

52

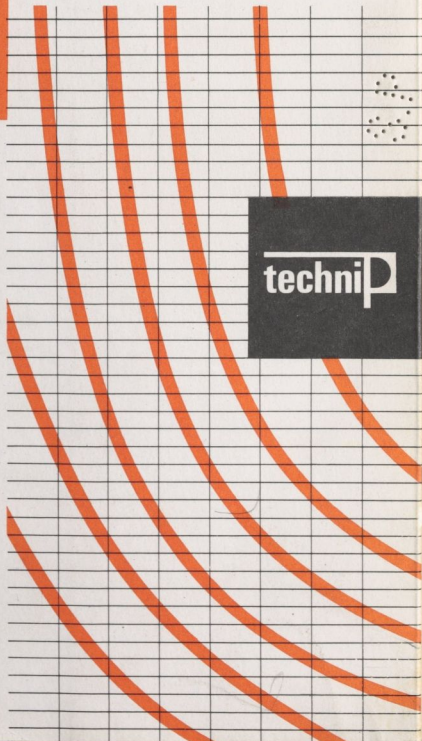
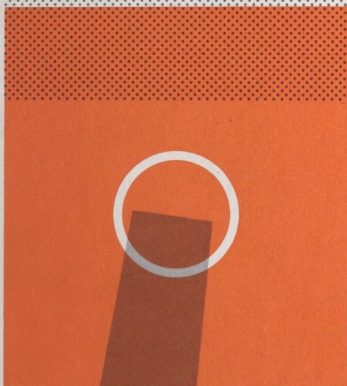
PUBLICATIONS DE L'INSTITUT FRANÇAIS DU PÉTROLE



B./SWOBODA

Mécanique des moteurs alternatifs

COURS DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DU PÉTROLE ET DES MOTEURS



SOCIÉTÉ DES ÉDITIONS TECHNIP

ÉDITIONS TECHNIQUE FRANÇAIS DU PÉTROLIF

École Nationale Supérieure
des Pétroles et des Moteurs

Centre d'études supérieures
des moteurs et des applications
des produits du pétrole

62
25-26

Mécanique des moteurs alternatifs

par B. Swoboda

INGÉNIEUR A.E.N.S.P.M.

Ingénieur-chercheur, Laboratoire des Moteurs, Institut de Recherches Pétrolières

111

15868

ÉDITIONS TECHNIQUE

27 rue de Valenciennes
75782 Paris Cedex 13

INSTITUT FRANÇAIS DU PÉTROLE

62

NC

École Nationale Supérieure du Pétrole et des Moteurs

Centre d'études supérieures
des moteurs et des applications
des produits du pétrole

Mécanique des moteurs alternatifs

Par B. Swoboda

Ingénieur A.M. et E.N.S.P.M.

Ingénieur motoriste à la direction des Etudes Peugeot-Talbot de Carrières-sous-Poissy

80 V

85869

1984

ÉDITIONS TECHNIP

27 rue Ginoux
75737 Paris Cédex 15

DL-14-12-1984-37209



© 1984. Editions Technip, Paris
et Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison

ISBN 2.7 108-0458-1

Toute reproduction, même partielle de cet ouvrage, par quelque procédé que ce soit
est rigoureusement interdite par les lois en vigueur

PREFACE

Il y a trois cents ans, la chute d'une pomme interpella Newton. Il traduisit ses réflexions par l'équation :

$$F = m\gamma$$

Le chapitre de la dynamique s'ouvrait après ceux de la statique et de la cinématique. La mécanique était née.

Aujourd'hui, la mécanique rationnelle relève de la formation mathématique dispensée dans les classes préparatoires aux Grandes Ecoles. Au Centre d'Etudes Supérieures "Moteurs-Applications" – traditionnellement connu sous l'appellation "Ecole des Moteurs" – l'enseignement s'adresse à des ingénieurs confirmés, attirés par le domaine passionnant des moteurs thermiques et turbines à gaz. Parmi les cours d'application, la place faite à la mécanique des moteurs alternatifs suppose connus les théorèmes de la mécanique classique.

L'édition de ce cours retiendra l'attention de l'ingénieur mécanicien confronté au comportement dynamique d'un système bielle-manivelle : la bielle n'est pas un élément fictif simulé par deux masses ponctuelles concentrées sur l'axe de piston et le maneton. C'est un solide réel, soumis à des accélérations linéaires et angulaires, dont l'inertie intervient sur les efforts aux liaisons.

Saluons la méthode cartésienne de l'auteur. Après un rappel des théorèmes généraux, il enchaîne les étapes pour conclure magistralement sur l'équilibrage des multicylindres. Plus de formules simplifiées qui permettaient naguère l'accès aux calculs numériques. M. SWOBODA conduit le lecteur avec rigueur. Les systèmes de référence sont définis sans ambiguïté et les notations utilisées éliminent toute erreur d'interprétation.

A l'ère de l'informatique, cet ouvrage devrait se trouver sur la table de tout ingénieur motoriste.

R. BUTY

*Directeur, à l'E.N.S.P.M.,
du Centre d'Etudes Supérieures
Moteurs-Applications*

PREFACE

A new book on the history of the American people is needed. It should be written by an American.

1 - 07

The history of the American people is the history of the struggle for freedom and democracy.

