 Hypothèse

On supposera les élingues indéformables et se comportant comme des solides.

### 1.12.3 Solution

Le système mécanique est formé de cinq solides indéformables. Les quatre câbles sont réputés être liés d'une part au bâti, d'autre part au mobile par des liaisons rotule.

**Dénombrement des DDL** Déterminons les actions de liaison :

- le système comporte quatre nœuds de suspente amenant chacun trois actions de liaison en  $O_i$   $i \in 1 \dots 4$ ;
- chaque ancrage apporte également 3 actions de liaison;
- il y a donc  $n_i = 4 \times 3 \times 2 = 24$  inconnues de liaison.

Par ailleurs, l'équilibre dynamique de chaque solide est régi par six équations soit :  $n_e = 5 \times 6 = 30$  équations disponibles.

Le nombre d'équations est excédentaire par rapport au nombre d'inconnues :

$$h = n_e - n_i = 30 - 24 = 6$$

*A priori*, le système comporterait donc 6 degrés de liberté.

Il convient de soustraire la rotation propre des solides autour de leur axe qui est indifférente. Reste donc 1 seul degré de liberté.

**Caractérisation du DDL restant** Écrivons tour à tour les équations de transfert de moment cinématique entre les extrémités des solides.

1. Câble 1

$$\vec{V}_A = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{O_1A}$$

soit, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{1x} \\ \omega_{1y} \\ \omega_{1z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_{1y}b - \omega_{1z}c \\ \omega_{1x}b \\ \omega_{1x}c \end{pmatrix}$$

2. Câble 2

$$\vec{V}_A = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O_2A}$$

soit, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{2x} \\ \omega_{2y} \\ \omega_{2z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_{2y}b + \omega_{2z}c \\ \omega_{2x}b \\ -\omega_{2x}c \end{pmatrix}$$

3. Identification des deux vecteurs :

$$\begin{cases} u_A = -\omega_{1y}b - \omega_{1z}c = -\omega_{2y}b + \omega_{2z}c \\ v_A = \omega_{1x}b = \omega_{2x}b \\ w_A = \omega_{1x}c = -\omega_{2x}c \end{cases}$$

dont on déduit

$$\omega_{1x} = \omega_{2x} = 0$$

et donc

$$v_A = w_A = 0$$

4. On procède de même pour les câbles 3 et 4 de sorte que :

$$u_B = -\omega_{3y}b - \omega_{3z}c = -\omega_{4y}b + \omega_{4z}c$$

avec

$$\omega_{3x} = \omega_{4x} = 0$$

et

$$v_B = w_B = 0$$

5. On étudie finalement la masse  $M$  :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\Omega}_M \wedge \vec{AB}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} u_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_{Mx} \\ \Omega_{My} \\ \Omega_{Mz} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A \\ \Omega_{Mz}a \\ -\Omega_{My}a \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\Omega_{Mz} = \Omega_{My} = 0$$

et

$$u_B = u_A$$

Il reste donc neuf inconnues :

$$\omega_{1y}, \omega_{1z}, \omega_{2y}, \omega_{2z}, \omega_{3y}, \omega_{3z}, \omega_{4y}, \omega_{4z}, \Omega_{Mx}$$

entre lesquelles nous avons établi trois relations :

$$u_A = u_B \Rightarrow u_A = -\omega_{1y}b - \omega_{1z}c = -\omega_{2y}b + \omega_{2z}c = -\omega_{3y}b - \omega_{3z}c = -\omega_{4y}b + \omega_{4z}c \quad (1.12.1)$$

À noter que la rotation de la masse sur son axe n'intervient pas dans les calculs : elle est indifférente<sup>5</sup> et peut être prise égale à zéro.

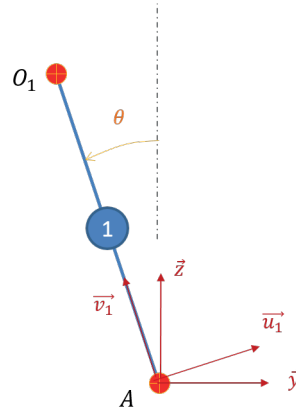
Si nous considérons le câble 1, par exemple, son vecteur rotation s'écrit :

$$\vec{\omega}_1 = \omega_{1y} \vec{y} + \omega_{1z} \vec{z}$$

que nous pouvons projeter dans un autre système d'axes formé par le vecteur directeur de  $AO_1$  et le vecteur perpendiculaire (figure 1.17) :

$$\vec{\omega}_1 = [\cos \theta \omega_{y1} + \sin \theta \omega_{z1}] \vec{u}_1 + [-\sin \theta \omega_{y1} + \cos \theta \omega_{z1}] \vec{v}_1$$

5. Cela n'aurait pas été le cas si les ancrages des câbles ne convergeaient pas au même nœud A ou B.



**FIGURE 1.17.** À droite : câble 1 et ses axes locaux. À gauche : pendule utilisé à l'université de Toulouse pour la calibration des accéléromètres © Christelle Tribout.

expression dans laquelle  $\theta$  représente l'angle d'inclinaison du câble.

La composante axiale du vecteur rotation est indifférente et peut, par exemple, être considérée comme nulle de sorte que :

$$\omega_{y1} = \frac{\omega_{z1}}{\tan \theta} = \omega_{z1} \frac{b}{c} \quad (1.12.2)$$

Reprenant ce raisonnement pour les câbles 2, 3, 4 on montrerait de même que :

$$\omega_{y3} = \frac{\omega_{z3}}{\tan \theta}, \quad \omega_{y2} = -\frac{\omega_{z2}}{\tan \theta}, \quad \omega_{y4} = -\frac{\omega_{z4}}{\tan \theta} \quad (1.12.3)$$

Au bilan, nous avons réduit le nombre de composantes de rotation à 8 et avons établi 3 + 4 relations (voir les relations 1.12.1, 1.12.2 et 1.12.3).

En fin de compte, il ne reste qu'une seule rotation indépendante en guise de degré de liberté.

**Conclusion** Le système formé par le pendule suspendu à quatre câbles est un mécanisme à 1 DDL à condition d'ignorer la rotation propre des solides autour de leur axe. La masse subit un mouvement de translation puisque  $\vec{V}_A = \vec{V}_B$  de sorte que deux points, au moins, ont le même vecteur vitesse instantané.

## 1.13 Série de mécanismes [1] – Détermination du nombre de degrés de liberté

LIM11 | Difficulté = 1

– Détermination du nombre de DDL dans des mécanismes.

### 1.13.1 Description

On considère les mécanismes de la figure 1.18. Ils sont formés de barres indéformables assemblées entre elles et avec l'environnement par diverses liaisons. Rappelons qu'un mécanisme est constitué par un ensemble de poutres dont l'équilibre sous l'effet d'actions extérieures ne peut être obtenu, dans une configuration géométrique donnée, que sous certaines conditions portant sur les actions extérieures.

### 1.13.2 Question

Pour chaque mécanisme, déterminer le nombre de degrés de liberté (DDL).

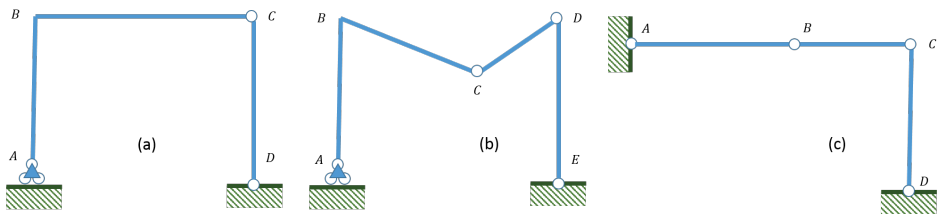


FIGURE 1.18. Série de trois mécanismes.

### 1.13.3 Solution

Pour chaque ensemble de solides, il convient de déterminer les inconnues amenées par les liaisons et de comptabiliser les équations de statique des solides.

#### Mécanisme (a)

Nœud	Type de liaison	Nb d'actions
A	Appui simple (sol)	1
B	Liaison rigide	3
C	Articulation	2
D	Articulation (sol)	2
	TOTAL	$n_i = 8$

Le mécanisme (a) comporte trois éléments rigides et l'équilibre de chacun d'eux est régi dans le plan par trois équations de statique. Le nombre d'équations disponibles est donc :

$$n_e = 3 \times 3 = 9$$

Il y a un excès d'équations de statique par rapport au nombre des inconnues de liaison. Il s'agit donc d'un mécanisme à  $N = n_e - n_i = 1$  degré de liberté. Cela signifie que le champ de vitesse instantanée dans la configuration initiale est complètement caractérisé par la donnée d'un paramètre scalaire. Ce dernier est par exemple la vitesse de translation horizontale du nœud  $C$  ou, alternativement, la vitesse de rotation de la barre  $[CD]$ .