Against the background of the American people's struggle for freedom and democracy, the story of the American people is told. The story is told in a way that is both interesting and instructive. It is a story of the American people's struggle for freedom and democracy.

The story of the American people is the story of the struggle for freedom and democracy. It is a story of the American people's struggle for freedom and democracy.

The story of the American people is the story of the struggle for freedom and democracy. It is a story of the American people's struggle for freedom and democracy.

The story of the American people is the story of the struggle for freedom and democracy. It is a story of the American people's struggle for freedom and democracy.

The story of the American people is the story of the struggle for freedom and democracy. It is a story of the American people's struggle for freedom and democracy.

The story of the American people is the story of the struggle for freedom and democracy. It is a story of the American people's struggle for freedom and democracy.

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage ne prétend pas répondre à toutes les préoccupations mécaniques de l'ingénieur motoriste. La partie résistance des matériaux, qui est la suite logique de ce qui est traité ici, n'y est d'ailleurs pas abordée. C'est un cours de vulgarisation et d'application dont on retiendra la méthode — principes généraux de la mécanique vectorielle — et la manière de l'appliquer au mouvement alternatif des moteurs à pistons. Par similitude, le lecteur sera capable de l'appliquer à tout autre ensemble mécanique.

Cet ouvrage trouvera déjà sa récompense s'il peut permettre au lecteur d'aborder un problème de mécanique sans appréhension.

Dans la première partie de ce cours, je me suis attaché à rappeler les trois points essentiels de la mécanique générale. Si l'un d'eux n'est pas parfaitement assimilé, tout problème de mécanique paraît compliqué.

Le premier est la notation. Son importance justifie la création d'un chapitre malgré le faible volume de celui-ci. Une notation doit être précise ; elle est donc forcément contraignante au niveau de l'écriture. Un indice mal placé ou une dérivation dans un mauvais père engendre des calculs erronés ; je conseille donc au lecteur de se conformer aux notations proposées.

Le second est l'énoncé des formules de mécanique générale. C'est l'outil indispensable à tout calcul.

Le troisième est la méthode à appliquer scrupuleusement face à un problème de mécanique générale. Bien que l'on ait l'intuition des phénomènes physiques et de larges connaissances mathématiques, on a souvent du mal à transposer mathématiquement une constatation physique ; on ne sait pas comment aborder un problème de mécanique. Le lecteur trouvera une chronologie lui permettant de faire cette transition.

La deuxième partie est l'application de la mécanique générale à la cinématique de l'ensemble bielle-manivelle.

Les vitesses et les accélérations sont des grandeurs vectorielles calculées à partir de formules exactes dont le traitement mathématique est simple. Les moyens de calcul actuels nous permettent d'éviter les formules approchées et les lourdeurs mathématiques d'autrefois — développement en série limitée, série de Fourier, calcul approché avec calcul d'erreur, etc. — imposées par le calcul manuel.

Après l'étape cinématique, la troisième partie est l'application de la mécanique générale à la dynamique de l'ensemble bielle-manivelle.

Les contacts entre deux pièces sont définis par six paramètres : trois composantes de force et trois composantes de moment. Ces forces et ces moments sont des grandeurs vectorielles calculées à partir d'un système de cinq équations à cinq inconnues provenant des équations vectorielles fondamentales et des indispensables hypothèses simplificatrices nécessaires aux calculs théoriques.

La mécanique vectorielle utilisée dans cet ouvrage remplace la mécanique géométrique d'autrefois qui consistait à traiter graphiquement les efforts.

La quatrième et dernière partie est l'équilibrage des moteurs alternatifs. Pour faciliter les explications mathématiques, elle a été séparée en deux : un chapitre pour les masses rotatives, un autre pour les masses alternatives. En fin d'ouvrage, un tableau récapitule les effets de ces deux types de masse. Le lecteur retiendra, au travers de la liste non exhaustive des exemples traités, le compromis équilibrage, rigidité, masse du vilebrequin.

Je tiens à remercier la Direction du Centre d'Etudes Supérieures Moteurs-Applications de l'E.N.S.P.M. qui m'a incité à écrire cet ouvrage ainsi que la Direction des Etudes Peugeot-Talbot qui m'a accordé toutes les facilités pour le faire.

Bernard SWOBODA

TABLE DES MATIERES

	Pages
PREFACE	3
AVANT-PROPOS	5
TABLE DES MATIERES	7

Première partie : RAPPELS DE MECANIQUE GENERALE

Chapitre 1 : DEFINITIONS	15
1. Notations utilisées en mécanique générale	15
2. Repérage des cylindres	16
21. Moteur en ligne	16
22. Moteur en V	17
Chapitre 2 : COMMENT ABORDER UN PROBLEME DE CINEMATIQUE	19
1. Définitions géométriques	19
2. Formules de cinématique	19
21. Définition de la vitesse et de l'accélération	19
22. Champ des vitesses et des accélérations d'un solide indéformable	20
23. Composition des vitesses et des accélérations	21
24. Dérivée d'un vecteur. Formule de Bour	22
3. Exercice 1 : Mouvement plan sur plan	23
4. Exercice 2 : Composition de trois mouvements	26
Chapitre 3 : COMMENT ABORDER UN PROBLEME DE DYNAMIQUE	33
1. Rappels sur les inerties	33
2. Définition du moment dynamique	37
21. Moment cinétique	37
22. Moment dynamique	38
3. Définition d'un torseur	38
4. Analyse des actions mécaniques	39

TABLE DES MATIERES

41. Actions à distance	39
42. Actions de liaison	39
43. Action de contact ponctuel	41
5. Equations fondamentales de la dynamique. Conclusion	41
51. Equations vectorielles fondamentales	41
52. Equations scalaires	42
53. Conclusion	42
6. Exercice 3 : Etude dynamique d'un pendule pesant	42

Deuxième partie :

CINEMATIQUE DE L'ENSEMBLE BIELLE-MANIVELLE

Chapitre 1 : PRESENTATION DE L'ENSEMBLE BIELLE-MANIVELLE	55
1. Mise en place des repères. Définition des points	55
2. Formules de passage	56
3. Relations cinématiques	58
Chapitre 2 : CINEMATIQUE DES DIFFERENTS POINTS	61
1. Cinématique du point A	61
2. Cinématique du point B	62
3. Cinématique du point G_B	68
4. Vitesse de glissement	72
Chapitre 3 : EXEMPLE NUMERIQUE	75
1. Cinématique du maneton	75
2. Cinématique du piston	76
3. Cinématique de la bielle	81
4. Vitesse de glissement	89

Troisième partie :

DYNAMIQUE DE L'ENSEMBLE BIELLE-MANIVELLE

Chapitre 1 : ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLE	97
1. Analyse des actions mécaniques appliquées à la bielle	97
2. Equations vectorielles fondamentales de la bielle	98
21. Calcul du moment dynamique	98
22. Calcul des moments	99
3. Equations scalaires de la bielle	100

TABLE DES MATIERES

31. Projection des équations vectorielles fondamentales	100
32. Conclusion	101
Chapitre 2 : ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON	103
1. Analyse des actions mécaniques appliquées au piston	103
2. Equations vectorielles fondamentales du piston	105
21. Calcul du moment dynamique	105
22. Calcul des moments	105
3. Equations scalaires du piston	106
31. Projection des équations vectorielles fondamentales	106
32. Conclusion	107
4. Système d'équations	107
Chapitre 3 : EXEMPLE NUMERIQUE	111
1. Valeurs numériques utilisées	111
11. Caractéristiques physiques de la bielle	111
12. Caractéristiques physiques du piston	114
13. Diagramme de pression	114
2. Etude de l'effort latéral de la chemise sur le piston	116
21. Moteur monocylindre 4 temps	116
22. Moteur 4 cylindres en ligne 4 temps	116
3. Etude de l'effort dans l'axe de la bielle	117
4. Etude du couple moteur	124
41. Moteur monocylindre 4 temps	125
42. Moteur multicylindre 4 temps. Ordre d'allumage	128
43. Moteur 2 cylindres en ligne 4 temps	133
431. Vilebrequin symétrique	133
432. Vilebrequin à manetons opposés	138
44. Moteur 3 cylindres en ligne 4 temps	139
45. Moteur 4 cylindres en ligne 4 temps	142
46. Moteur 6 cylindres 4 temps	146
461. Moteur 6 cylindres en ligne ou V 6 ouvert à 120° 4 temps	147
462. Moteur V 6 ouvert à 60° 4 temps	151
463. Moteur V 6 ouvert à 90° 4 temps	155
47. Moteur 8 cylindres en ligne ou V 8 ouvert à 90° 4 temps	158
48. Moteur 12 cylindres en ligne ou V 12 ouvert à 60° 4 temps	162
49. Moteur 16 cylindres en ligne ou V 16 ouvert à 45° 4 temps	163

TABLE DES MATIERES

5. Etude du diagramme polaire des efforts du maneton sur la bielle dans le repère lié au maneton	168
51. Longueur utile du coussinet de tête de bielle	174
52. Position des trous d'arrivée d'huile	177
6. Etude des autres diagrammes polaires	186

Quatrième partie :
EQUILIBRAGE DES MOTEURS ALTERNATIFS

Chapitre 1 : ETUDE PRELIMINAIRE	193
1. Définitions	193
2. Etude par catégories de forces	193
21. Forces dues aux masses	193
22. Forces dues aux gaz	193
23. Forces dues aux inerties	194
231. Inertie centrifuge	194
232. Inertie alternative	194
233. Inertie de la bielle	194
234. Conclusion	195
3. Nature des forces et des couples engendrés par les forces d'inertie	197
31. Force d'inertie rotative	197
32. Force d'inertie alternative	198
33. Tableaux récapitulatifs	198
34. Remarque importante	199
Chapitre 2 : EQUILIBRAGE DES MASSES ROTATIVES	201
1. Etude théorique	201
11. Définition	201
12. Remarque importante	202
13. Equilibrage théorique parfait	203
2. Moteur monocylindre	205
3. Moteurs multicylindres en ligne	207
31. Moteur 2 cylindres en ligne 4 temps	207
32. Moteur 2 cylindres en ligne 2 temps	212
33. Moteurs 3 cylindres en ligne 4 temps et 2 temps	220
34. Moteur 4 cylindres en ligne 4 temps	237
341. Vilebrequin non symétrique par rapport au plan médian	237
342. Vilebrequin symétrique par rapport au plan médian	238