### Mécanisme (b)

Nœud	Type de liaison	Nb d'actions
$A$	Appui simple (sol)	1
$B$	Liaison rigide	3
$C$	Articulation	2
$D$	Articulation	2
$E$	Articulation (sol)	2
	TOTAL	$n_i = 10$

Le mécanisme (b) comporte quatre éléments rigides. Le nombre d'équations disponibles est donc :

$$n_e = 4 \times 3 = 12$$

Il s'agit d'un mécanisme à  $N = n_e - n_i = 2$  degrés de liberté. Le champ de vitesse instantanée est caractérisé par la donnée de deux paramètres scalaires indépendants : par exemple, la vitesse de translation de l'appui  $A$  et la composante verticale de vitesse du nœud  $C$ .

### Mécanisme (c)

Nœud	Type de liaison	Nb d'actions
$A$	Articulation (bâti)	2
$B$	Articulation	2
$C$	Articulation	2
$D$	Articulation (sol)	2
	TOTAL	$n_i = 8$

Le mécanisme (c) comporte trois éléments rigides :

$$n_e = 3 \times 3 = 9$$

Il s'agit donc d'un mécanisme à  $N = n_e - n_i = 1$  degré de liberté.

## 1.14 Série de mécanismes [2] – Détermination du nombre de degrés de liberté

LIM12 | Difficulté = 2

- Suite de l'exercice 1.13.
- Détermination du nombre de DDL dans des mécanismes.
- Prise en compte des sous-ensembles en boucle.

### 1.14.1 Description

On considère les mécanismes de la figure 1.19. Attention aux pièges!

### 1.14.2 Question

Pour chaque mécanisme, déterminer le nombre de degrés de liberté (DDL).

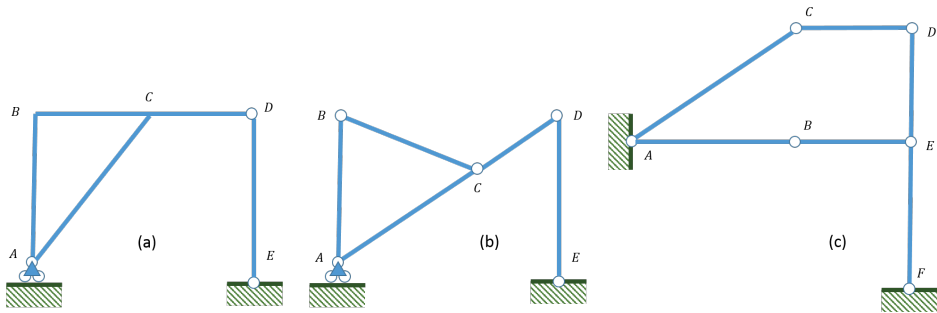


FIGURE 1.19. Série de trois mécanismes.

### 1.14.3 Solution

La méthode consistant à déterminer les inconnues amenées par les liaisons et de comptabiliser les équations de statique des solides peut échouer lorsque des sous-ensembles forment des boucles, comme c'est le cas dans les trois cas d'étude proposés. Il convient d'identifier et de dénombrer quels sont les sous-ensembles formant eux-mêmes un solide indéformable avant de procéder aux décomptes d'actions de liaison et d'équations d'équilibre.

**Statut d'une boucle** Les sous-ensembles formant une boucle doivent être isolés de leur contexte et étudiés séparément pour déterminer leur nature : soit solide, soit sous-mécanisme. Pour cela, on suit le raisonnement suivant :

1. dénombrer le nombre  $b$  de barres composant la boucle ;
2. dénombrer les inconnues de liaison à la jonction des barres :  $n_i$  ;
3. déduire les trois degrés de mobilité d'un solide plan livré à lui-même (deux translations et une rotation d'ensemble) ;
4. Calculer la différence entre le nombre des équations et le nombre d'inconnues corrigé des trois mobilités :

$$m = 3b - n_i - 3$$

5. Statuer sur la nature de la boucle :

$$\begin{cases} m > 0 \Rightarrow \text{mécanisme} \\ m \leq 0 \Rightarrow \text{solide} \end{cases}$$

6. Procéder à une substitution conditionnelle :

si la boucle est un solide  $\Rightarrow$  la remplacer par une barre

### Statut d'un assemblage complet

1. examiner si l'assemblage comporte des boucles ; si oui, les traiter selon le paragraphe précédent ;
2. après élimination de toutes les boucles constituant des solides, procéder au décompte usuel.

**Mécanisme (a)** Si on effectue un décompte brut :

Nœud	Type de liaison	Nb d'actions
A	Liaison mixte : appui simple (sol) + articulation	3
B	Liaison rigide	3
C	Liaison rigide 3 barres	6
D	Articulation	2
E	Articulation (sol)	2
	TOTAL	$n_i = 16$

Le mécanisme (a) comporte cinq éléments rigides et l'équilibre de chacun d'eux est régi dans le plan par 3 équations de statique. Le nombre d'équations disponibles est donc :

$$n_e = 5 \times 3 = 15$$

Il semble donc qu'il y ait un déficit d'une équation et que l'assemblage soit hyperstatique. Il n'en est rien : la méthode précédente est biaisée du fait de l'existence de la « boucle » formée par  $\{ABC\}$  qui ne constitue qu'un seul solide.

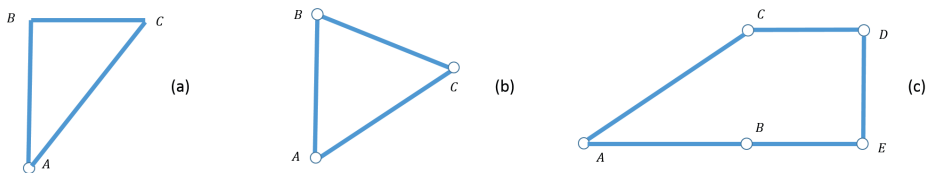
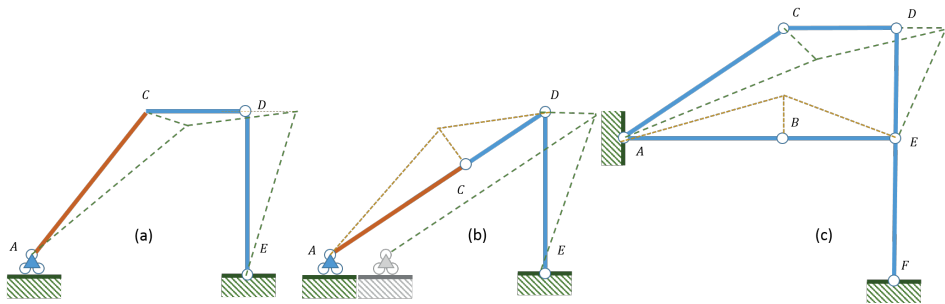


FIGURE 1.20. Boucles extraites des assemblages a, b et c de la figure 1.19.

En effet, cette boucle, si on la considère seule (figure 1.20-a), c'est-à-dire isolée de son contexte, comporte trois barres dont l'équilibre est régi par  $3b = 3 \times 3 = 9$  équations liées par des connexions apportant  $n_i = 3 + 3 + 2 = 8$  inconnues de liaison. Le statut de cette boucle est donné par évaluation de la quantité  $m = 3b - n_i - 3 = 9 - 8 - 3 = -2 < 0$  qui est négative : cette boucle forme un solide indéformable<sup>6</sup>. Elle est donc remplacée par une seule barre comme le montre la figure 1.21-a.

6. En fait, si deux solides sont rigidement liés par au moins une liaison rigide, alors ils forment, ensemble, un solide indéformable.





**FIGURE 1.21.** Mécanismes *a*, *b* et *c* transformés. En rouge-orangé apparaissent les barres de substitution. Le mécanisme *c* n'a pas été transformé car la boucle interne ne constitue pas un solide indéformable. La ligne pointillée est une représentation du champ de vitesse instantanée. Les mécanismes *b* et *c* comportent une pluralité de champs de vitesse possibles différenciés par la couleur et le type de pointillé : en jaune les mécanismes de poutre et en vert les mécanismes de panneau.