TABLE DES MATIERES

35. Moteur 4 cylindres en ligne 2 temps	240
351. Vilebrequin en croix	240
352. Vilebrequin en quadrature	246
353. Conclusion	255
36. Moteur 6 cylindres en ligne 4 temps	255
37. Moteur 8 cylindres en ligne 4 temps	258
4. Moteurs multicylindres en V	258
41. Moteur 6 cylindres en V	261
42. Moteur 8 cylindres en V	262
421. Vilebrequin à plat	262
422. Vilebrequin en croix	262
423. Vilebrequin en quadrature	263
43. Moteur 12 cylindres en V	264
44. Moteur 16 cylindres en V	264
Chapitre 3 : EQUILIBRAGE DES MASSES ALTERNATIVES	265
1. Etude théorique	265
11. Développement en série de Fourier	265
12. Equilibrage d'un effort de pilon selon la théorie de l'équivalence entre une masse alternative et deux masses rotatives	267
13. Equilibrage théorique parfait	268
2. Moteur monocylindre	269
21. Equilibrage de l'effort de pilon d'ordre 1	270
22. Equilibrage de l'effort de pilon d'ordre 2. Méthode de Lancheater	272
3. Moteurs multicylindres en ligne	275
31. Composition des forces d'inertie alternatives d'ordre 1	275
32. Composition des forces d'inertie alternatives d'ordre p	279
33. Equilibrage d'un couple de galop selon la théorie de l'équivalence entre un couple alternatif et quatre masses rotatives	280
34. Moteur 2 cylindres en ligne 4 temps	284
35. Moteur 2 cylindres en ligne 2 temps	285
36. Moteur 3 cylindres en ligne 4 temps	289
37. Moteur 4 cylindres en ligne 4 temps	292
38. Moteur 4 cylindres en ligne 2 temps	294
381. Vilebrequin en croix	294
382. Vilebrequin en quadrature	297
39. Moteur 6 cylindres en ligne 4 temps	300
310. Moteur 8 cylindres en ligne 4 temps	302

TABLE DES MATIERES

4. Moteurs multicylindres en V	302
41. Composition des efforts de pilon d'ordre p	303
42. Composition des couples de galop d'ordre p	310
43. Moteur 6 cylindres en V 4 temps	318
44. Moteur 8 cylindres en V 4 temps	325
441. Vilebrequin à plat	325
442. Vilebrequin en croix	326
443. Vilebrequin en quadrature	328
444. Conclusion	329
45. Moteur 12 cylindres en V 4 temps	330
46. Moteur 16 cylindres en V 4 temps	330
 Chapitre 4 : TABLEAUX RECAPITULATIFS DES VALEURS DES EFFORTS ET DES COUPLES	 331
Tableau 1 : Moteurs en ligne	332
Tableau 2 : Moteurs en V	h.t.
 ANNEXE A LA QUATRIEME PARTIE	 335
Formules de mathématiques	335

Chapitre 1
DEFINITIONS

1. NOTATIONS UTILISEES EN MECANIQUE GENERALE

- Les grandeurs sont notées par des lettres minuscules : A, B, \dots
- Les coefficients caractéristiques sont notés par des lettres majuscules indiquées en gras : M, N, \dots
- Les grandeurs variables sont notées par des lettres minuscules italiques : a, b, \dots

Première partie :

RAPPELS DE MECANIQUE GENERALE

- Les angles sont notés par des lettres grecques minuscules : α, β, \dots
- Les segments sont notés par :
 - un trait
 - un trait avec flèche notée par des lettres minuscules : \vec{a}, \vec{b}, \dots
 - un trait avec une croix notée par des lettres minuscules : $\overline{a}, \overline{b}, \dots$
- Si \vec{a} est un vecteur de module :
 - un trait \vec{a} la distance grandeur de \vec{a} par rapport au point $O = \frac{d\vec{a}}{dt}$ en radian par seconde ;
 - $\dot{\alpha}$ représente la vitesse angulaire instantanée ;
 - un trait $\dot{\alpha}$ la dérivée seconde de \vec{a} par rapport au temps $\ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ en radian par seconde carrée ;
 - $\ddot{\alpha}$ représente l'accélération angulaire instantanée.

Si $\dot{\alpha}$ est une vitesse angulaire instantanée, on définit un vecteur vitesse instantanée par une vitesse angulaire instantanée sur un axe de rotation : on le note par la lettre grecque minuscule \vec{v} . Si $\vec{v}(\vec{v}) = \dot{\alpha} \vec{e}_z$, $\vec{v}(\vec{v})$ est la vitesse rotation instantanée du repère 1 par rapport au repère 0 autour de l'axe \vec{z} de valeur $\dot{\alpha}$.

Si $\ddot{\alpha}$ est la dérivée dans le repère 0 du vecteur $\dot{\alpha}$ par rapport au temps,

4. Moturs multicycliques V	217
41. Synposition des efforts et moments dans	221
42. Construction des couples, diagrammes à double	270
43. Motur 2 cylindres en V 4 temps	274
44. Motur 2 cylindres en V 4 temps	285
441. Vibrations 2ème	287
442. Vibrations en ordre	288
443. Vibrations en quadrature	289
444. Conclusion	289
45. Motur 12 cylindres en V 4 temps	290
46. Motur 18 cylindres en V 4 temps	292
CHAPITRE 5 - TABLEAUX RÉCAPITULATIFS DES VALEURS DES MOMENTS ET DES COUPLES	294
Tableau 1 - Moments en ordre	295
Tableau 2 - Moments en ordre	296
ANNEXE 1 - RAPPELS DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE	297
Annexe 1.1 - Cinématique	297

Chapitre 1

DEFINITIONS

1. NOTATIONS UTILISEES EN MECANIQUE GENERALE

Les **points** sont notés par des lettres majuscules : A, B, etc.

Les **longueurs constantes** sont notées par des lettres majuscules indicées ou non : R, L, L₁, etc.

Les **longueurs variables** sont notées par des lettres minuscules : x, y, z, etc.

Les **masses** sont notées par des lettres minuscules indicées : m_A, m_B, etc.

Les **angles** sont notés par des lettres grecques minuscules : θ , φ , etc.

Les **repères** sont définis par :

– un point

– trois axes indicés notés par des lettres minuscules :

$$(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1), (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2), \text{ etc.}$$

Si θ est un angle en radians :

– on note $\dot{\theta}$ la **dérivée première** de θ par rapport au temps $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ en radians par seconde ;

$\dot{\theta}$ représente la **vitesse angulaire instantanée** ;

– on note $\ddot{\theta}$ la **dérivée seconde** de θ par rapport au temps $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$ en radians par seconde carrée ;

$\ddot{\theta}$ représente l'**accélération angulaire instantanée**.

$\dot{\theta}$ étant une vitesse angulaire instantanée, on définit un **vecteur rotation instantanée** par une vitesse angulaire instantanée sur un axe de rotation ; on le note par la lettre grecque majuscule Ω . Si $\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\theta} \vec{z}_1$, $\overrightarrow{\Omega}(1/0)$ est le vecteur rotation instantanée du repère 1 par rapport au repère 0 autour de l'axe \vec{z}_1 de valeur $\dot{\theta}$.

$\frac{d^0 \vec{x}_1}{dt}$ est la **dérivée** dans le repère 0 du **vecteur** \vec{x}_1 par rapport au temps.

$\vec{V}(A, 1/0)$ est la **vitesse instantanée du point A** appartenant au repère 1 par rapport au repère 0.

$\vec{\Gamma}(A, 1/0)$ est l'**accélération instantanée du point A** appartenant au repère 1 par rapport au repère 0.

$\vec{\sigma}^0$ (solide S/G) est le **moment cinétique** du solide (S) par rapport à son centre de gravité G, exprimé dans le repère 0.

$\vec{\delta}^0$ (solide S/G) est le **moment dynamique** du solide (S) par rapport à son centre de gravité G, exprimé dans le repère 0.

$\left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{M} \end{matrix} \right\}_A$ est le **torseur des actions mécaniques** appliquées au point A ; il est défini par une force au point A et un moment au point A.

I (solide S/G) est le **tenseur d'inertie** du solide (S) par rapport à son centre de gravité G exprimé dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

2. REPERAGE DES CYLINDRES

21. MOTEUR EN LIGNE

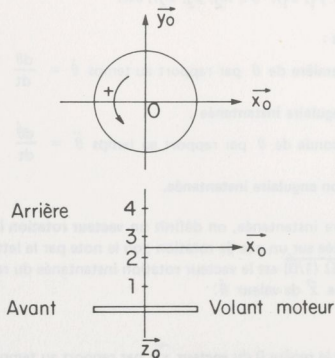


Fig. 1.1. Repérage des cylindres sur un 4 cylindres en ligne.

L'avant du moteur est le côté volant.

Un observateur placé devant le moteur le voit tourner dans le sens trigonométrique.

On numérote les cylindres de l'avant vers l'arrière (fig. 1.1).

22. MOTEUR EN V

Un observateur placé devant le moteur définit un demi-plan de référence gauche : plan horizontal, partie gauche.

Le moteur étant placé dans sa position de fonctionnement, on numérote les rangées de cylindres en faisant tourner le demi-plan de référence gauche dans le sens des aiguilles d'une montre.

Sur une rangée donnée, on numérote les cylindres de l'avant vers l'arrière (fig. 1.2).

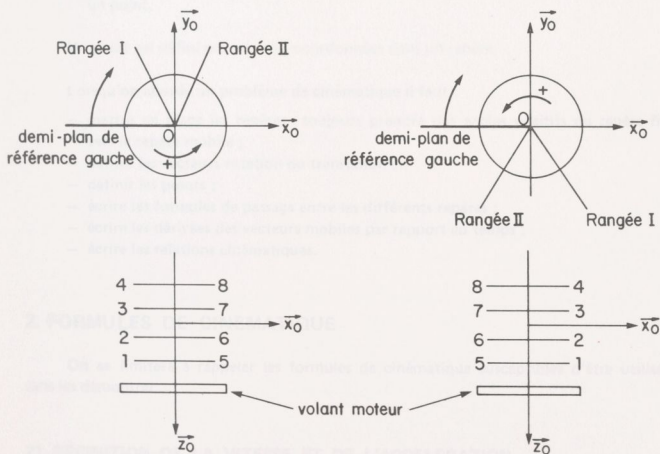


Fig. 1.2. Repérage des cylindres sur un V 8.

On considère un point M de la courbe C et on se propose de déterminer son abscisse x en fonction de son ordonnée y .
 On a donc à résoudre l'équation $f(x) = y$ où $f(x) = x^2 + 2x + 1$.
 On pose $z = x + 1$ et on trouve $z^2 = y$ d'où $z = \pm \sqrt{y}$ et $x = \pm \sqrt{y} - 1$.