À partir du mécanisme simplifié, on reprend le décompte :

Nœud	Type de liaison	Nb d'actions
A	Liaison mixte : appui simple (sol) + articulation	3
C	Liaison rigide 2 barres	3
D	Articulation	2
E	Articulation (sol)	2
	TOTAL	$n_i = 10$

Et ce mécanisme simplifié ne comporte plus que trois barres apportant  $3 \times 3 = 9$  équations. C'est donc un mécanisme à 1 DDL du type « mécanisme de panneau ».

**Mécanisme (b)** Le mécanisme (b) de la figure 1.19 comporte une boucle  $\{ABC\}$  qui est extraite selon la figure 1.20-b. Cette boucle est analysée comme suit :

- nombre de barres :  $b = 3$ ;
- nombre d'inconnues de liaison :  $n_i = 2 + 2 + 2 = 6$ ;
- indicateur :  $m = 3b - n_i - 3 = 0$  – la boucle forme un solide.

Cette boucle est donc remplacée par une barre unique selon la figure 1.21-b et on procède au décompte des inconnues de liaison et des équations disponibles :

Nœud	Type de liaison	Nb d'actions
A	Appui simple (sol)	1
C	Articulation	2
D	Articulation	2
E	Articulation (sol)	2
	TOTAL	$n_i = 7$

Le mécanisme (b) comporte trois éléments rigides. Le nombre d'équations disponibles est donc :

$$n_e = 3 \times 3 = 9$$

Il s'agit d'un mécanisme à  $N = n_e - n_i = 2$  degrés de liberté. Le champ de vitesse instantanée est caractérisé par la donnée de deux paramètres scalaires indépendants : par exemple, la vitesse de translation de l'appui  $A$  et la composante verticale de vitesse du nœud  $C$ . Les champs de vitesse correspondants sont dessinés sur la figure 1.21-c.

**Mécanisme (c)** Le mécanisme (c) de la figure 1.19 comporte une boucle  $\{ABEDC\}$  qui est isolée sur la figure 1.20-b. Son analyse donne :

- nombre de barres :  $b = 5$ ;
- nombre d'inconnues de liaison :  $n_i = 5 \times 2 = 10$  (cinq articulations);
- indicateur :  $m = 3b - n_i - 3 = 2 > 0$ ; c'est un mécanisme. Il n'y a pas substitution.

On procède au décompte sur l'assemblage entier :

Nœud	Type de liaison	Nb d'actions
$A$	Articulation 2 barres (bâti)	4
$B$	Articulation	2
$C$	Articulation	2
$D$	Articulation	2
$E$	Articulation 3 barres	4
$F$	Articulation (sol)	2
	TOTAL	$n_i = 16$

Le mécanisme (c) comporte six éléments rigides :

$$n_e = 6 \times 3 = 18$$

Il s'agit donc d'un mécanisme à  $N = n_e - n_i = 18 - 16 = 2$  degrés de liberté. Les champs de vitesse élémentaires sont représentés sur la figure 1.21-c.

## 1.15 Paramétrage d'une rotation dans un mécanisme à 1 DDL

LIM18 | Difficulté = 2

- Cinématique d'un mécanisme.
- Choix d'une rotation en tant que paramètre cinématique.

### 1.15.1 Description

On considère le mécanisme bi-étagé ( $K$ ) de la figure 1.22 formé par un assemblage de barres indéformables, le jambage  $[DEF]$  étant constitué d'une seule pièce rigide. L'étude porte sur le champ de vitesse de ce mécanisme.

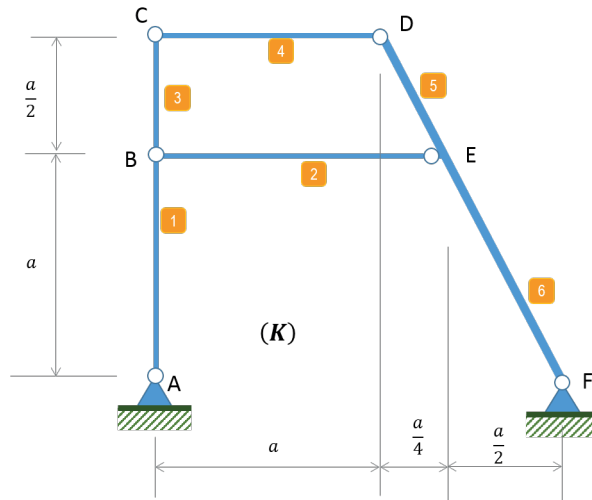


FIGURE 1.22. Mécanisme bi-étagé (K) dont le jambage DEF est d'un seul tenant.

### 1.15.2 Questions

1. Combien de degrés de liberté le mécanisme comporte-t-il?
2. Établir le champ de vitesse  $\{v\}$ .

### 1.15.3 Solution

**Nombre de degrés de liberté** On effectue le décompte global :

Nœud	Nature	Inconnues de liaison	Cumul
A, F	Articulation sol	$2 \times 2$	4
B	Articulation 3 barres	4	4
C, D	Articulation 2 barres	$2 \times 2$	4
E	Liaison mixte 3 barres	5	5
		TOTAL	$n_i = 17$

Le mécanisme comporte  $b = 6$  barres dont l'équilibre est décrit par  $n_e = 6 \times 3 = 18$  équations. Il y a donc un excès de 1 équation d'équilibre :  $n_e - n_i = +1$ . C'est que le mécanisme possède 1 degré de liberté.

**Champ de vitesse  $\{v\}$**  Comme le mécanisme comporte 1 seul DDL, nous sommes fondés à choisir un paramètre de position. Envisageons différents choix en commençant par le plus judicieux.

Choix de la vitesse de rotation du jambage  $\omega_{56}$  On fixe le paramètre cinématique scalaire  $\omega_{56} = -1$ . Nous prenons une quantité négative par commodité de sorte que

les vitesses horizontales subséquentes soient positives. La construction de l'épure cinématique correspondante et la représentation du champ de vitesse sont illustrées par la figure 1.23.

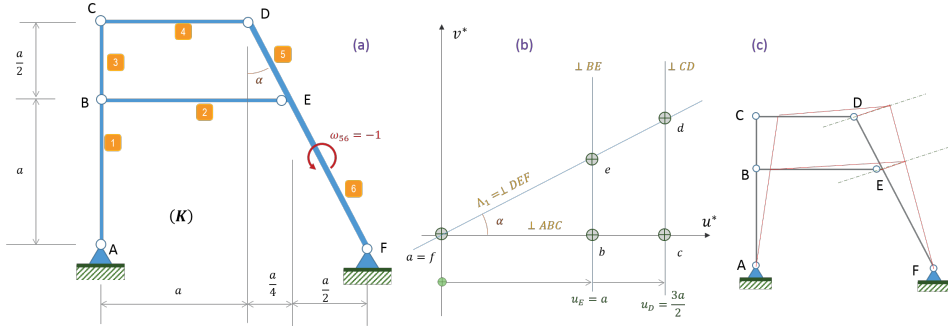


FIGURE 1.23. Champ de vitesse  $\{v_1\}$  du mécanisme (K) : (a) choix du paramètre : ici une vitesse de rotation ; (b) épure cinématique ; (c) représentation du champ de vitesse instantanée  $\{v_1\}$ .

L'épure est construite selon le raisonnement suivant :

1. on trace les axes  $\{uv\}$  ;
2. on positionne l'image des nœuds fixes, ici  $a$  et  $f$ , au centre du repère cinématique ;
3. on trace la perpendiculaire  $\Lambda_1$  à  $DEF$  issue de  $f$  : c'est le lieu possible des images  $e$  et  $d$  (car les nœuds  $E$  et  $D$  appartiennent au même solide) ;
4. on calcule la vitesse horizontale du nœud  $E$  grâce à la donnée de la vitesse de rotation du jambage :

$$\omega_{56} = -\frac{\Delta u}{\Delta y} \Rightarrow -\frac{u_E - u_F}{a} = -1 \Rightarrow u_E = +a$$

ce qui permet de positionner l'image  $e$  sur la droite  $\Lambda_1$ . Sa vitesse verticale est égale à :  $v_E = a \cdot \tan \alpha = +\frac{a}{2}$  ;

5. on procède de même pour la vitesse horizontale du nœud  $D$  :

$$\omega_{56} = -\frac{\Delta u}{\Delta y} \Rightarrow -\frac{u_D - u_F}{\frac{3a}{2}} = -1 \Rightarrow u_D = +\frac{3a}{2}$$

ce qui permet de positionner l'image  $d$  sur la même droite  $\Lambda_1$ . Sa vitesse verticale est égale à :  $v_D = \frac{3a}{2} \cdot \tan \alpha = +\frac{3a}{4}$  ;

6. on trace la perpendiculaire à  $BE$  issue de  $E$  : c'est le lieu possible des images  $b$ . On trace également la perpendiculaire à  $AB$  issue de  $a$ . Le point  $b$  est alors totalement défini comme l'intersection des droites ainsi tracées. Il se trouve sur l'axe  $u$  et  $u_B = u_E = +a$  ;

7. on trace la perpendiculaire à  $CD$  issue de  $D$  : c'est le lieu possible des images  $c$ . On trace également la perpendiculaire à  $BC$  issue de  $b$ . Le point  $c$  est alors totalement défini comme l'intersection des droites ainsi tracées. Il se trouve sur l'axe  $u$  et  $u_C = u_D = +\frac{3a}{2}$ ;

Les vitesses des nœuds sont tabulées comme suit :

Nœud	$u$	$v$	Nœud	$u$	$v$	Nœud	$u$	$v$
$A$	0	0	$B$	$a$	0	$C$	$\frac{3a}{2}$	0
$D$	$\frac{3a}{2}$	$\frac{3a}{4}$	$E$	$a$	$\frac{1}{2}$	$F$	0	0

On peut ensuite calculer les rotations des barres :

- barre [1] =  $[AB]$  :

$$\omega_1 = -\frac{u_B - u_A}{y_B - y_A} = -\frac{a - 0}{a - 0} = -1$$

- barre [2] =  $[BE]$  :

$$\omega_2 = +\frac{v_E - v_B}{x_E - x_B} = +\frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{5a}{4} - 0} = +\frac{2}{5}$$

- barre [3] =  $[BC]$  :

$$\omega_3 = -\frac{u_C - u_B}{y_C - y_B} = -\frac{\frac{3a}{2} - a}{\frac{3a}{2} - a} = -1$$

- barre [4] =  $[CD]$  :

$$\omega_4 = +\frac{v_D - v_C}{x_D - x_C} = +\frac{\frac{3a}{4} - 0}{a - 0} = +\frac{3}{4}$$

- barre [56] =  $[DEF]$  (paramètre choisi) :

$$\omega_{56} = -1$$

Autre choix de paramètre L'épure cinématique sera la même que précédemment à un facteur multiplicatif près.

Choisissons une composante de vitesse de translation :  $u_B = 1$ . Nous allons voir que la construction de l'épure cinématique exigera une étape de calcul.

1. tracé des axes et positionnement des points images  $a$  et  $f$  ;
2. positionnement du point  $b$  sur l'axe  $u$  à une distance unitaire de  $a$  : en effet, l'axe  $u$  est perpendiculaire à la direction  $[AB]$  ;
3. tracé de la perpendiculaire à  $BE$  issue de  $b$  : c'est une droite parallèle à l'axe  $v$  ;
4. tracé de la perpendiculaire à  $EF$  issue de  $f$  ;

5. le point image  $e$  est situé à l'intersection des deux droites précédentes, donc

$$u_E = 1 \text{ et } v_E = \tan \alpha = \frac{1}{2};$$

6. on ne peut plus progresser dans la construction graphique sauf à connaître l'un des points images  $c$  ou  $d$ . Comme  $D$  appartient au solide  $[DEF]$  dont le champ de vitesse est connu (puisque l'on connaît la vitesse en  $F$  et en  $E$ ), il est possible de positionner le point  $d$ . Le champ de vitesse sur un solide rectiligne est linéaire donc :

$$\frac{u_D - u_F}{y_D - y_F} = \frac{u_E - u_F}{y_E - y_F} \Rightarrow u_D = \frac{y_D}{y_E} \cdot u_E = \frac{3}{2}$$

7. le point  $d$  est situé sur la droite  $[ae]$  à l'abscisse  $u_D = \frac{3}{2}$ . Il est donc connu et

$$\text{son ordonnée vaut : } v_D = u_D \tan \alpha = \frac{3}{4};$$

8. finalement, le point  $c$  est situé à l'intersection des droites perpendiculaires à  $[BC]$  issue de  $b$  et à  $[CD]$  issue de  $d$ .

Les rotations se calculent comme précédemment.

**Conclusion** Quel que soit le choix du paramètre cinématique, les champs de vitesse obtenus sont superposables à un facteur près. Ici, nous avons choisi d'abord une rotation, aussi les vitesses s'exprimaient-elles en termes de longueur. Dans un second temps, nous avons fixé arbitrairement une composante de vitesse et toutes les autres vitesses s'exprimaient dans cette unité. Il convient de ne pas attacher d'importance à ce facteur multiplicatif en se souvenant que, dans les applications concrètes, le champ de vitesse est un élément de calcul dans l'expression des puissances virtuelles. Le facteur multiplicatif disparaît alors des équations.

## 1.16 Mécanisme en portique à cinq articulations

LIM19 | Difficulté = 2

– Cinématique d'un mécanisme à 2 DDL.

### 1.16.1 Description

On considère le mécanisme ( $K$ ) de la figure 1.24 formé par un assemblage de quatre barres indéformables formant un portique à traverse brisée. L'étude porte sur le champ de vitesse de ce mécanisme.

### 1.16.2 Questions

1. Combien de degrés de liberté le mécanisme comporte-t-il?
2. Établir le champ de vitesse  $\{v\}$ .

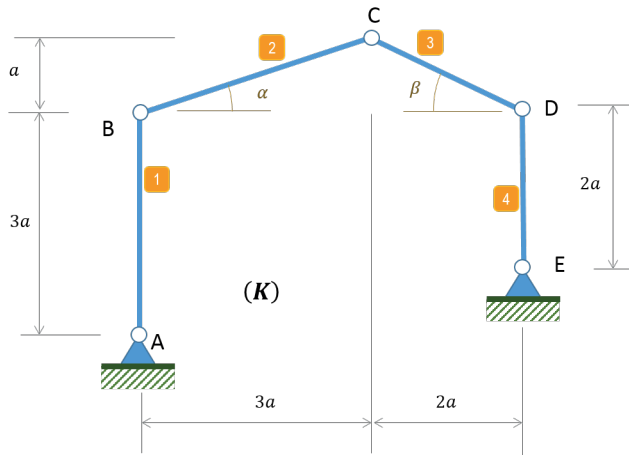


FIGURE 1.24. Mécanisme (K) en portique à cinq articulations.

### 1.16.3 Solution

**Nombre de degrés de liberté** On effectue le décompte global :

Nœud	Nature	Inconnues de liaison	Cumul
A, E	Articulation sol	$2 \times 2$	4
B, C, D	Articulation simple	$3 \times 2$	6
		TOTAL	$n_i = 10$

Le mécanisme comporte  $b = 4$  barres dont l'équilibre est décrit par  $n_e = 4 \times 3 = 12$  équations. Il y a donc un excès de deux équations d'équilibre :  $n_e - n_i = +2$ . C'est que le mécanisme possède 2 degrés de liberté. Tout champ de vitesse instantané s'exprime en tant que combinaison linéaire de deux champs de vitesse « élémentaires » indépendants.

**Champ de vitesse  $\{v\}$**  Comme le mécanisme comporte 2 seuls DDL, nous pouvons choisir deux paramètres de position : nous choisissons les composantes horizontales de vitesse des têtes des poteaux.

Champ  $\{v_1\}$  On fixe les paramètres cinématiques scalaires  $u_B = 1$  et  $u_D = 0$ .

#### Épure

La construction de l'épure cinématique correspondante et la représentation du champ de vitesse sont illustrées par la figure 1.25.

L'épure est construite selon les étapes qui suivent :

1. on trace les axes  $\{uv\}$ ;
2. on positionne l'image des nœuds fixes, ici  $a$  et  $e$  au centre du repère cinématique;

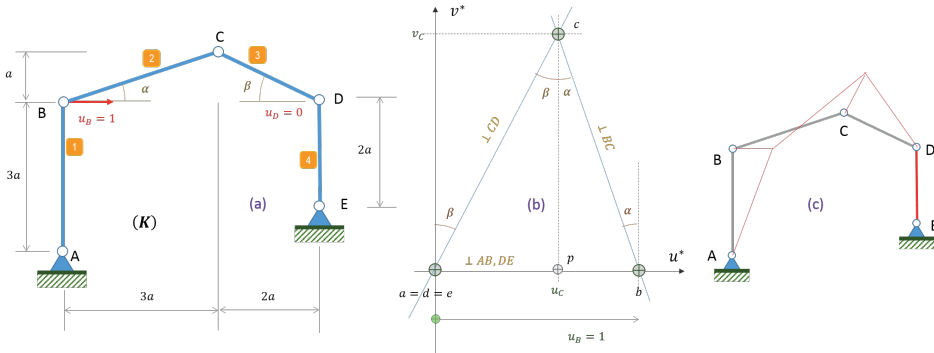


FIGURE 1.25. Champ de vitesse  $\{v_1\}$  du mécanisme (K) : (a) choix du paramètre : ici une vitesse de rotation ; (b) épure cinématique ; (c) représentation du champ de vitesse instantané  $\{v_1\}$ .