On considère un point M de la courbe C et on se propose de déterminer son abscisse x en fonction de son ordonnée y .
 On a donc à résoudre l'équation $f(x) = y$ où $f(x) = x^2 + 2x + 1$.
 On pose $z = x + 1$ et on trouve $z^2 = y$ d'où $z = \pm \sqrt{y}$ et $x = \pm \sqrt{y} - 1$.

On considère un point M de la courbe C et on se propose de déterminer son abscisse x en fonction de son ordonnée y .
 On a donc à résoudre l'équation $f(x) = y$ où $f(x) = x^2 + 2x + 1$.
 On pose $z = x + 1$ et on trouve $z^2 = y$ d'où $z = \pm \sqrt{y}$ et $x = \pm \sqrt{y} - 1$.

On considère un point M de la courbe C et on se propose de déterminer son abscisse x en fonction de son ordonnée y .
 On a donc à résoudre l'équation $f(x) = y$ où $f(x) = x^2 + 2x + 1$.
 On pose $z = x + 1$ et on trouve $z^2 = y$ d'où $z = \pm \sqrt{y}$ et $x = \pm \sqrt{y} - 1$.

On considère un point M de la courbe C et on se propose de déterminer son abscisse x en fonction de son ordonnée y .
 On a donc à résoudre l'équation $f(x) = y$ où $f(x) = x^2 + 2x + 1$.
 On pose $z = x + 1$ et on trouve $z^2 = y$ d'où $z = \pm \sqrt{y}$ et $x = \pm \sqrt{y} - 1$.

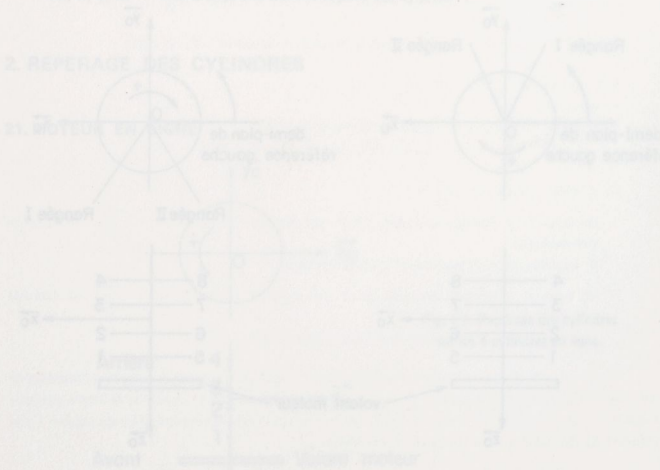


Fig. 13. Reperage des cyclomes

Chapitre 2

COMMENT ABORDER UN PROBLEME DE CINEMATIQUE

1. DEFINITIONS GEOMETRIQUES

Un **axe** est défini par :

- une direction
- une orientation
- un vecteur unité.

Un **repère** est défini par :

- trois axes orthogonaux
- un point.

Un **point** est défini par ses trois coordonnées dans un repère.

Lorsqu'on aborde un problème de cinématique il faut :

- mettre en place les repères : toujours prendre des angles positifs du repère fixe vers le repère mobile ;
- définir les vecteurs rotation ou translation ;
- définir les points ;
- écrire les formules de passage entre les différents repères ;
- écrire les dérivées des vecteurs mobiles par rapport au temps ;
- écrire les relations cinématiques.

2. FORMULES DE CINEMATIQUE

On se limitera à rappeler les formules de cinématique susceptibles d'être utilisées sans les démontrer.

21. DEFINITION DE LA VITESSE ET DE L'ACCELERATION

Soit un point M appartenant au solide (S) lié au repère 1 en mouvement par rapport au repère 0 (fig. 1.3). On peut écrire :

$\vec{V}(M, 1/0) = \frac{d^0 \vec{OM}}{dt}$
$\vec{\Gamma}(M, 1/0) = \frac{d^0 \vec{V}(M, 1/0)}{dt}$

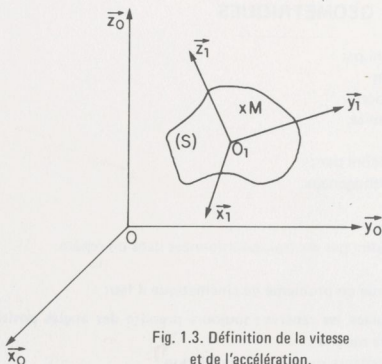


Fig. 1.3. Définition de la vitesse et de l'accélération.

22. CHAMP DES VITESSES ET DES ACCELERATIONS D'UN SOLIDE INDEFORMABLE

On utilise cette formule lorsque l'on connaît déjà la vitesse ou l'accélération d'un des points du solide.

Soient deux points A et B appartenant au solide (S) lié au repère 1 en mouvement par rapport au repère 0 (fig. 1.4). On peut écrire :

$\vec{V}(A, 1/0) = \vec{V}(B, 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{BA}$
$\vec{\Gamma}(A, 1/0) = \vec{\Gamma}(B, 1/0) + \frac{d^0 \vec{\Omega}(1/0)}{dt} \wedge \vec{BA} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge [\vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{BA}]$

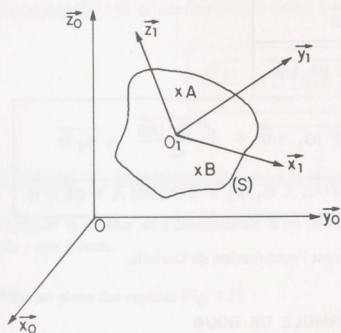


Fig. 1.4. Champ des vitesses et des accélérations.