3. le point image  $d$ , d'abscisse nulle, est situé sur une perpendiculaire à  $DE$  issue de  $E$  :  $d$  est donc également confondu avec le centre du repère cinématique ;
4. on trace la perpendiculaire à  $BC$  issue de  $b$  :  $c'$  est le lieu possible de l'image  $c$ , car les nœuds  $B$  et  $C$  appartiennent au solide [2] ;
5. on trace la perpendiculaire à  $CD$  issue de  $d$  :  $c$  est le lieu possible de l'image  $c$ , car les nœuds  $D$  et  $C$  appartiennent au solide [3] ;
6. le point  $c$  est donc nécessairement situé à l'intersection des deux droites précédentes. Ce qui achève la construction.

### Vitesses de translation

À partir de l'épure, les vitesses des nœuds sont calculées par de simples considérations géométriques dans des triangles rectangles<sup>7</sup>. On introduit le point  $p$  comme projection du point  $c$  sur l'axe  $u$ .

– Dans le triangle  $acp$  :

$$\tan \beta = \frac{ap}{cp} = \frac{u_C}{v_C} \quad (1.16.1)$$

– Dans le triangle  $bcp$  :

$$\tan \alpha = \frac{bp}{cp} = \frac{1 - u_C}{v_C} \quad (1.16.2)$$

Les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont caractérisés dans la géométrie du mécanisme :

$$\tan \alpha = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \tan \beta = \frac{1}{2}$$

Effectuons le rapport des équations 1.16.2/1.16.1, il vient :

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{2}{3} = \frac{1}{u_C} - 1 \Rightarrow u_C = \frac{3}{5}$$

7. Rappelons que deux angles aux côtés perpendiculaires sont égaux.



Puis, d'après 1.16.1 :

$$v_C = \frac{u_C}{\tan \beta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{5}$$

Tableau récapitulatif

Nœud	$u$	$v$	Nœud	$u$	$v$	Nœud	$u$	$v$
A	0	0	B	+1	0	C	$+\frac{3}{5}$	$+\frac{6}{5}$
D	0	0	E	0	0			

### Vitesses de rotation

On peut ensuite calculer les rotations des barres :

- barre [1] = [AB] :

$$\omega_1 = -\frac{u_B - u_A}{y_B - y_A} = -\frac{1 - 0}{3a - 0} = -\frac{1}{3a}$$

- barre [2] = [BC] :

$$\omega_2 = -\frac{u_C - u_B}{y_C - y_B} = -\frac{\frac{3}{5} - 1}{a - 0} = +\frac{2}{5a}$$

ou

$$\omega_2 = +\frac{v_C - v_B}{x_C - x_B} = \frac{\frac{6}{5} - 0}{3a} = +\frac{2}{5a}$$

- barre [3] = [CD] :

$$\omega_3 = +\frac{v_D - v_C}{x_D - x_C} = +\frac{0 - \frac{6}{5}}{2a} = -\frac{3}{5a}$$

ou

$$\omega_3 = -\frac{u_C - u_D}{y_D - y_C} = -\frac{\frac{3}{5} - 0}{a} = -\frac{3}{5a}$$

- barre [4] = [DE] :

$$\omega_4 = -\frac{u_D - u_E}{y_D - y_E} = -\frac{0 - 0}{2a} = 0$$

Champ  $\{v_2\}$  On fixe les paramètres cinématiques scalaires  $u_B = 0$  et  $u_D = 1$ .

### Épure

La construction de l'épure cinématique correspondante et la représentation du champ de vitesse sont illustrées par la figure 1.26.

L'épure est construite selon les étapes similaires à celles déjà décrites pour le champ  $\{v_1\}$ .

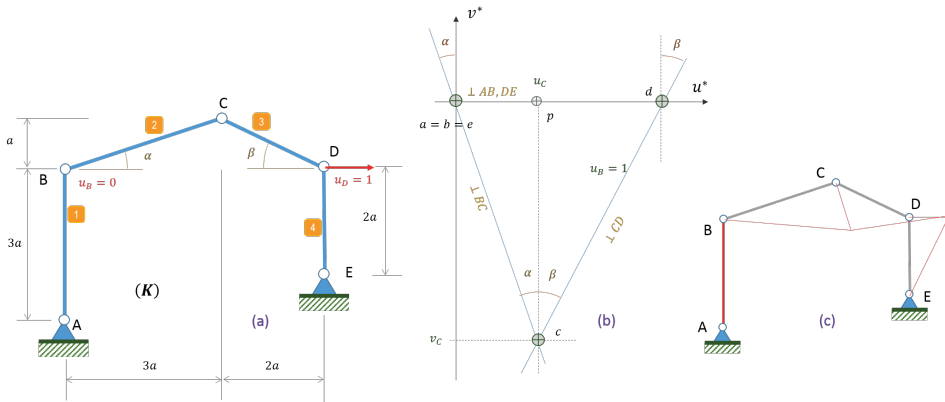


FIGURE 1.26. Champ de vitesse  $\{v_2\}$  du mécanisme (K) : (a) choix du paramètre : ici une vitesse de rotation ; (b) épure cinématique ; (c) représentation du champ de vitesse instantané  $\{v_2\}$ .

Vitesses de translation

- Dans le triangle  $acp$  :

$$\tan \alpha = -\frac{ap}{cp} = -\frac{u_C}{v_C} \tag{1.16.3}$$

- Dans le triangle  $dcp$  :

$$\tan \beta = -\frac{pd}{cp} = -\frac{1-u_C}{v_C} \tag{1.16.4}$$

Effectuons le rapport des équations 1.16.4/1.16.3, il vient :

$$\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{3}{2} = \frac{1}{u_C} - 1 \Rightarrow u_C = \frac{2}{5}$$

Puis, d'après 1.16.3 :

$$v_C = -\frac{u_C}{\tan \alpha} = -\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}} = -\frac{6}{5}$$

Tableau récapitulatif :

Nœud	$u$	$v$	Nœud	$u$	$v$	Nœud	$u$	$v$
A	0	0	B	0	0	C	$+\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$
D	+1	0	E	0	0			

Vitesses de rotation

- barre  $[1]=[AB]$  :

$$\omega_1 = -\frac{u_B - u_A}{y_B - y_A} = -\frac{0 - 0}{3a - 0} = 0$$

– barre [2] = [BC] :

$$\omega_2 = -\frac{u_C - u_B}{y_C - y_B} = -\frac{\frac{2}{5} - 0}{a - 0} = -\frac{2}{5a}$$

ou

$$\omega_2 = +\frac{v_C - v_B}{x_C - x_B} = \frac{-\frac{6}{5} - 0}{3a} = -\frac{2}{5a}$$

– barre [3] = [CD] :

$$\omega_3 = +\frac{v_D - v_C}{x_D - x_C} = +\frac{0 - \frac{-6}{5}}{2a} = \frac{3}{5a}$$

ou

$$\omega_3 = -\frac{u_C - u_D}{y_D - y_C} = -\frac{\frac{2}{5} - 1}{a} = \frac{3}{5a}$$

– barre [4] = [DE] :

$$\omega_4 = -\frac{u_D - u_E}{y_D - y_E} = -\frac{1 - 0}{2a} = -\frac{1}{2a}$$

## 1.17 Épure cinématique I

LIM04 | Difficulté = 2

- Construction d'une épure cinématique dans un mécanisme à 1 DDL.
- Trigonométrie dans des triangles.

### 1.17.1 Énoncé

On considère le mécanisme plan ( $S$ ) représenté dans sa configuration initiale dans la figure 1.27. Les côtés et les angles d'inclinaison sont à relever sur cette figure. On suppose que les éléments « barres » [AB] et [BC] sont rigides.

### 1.17.2 Questions

Combien ce mécanisme comporte-t-il de degrés de liberté?

1. Tracer son épure cinématique en imposant  $u_C = 1$ .
2. Calculer les composantes de vitesse de translation des nœuds du mécanisme.
3. Calculer les vitesses de rotation des barres.

### 1.17.3 Solution

**Degrés de liberté** On décompte les actions de liaisons d'une part et les équations de statique disponibles d'autre part :

- en  $A$ , la liaison articulée amène deux actions;
- en  $B$ , la liaison articulée amène deux actions;
- en  $C$ , l'appui simple amène une action.

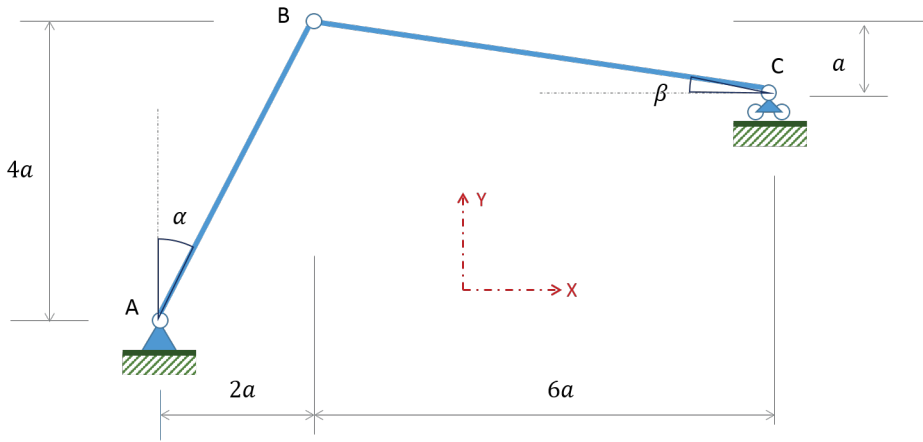


FIGURE 1.27. Mécanisme à 1 DDL.

Le nombre d'actions de liaison est donc :  $n_i = 5$ .

Le mécanisme étant composé de deux barres, nous disposons de  $n_e = 2 \times 3 = 6$  équations d'équilibre.

Il s'agit donc bien d'un mécanisme comportant  $n_e - n_i = 1$  degré de liberté.

**Construction de l'épure cinématique** On part d'un jeu d'axes orthogonaux représentant les vitesses horizontale et verticale des nœuds. Ce plan constitue le plan cinématique (figure 1.28). Le point A du plan de situation (celui du mécanisme) est immobile en raison de l'articulation le fixant au sol. Son image  $a$  dans le plan cinématique est confondue avec l'origine du repère qui est l'image de tous les points de vitesse vectorielle nulle.

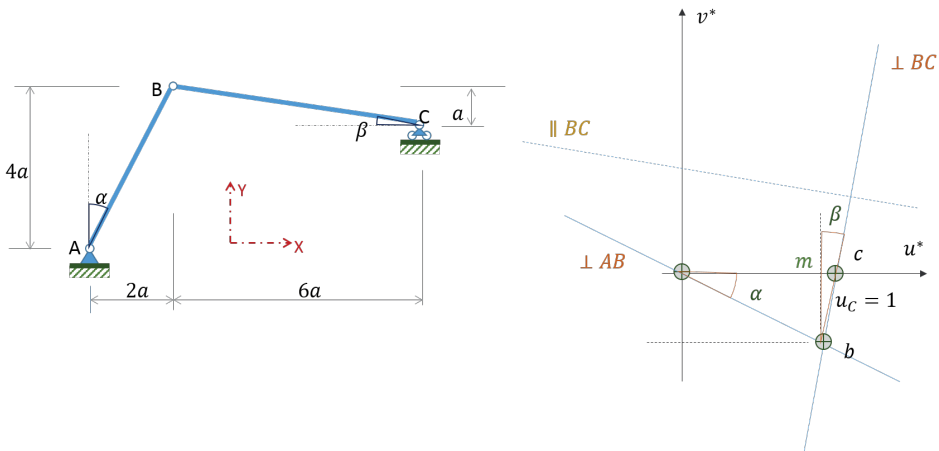


FIGURE 1.28. Épure cinématique de l'exercice 1.17.

**Tracé** Par application du théorème d'équiprojectivité sur chaque solide indéformable, on procède ensuite comme suit :

- on trace la droite perpendiculaire à  $[AB]$  issue de  $a$ . Cette droite présente une inclinaison  $\alpha$  par rapport à l'axe  $u^*$ ;
- on positionne le point  $c$  image de  $C$  situé à la distance unitaire de  $a$  car  $u_C = 1$  et placé sur l'axe  $u^*$  puisque la vitesse verticale de  $C$  est nulle en raison de l'appui simple;
- on trace la droite perpendiculaire à  $[BC]$  issue de  $c$ . Cette droite intercepte la précédente au point  $b$  image du nœud  $B$ .

**Détermination des vitesses de translation** On introduit le point de construction  $m$  en tant que projection du point  $b$  sur l'axe  $u^*$ . On écrit des relations d'angle dans les triangles rectangles composant l'épure et ayant des côtés communs :

- Dans le triangle  $a \overset{\Delta}{b} m$  :

$$\tan \alpha = \frac{b m}{a m}$$

- Dans le triangle  $c \overset{\Delta}{b} m$  :

$$\tan \beta = \frac{m c}{b m}$$

Or :

$$a m + m c = 1$$

donc

$$\frac{b m}{\tan \alpha} + b m \tan \beta = 1$$

Par conséquent

$$b m = \frac{1}{\tan \beta + \cot \alpha}$$

Les lignes trigonométriques sont établies dans le plan de situation du mécanisme :

$$\tan \alpha = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cot \alpha = 2$$

et

$$\tan \beta = \frac{a}{6a} = \frac{1}{6}$$

On en déduit :

$$b m = \frac{1}{\frac{1}{6} + 2} = \frac{6}{13}$$

$b m$  est la projection du vecteur  $\overrightarrow{ob}$  sur la direction  $v^*$  et constitue – au signe près – l'amplitude de la vitesse verticale du nœud  $B$ . On voit clairement que la vitesse verticale de  $B$  est négative si la vitesse horizontale de  $C$  est positive :

$$V_B = -\frac{6}{13}$$

La vitesse horizontale de  $B$  n'est autre que la quantité  $am$  de sorte que sa valeur soit :

$$U_B = am = \frac{bm}{\tan \alpha} = 2 \times \frac{6}{13} = \frac{12}{13}$$

Bilan des vitesses de translation :

Nœud	$u$	$v$
$A$	0	0
$B$	$\frac{12}{13}$	$-\frac{6}{13}$
$C$	1	0

**Vitesses de rotation** Connaissant la vitesse de deux points  $M$  et  $N$  d'un même solide, sa vitesse de rotation est calculée par application de la relation de transfert de moment cinématique :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_N + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{NM}$$

Ce qui se traduit dans le plan par :

$$\Omega = -\frac{\Delta u}{\Delta y} = +\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

– barre  $[AB]$  :

$$\omega_1 = +\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{v_B - v_A}{x_B - x_A} = \frac{-\frac{6}{13} - 0}{2a} = -\frac{3}{13a}$$

– barre  $[BC]$  :

$$\omega_2 = +\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{v_C - v_B}{x_C - x_B} = \frac{0 - (-\frac{6}{13})}{6a} = +\frac{1}{13a}$$

Le champ de vitesse instantanée du mécanisme à partir de sa configuration initiale est ainsi complètement défini.

## 1.18 Puissance d'une force répartie agissant sur une poutre indéformable

LIM13 | Difficulté = 1

- Torseurs cinématique et statique.
- Glisseur.
- Comoment.

### 1.18.1 Description

On considère la poutre de longueur  $L$  en tant que solide indéformable de la figure 1.29. À l'instant  $t$ , son champ de vitesse instantanée dans le plan est caractérisé par les vitesses aux extrémités  $\vec{V}_A$  et  $\vec{V}_B$ . Cette poutre est soumise à l'action d'une force répartie linéique d'intensité maximale  $q$ . On cherche la puissance développée par cet effort.

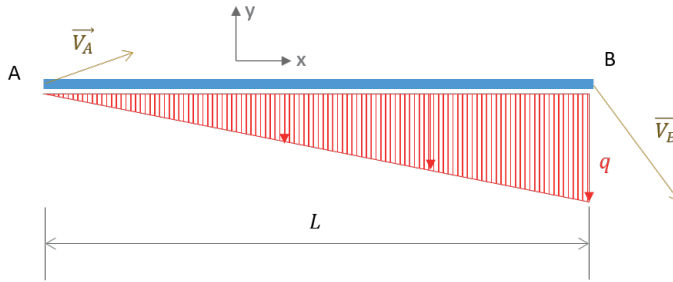


FIGURE 1.29. Poutre indéformable soumise à l'action d'une force répartie linéaire.