23. COMPOSITION DES VITESSES ET DES ACCELERATIONS

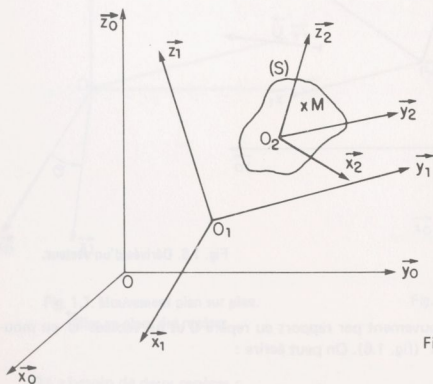


Fig. 1.5. Composition des vitesses et des accélérations.

Soit un point M appartenant au solide (S) lié au repère 2 en mouvement par rapport au repère 1, lui-même en mouvement par rapport au repère 0 (fig. 1.5). On peut écrire :

$\overline{\Omega (2/0)} = \overline{\Omega (2/1)} + \overline{\Omega (1/0)}$
$\overline{V (M, 2/0)} = \overline{V (M, 2/1)} + \overline{V (M, 1/0)}$
$\overline{\Gamma (M, 2/0)} = \overline{\Gamma (M, 2/1)} + \overline{\Gamma (O_1, 1/0)} + \frac{d^0 \overline{\Omega (1/0)}}{dt} \wedge \overline{O_1 M}$ $+ \overline{\Omega (1/0)} \wedge [\overline{\Omega (1/0)} \wedge \overline{O_1 M}] + 2 \overline{\Omega (1/0)} \wedge \overline{V (M, 2/1)}$

Le dernier terme de l'accélération est l'accélération de Coriolis.

24. DERIVEE D'UN VECTEUR. FORMULE DE BOUR

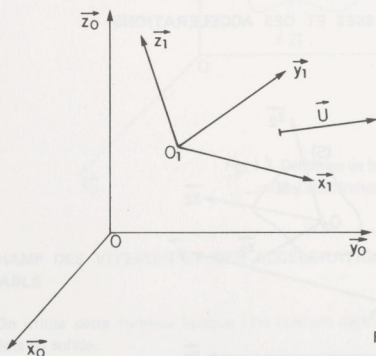


Fig. 1.6. Dérivée d'un vecteur.

Soit un repère 1 en mouvement par rapport au repère 0 et un vecteur \vec{U} en mouvement par rapport au repère 1 (fig. 1.6). On peut écrire :

$\frac{d^0 \vec{U}}{dt} = \frac{d^1 \vec{U}}{dt} + \overline{\Omega (1/0)} \wedge \vec{U}$
--

Cas particulier : Si \vec{U} est fixe dans le repère 1, $\frac{d^1 \vec{U}}{dt} = \vec{0}$; donc :

$$\frac{d^0 \vec{U}}{dt} = \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{U}$$

3. EXERCICE 1 : MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

Calculer la vitesse et l'accélération d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.
Exemple : une fronde.

Mise en place des repères (fig. 1.7)

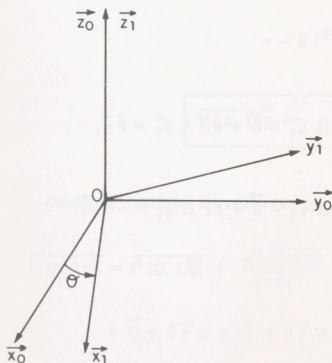


Fig. 1.7. Mouvement plan sur plan.
Mise en place des repères.

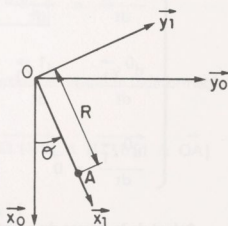


Fig. 1.8. Mouvement plan sur plan.
Définition des points.

On a besoin de deux repères :

- Repère fixe $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- Repère mobile $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. La fronde est portée par l'axe \vec{x}_1 et tourne autour de \vec{z} .

On note θ l'angle du repère fixe vers le repère mobile $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.

Le vecteur rotation instantanée est $\overline{\Omega(1/0)} = \dot{\theta} \vec{z}$ avec $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

Définition des points (fig. 1.8)

On note A la pierre et R le rayon de la fronde :

$$\vec{OA} = R \vec{x}_1$$

Formule de passage et dérivées des vecteurs mobiles

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos \theta \vec{x}_0 + \sin \theta \vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 = -\sin \theta \vec{x}_0 + \cos \theta \vec{y}_0 \\ \vec{z}_1 = \vec{z}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^0 \vec{x}_1}{dt} = \frac{d^1 \vec{x}_1}{dt} + \overline{\Omega(1/0)} \wedge \vec{x}_1 = \vec{0} + \dot{\theta} \vec{z} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta} \vec{y}_1 \\ \frac{d^0 \vec{y}_1}{dt} = \frac{d^1 \vec{y}_1}{dt} + \overline{\Omega(1/0)} \wedge \vec{y}_1 = \vec{0} + \dot{\theta} \vec{z} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\theta} \vec{x}_1 \\ \frac{d^0 \vec{z}_1}{dt} = \vec{0} \end{cases}$$