### 1.18.2 Questions

1. Quelle condition les vitesses  $\vec{V}_A$  et  $\vec{V}_B$  doivent-elles satisfaire pour être compatibles avec le champ de vitesse d'un solide indéformable ?
2. Calculer la puissance  $\mathcal{P}_q$  de la force répartie de façon directe.
3. Calculer ensuite cette puissance en utilisant les propriétés de torseur du champ de vitesse et des forces appliquées :
  - (a) en remplaçant la force répartie par son glisseur ;
  - (b) en prenant les éléments de réduction des torseurs en A ;
  - (c) en réduisant les torseurs en B ;

### 1.18.3 Solution

1. Les vecteurs vitesse d'un solide indéformable répondent à la condition d'équiprojectivité. Ainsi :

$$\vec{V}_A \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{V}_B \cdot \overrightarrow{AB}$$

Dans le système d'axes  $\{Axy\}$  :

$$\vec{V}_M = u_m \vec{x} + v_m \vec{y} \quad \forall M$$

et

$$\overrightarrow{AB} = L \vec{x}$$

Par conséquent :

$$u_A = u_B$$

ce qui traduit l'inextensibilité de la barre  $[AB]$ .

2. Pour le calcul direct de la puissance, on exprime le champ de vitesse variant linéairement en fonction de l'abscisse  $x$  de tout point  $P$  de la barre  $[AB]$  :

$$\vec{V}(x) = u_A \vec{x} + \left[ v_A \left( 1 - \frac{x}{L} \right) + v_B \frac{x}{L} \right] \vec{y}$$

On exprime également la densité de force :

$$\vec{q}(x) = -q \frac{x}{L} \vec{y}$$

La force élémentaire  $\vec{df}$  agissant en  $x$  sur un segment infinitésimal  $dx$  a donc une puissance égale à :

$$d\mathcal{P}_q = \vec{q}(x) dx \cdot \vec{V}(x)$$

La puissance totale est égale à la somme des puissances élémentaires :

$$\mathcal{P}_q = \int_{(AB)} d\mathcal{P}_q = \int_{x=0}^L -q \frac{x}{L} \left[ v_A \left(1 - \frac{x}{L}\right) + v_B \frac{x}{L} \right] dx$$

On peut trouver commode de procéder au changement de variable  $x = Lt$  de sorte que :

$$\mathcal{P}_q = -qL \int_{t=0}^1 [v_A(t - t^2) + v_B t^2] dx = -qL \left( v_A \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + v_B \frac{1}{3} \right) = -qL \frac{v_A + 2v_B}{6} \quad (1.18.1)$$

3. La méthode précédente est applicable que le solide soit déformable ou pas. Si, comme c'est le cas présent, le solide est indéformable, le calcul de la puissance peut s'appuyer sur la notion de torseur. En effet, le champ de vitesse d'un solide indéformable est caractérisé par un torseur cinématique dont la résultante est le vecteur rotation. Le vecteur rotation est tel que :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\Omega} \wedge \overline{AB}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_B \\ v_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et donc :

$$\omega_z = \frac{\Delta v}{L} \quad \omega_y = 0 \quad \omega_x \text{ indéterminée}$$

À noter que la composante de rotation  $\omega_x$  correspondrait à la rotation de la barre sur elle-même (autour de son axe) et ne présente aucun intérêt pour notre application. Le torseur cinématique s'écrit donc :

$$\{\mathcal{C}\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} = \frac{\Delta v}{L} \vec{z} \\ \vec{V}(P) = \vec{V}(x) = u_A \vec{x} + \left[ v_A \left(1 - \frac{x}{L}\right) + v_B \frac{x}{L} \right] \vec{y} \end{array} \right\}_P$$

Reste à caractériser le torseur de la force répartie : la résultante est égale à la somme des forces élémentaires  $\vec{dq}$  :

$$\vec{F} = \int_{(AB)} \vec{df} = \int_{x=0}^L -q \frac{x}{L} \vec{y} dx = -\frac{qL}{2} \vec{y}$$



- (a) Force répartie caractérisée par un glisseur. Le point  $K$  de passage du glisseur est le point où le moment produit par la force répartie est nul. Par conséquent :

$$x_K \cdot F = \int_{x=0}^L x \cdot -q \frac{x}{L} dx = -\frac{qL^2}{3} \Rightarrow x_K = \frac{2}{3}L$$

On retrouve la position du centre d'inertie d'un triangle ( $1/3$  de la hauteur par rapport à la base). La puissance d'un système de forces agissant sur un solide indéformable est égale au comoment du torseur statique par le torseur cinématique :

$$\mathcal{P}_q = \{F\}_K \otimes \{\mathcal{C}\}_K = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{qL}{2} \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_K \otimes \left\{ \begin{array}{c} \frac{\Delta v}{L} \vec{z} \\ u_A \vec{x} + \left[ \frac{1}{3}v_A + \frac{2}{3}v_B \right] \vec{y} \end{array} \right\}_K$$

On voit que la puissance d'un glisseur est simplement égale au produit scalaire de la résultante par la vitesse du point d'application :

$$\mathcal{P}_q = -\frac{qL}{2} \times \left[ \frac{1}{3}v_A + \frac{2}{3}v_B \right] \quad (1.18.2)$$

Cette expression est conforme à celle déjà établie en 1.18.1.

- (b) Torseurs réduits en  $A$ . Le moment des forces en  $A$  s'écrit :

$$\vec{M}_A = \int_{(AB)} x \vec{x} \cdot \vec{df} = \vec{z} \int_{x=0}^L x \cdot -q \frac{x}{L} dx = -\frac{qL^2}{3} \vec{z}$$

D'où le comoment :

$$\mathcal{P}_q = \{F\}_A \otimes \{\mathcal{C}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{qL}{2} \vec{y} \\ -\frac{qL^2}{3} \vec{z} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \frac{\Delta v}{L} \vec{z} \\ u_A \vec{x} + v_A \vec{y} \end{array} \right\}_A$$

En effectuant le « produit croisé » :

$$\mathcal{P}_q = -\frac{qL}{2} \times v_A - \frac{qL^2}{3} \times \frac{v_B - v_A}{L} = -qL \left( \frac{v_A}{6} + \frac{v_B}{3} \right) \quad (1.18.3)$$

Expression identique à 1.18.1 ou 1.18.2.

- (c) Torseurs réduits en  $B$ . Le moment des forces en  $B$  s'écrit :

$$\vec{M}_B = \int_{(AB)} (x-L) \vec{x} \cdot \vec{df} = \vec{z} \int_{x=0}^L (x-L) \times -q \frac{x}{L} dx = +\frac{qL^2}{6} \vec{z}$$

résultat que nous aurions également pu établir par application de la « formule de transfert » du moment :

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{F} \quad \text{ou, alternativement,} \quad \vec{M}_B = \vec{BK} \wedge \vec{F}$$

D'où le comoment :

$$\mathcal{P}_q = \{F\}_B \otimes \{\mathcal{C}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{M}_B \end{array} \right\}_B \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{qL}{2} \vec{y} \\ +\frac{qL^2}{6} \vec{z} \end{array} \right\}_B \otimes \left\{ \begin{array}{c} \frac{\Delta v}{L} \vec{z} \\ u_B \vec{x} + v_B \vec{y} \end{array} \right\}_B$$

Donc :

$$\mathcal{P}_q = -\frac{qL}{2} \times v_B + \frac{qL^2}{6} \times \frac{v_B - v_A}{L} = -qL \left( \frac{v_B}{3} + \frac{v_A}{6} \right) \quad (1.18.4)$$

On retrouve à nouveau la valeur déjà calculée. La coïncidence des expressions 1.18.2, 1.18.3 et 1.18.4 provient tout simplement de la propriété d'invariance du comoment. Cette propriété offre une multitude de façon d'exprimer la puissance et ce sont des considérations de simplicité des calculs qui guident le mécanicien.

## 1.19 Puissance développée par un cycliste en ascension

LIM16 | Difficulté = 1

– Force, vitesse, puissance, produit scalaire.

### 1.19.1 Description

Au Tour de France, un cycliste professionnel de masse  $m$ , y compris son vélo, entreprend l'ascension d'une côte de pente  $p$  à la vitesse  $V_h$  (figure 1.30).

On admettra les hypothèses très simplificatrices suivantes : la résistance de l'air n'est pas prise en compte, l'énergie du cycliste est totalement convertie en énergie mécanique. Les nécessaires frottements sol-roues ne sont pas pris en compte.

### 1.19.2 Question

Quelle puissance le cycliste développe-t-il ?

Application numérique :  $m = 80$  kg,  $g = 9,81$  N/kg,  $V_h = 15$  km/h,  $p = 15$  %.

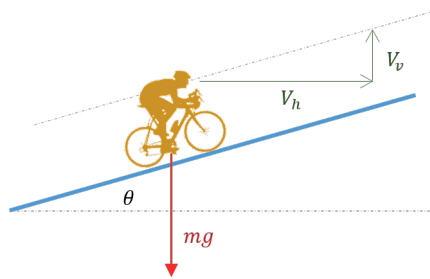


FIGURE 1.30. Cycliste en ascension.

### 1.19.3 Solution

Le poids vélo + cycliste est égal à :

$$P = mg$$

La pente est égale à la tangente de l'angle d'inclinaison de la route :

$$p = \tan \theta$$

La vitesse, mesurée sur une carte routière, est une vitesse horizontale et la vitesse ascensionnelle est égale à :

$$V_v = p \cdot V_h$$

La puissance développée est égale au produit scalaire du vecteur poids par le vecteur vitesse, soit :

$$\mathcal{P} = \left| \vec{P} \cdot \vec{V} \right| \Rightarrow \mathcal{P} = P \cdot V_v = mg \cdot p \cdot V_h$$

Application numérique :

$$\mathcal{P} = 80 \text{ kg} \times 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \times 0,15 \times 15 \times \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 490,5 \text{ W}$$

## 1.20 Conditions d'équilibre d'un mécanisme à 2 DDL

LIM17 | Difficulté = 2

- Cinématique d'un mécanisme.
- Puissances des efforts.
- Principe des puissances virtuelles.

### 1.20.1 Description

On considère la configuration initiale du mécanisme bi-étagé ( $K$ ) de la figure 1.31 formé par un assemblage de barres indéformables. Il est soumis à une force transversale uniformément répartie d'intensité  $q$  agissant sur le jambage  $[DEF]$ , à un couple  $C$  s'exerçant sur la barre [1] et à deux efforts horizontaux concentrés d'intensité, respectivement  $2F$  et  $3F$  appliqués, respectivement sur les nœuds  $B$  et  $C$ . L'étude porte sur les conditions de l'équilibre de cette configuration.

### 1.20.2 Questions

1. Combien de degrés de liberté le mécanisme comporte-t-il?
2. Établir les équations d'équilibre et montrer que l'équilibre ne peut être assuré qu'à deux conditions portant sur  $q, F, C$  que l'on précisera.

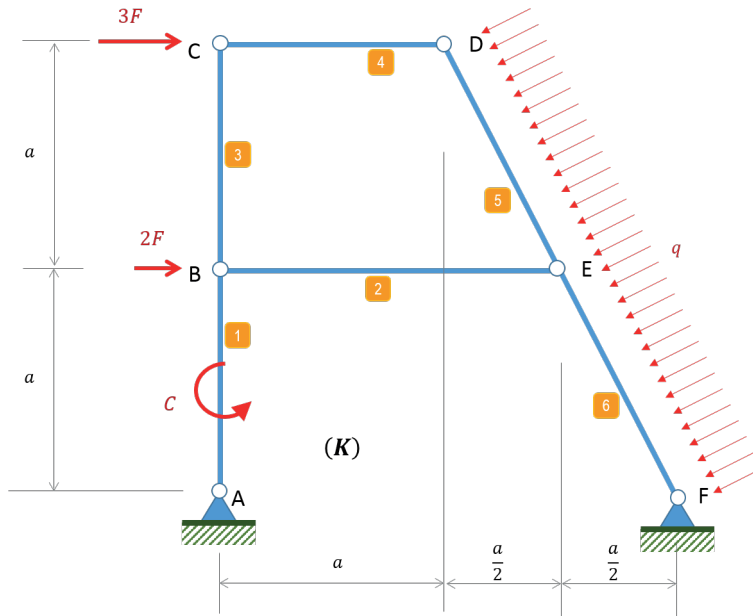


FIGURE 1.31. Mécanisme bi-étagé ( $K$ ) soumis à une pluralité d'efforts et de couples.

### 1.20.3 Solution

**Nombre de degrés de liberté** Le mécanisme présente une boucle  $[BCDE]$  formée de quatre barres 2/3/4/7 liées par quatre articulations. L'équilibre de la boucle isolée est régi par  $4 \times 3 = 12$  équations pour  $4 \times 2 = 8$  inconnues de liaison (voir exercice 1.14). Déduction faite des trois mobilités d'ensemble, l'indicateur  $m = 3b - n_i - 3$  est égal à  $+1$ . Cette boucle constitue donc bien un mécanisme à elle seule.

On effectue le décompte global :

Nœud	Nature	Inconnues de liaison	Cumul
$A, F$	Articulation sol	$2 \times 2$	4
$B, E$	Articulation 3 barres	$2 \times 4$	8
$C, D$	Articulation 2 barres	$2 \times 2$	4
		Total	$n_i = 16$

Le mécanisme comporte  $b = 6$  barres dont l'équilibre est décrit par  $n_e = 6 \times 3 = 18$  équations. Il y a donc un excès d'équations d'équilibre :  $n_e - n_i = +2$ . C'est que le mécanisme possède deux degrés de liberté. Cela signifie deux choses :

1. l'équilibre du mécanisme sous l'effet du chargement extérieur n'est possible que sous deux conditions portant sur ledit chargement ;
2. le champ de vitesse du mécanisme dépend de deux paramètres scalaires ou, ce qui revient au même, tout champ de vitesse du mécanisme résulte de la combinaison de deux champs indépendants cinématiquement admissibles.

**Conditions d'équilibre** Les conditions d'équilibre s'établissent en appliquant le principe des puissances virtuelles au mécanisme ( $K$ ) dans deux champs de vitesse indépendants.

**Champ de vitesse  $\{v_1\}$**  On fixe deux paramètres cinématiques scalaires. Nous choisissons les composantes horizontales de vitesse des nœuds  $B$  et  $C$ . Le premier champ de vitesse cinématiquement admissible choisi est obtenu en fixant  $u_B = 1$  et  $u_C = 0$ . La figure 1.32 présente la construction de l'épure cinématique correspondante et la représentation du champ de vitesse.

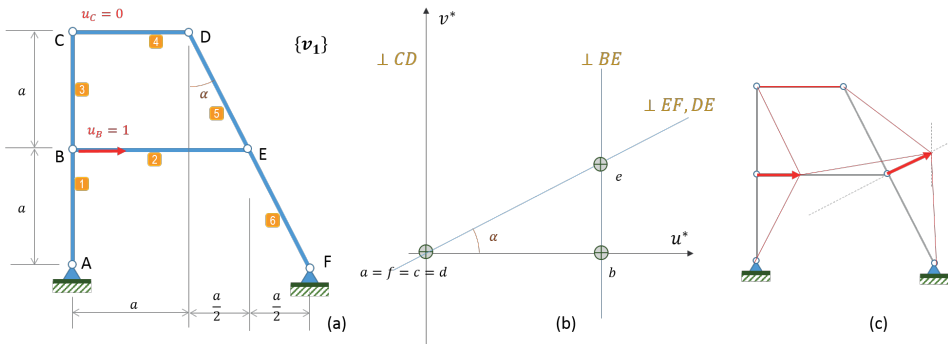


FIGURE 1.32. Champ de vitesse  $\{v_1\}$  du mécanisme ( $K$ ) : (a) choix des paramètres; (b) épure cinématique; (c) représentation du champ de vitesse instantané  $\{v_1\}$ .

Les vitesses des nœuds sont récapitulées dans le tableau suivant.

Nœud	$u$	$v$	Nœud	$u$	$v$	Nœud	$u$	$v$
A	0	0	B	1	0	C	0	0
D	0	0	E	1	$\frac{1}{2}$	F	0	0

Selon le **PPV\***, le mécanisme est en équilibre si la puissance de tous les efforts s'exerçant sur lui est égale à zéro :

- Puissance du couple  $C$  agissant sur [1] :

$$\mathcal{P}_e^*(C) = C \cdot \omega_1$$

Nous avons besoin de la vitesse de rotation de la barre [1] sur laquelle agit le couple :

$$\omega_1 = -\frac{1}{a}$$

donc :

$$\mathcal{P}_e^*(C) = -\frac{C}{a}$$

- Puissance de la force répartie agissant sur [6]. Plusieurs options de calcul s'offrent à nous :