Calcul de la vitesse du point A

Première méthode : On utilise la définition de la vitesse :

$$\begin{aligned} \overline{V(A, 1/0)} &= \frac{d^0 \vec{OA}}{dt} = \frac{d^0 (R \vec{x}_1)}{dt} = R \frac{d^0 \vec{x}_1}{dt} + \vec{x}_1 \frac{d^0 R}{dt} \\ &= R \dot{\theta} \vec{y}_1 + \vec{0} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{V(A, 1/0)} = R \dot{\theta} \vec{y}_1}$$

Deuxième méthode : On utilise le champ des vitesses d'un solide indéformable :

$$\begin{aligned}\vec{V}(A, 1/0) &= \vec{V}(O, 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{OA} \\ &= \vec{0} + \dot{\theta} \vec{z} \wedge R \vec{x}_1 = \dot{\theta} R \vec{y}_1\end{aligned}$$

Calcul de l'accélération du point A

Première méthode : On utilise la définition de l'accélération :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}(A, 1/0) &= \frac{d^0 \vec{V}(A, 1/0)}{dt} = R \dot{\theta} \frac{d^0 \vec{y}_1}{dt} + R \vec{y}_1 \frac{d^0 \dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta} \vec{y}_1 \frac{d^0 R}{dt} \\ &= -R \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + R \ddot{\theta} \vec{y}_1 + \vec{0}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\Gamma}(A, 1/0) = -R \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + R \ddot{\theta} \vec{y}_1}$$

Deuxième méthode : On utilise le champ des accélérations d'un solide indéformable :

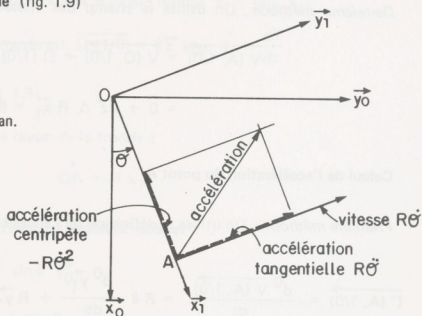
$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}(A, 1/0) &= \vec{\Gamma}(O, 1/0) + \frac{d^0 \vec{\Omega}(1/0)}{dt} \wedge \vec{OA} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge [\vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{OA}] \\ &= \vec{0} + \ddot{\theta} \vec{z} \wedge R \vec{x}_1 + \dot{\theta} \vec{z} \wedge [\dot{\theta} \vec{z} \wedge R \vec{x}_1] \\ &= \ddot{\theta} R \vec{y}_1 + \dot{\theta} \vec{z} \wedge \dot{\theta} R \vec{y}_1 \\ &= \ddot{\theta} R \vec{y}_1 - \dot{\theta}^2 R \vec{x}_1\end{aligned}$$

Cas particulier : Si la vitesse de rotation est constante, $\ddot{\theta} = 0$, l'accélération du point A est uniquement centripète :

$$\vec{\Gamma}(A, 1/0) = -\dot{\theta}^2 R \vec{x}_1$$

Représentation graphique (fig. 1.9)

Fig. 1.9. Mouvement plan sur plan.
Représentation graphique.



4. EXERCICE 2 : COMPOSITION DE TROIS MOUVEMENTS

Une sphère de centre de gravité G est articulée autour d'un point A , extrémité d'un ressort lui-même articulé autour d'un point O fixe. On suppose que le ressort reste rectiligne (fig. 1.10). Calculer la vitesse et l'accélération de G par toutes les méthodes possibles.

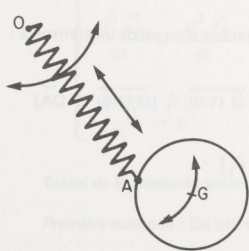
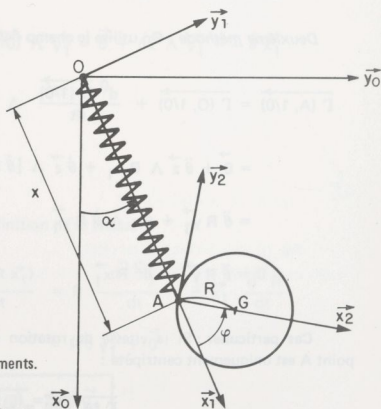


Fig. 1.10. Composition de trois mouvements.

Fig. 1.11. Composition de trois mouvements.

Mise en place des repères,
définition des angles et des points.



Mise en place des repères, définition des angles et des points (fig. 1.11)

Pour étudier ce système on a besoin de trois repères :

- $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe
- $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ repère mobile définissant la première rotation $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$, d'où le vecteur de rotation $\overline{\Omega (1/0)} = \dot{\alpha} \vec{z}$.
- $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ repère mobile définissant la translation et la deuxième rotation.

La translation est définie par la position de l'origine A portée par \vec{x}_1 . Si x est la longueur instantanée du ressort, $\vec{OA} = x \vec{x}_1$.

La deuxième rotation est définie par l'angle φ , $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, d'où le vecteur rotation $\overline{\Omega (2/1)} = \dot{\varphi} \vec{z}$.

\vec{x}_2 porte le centre de gravité G de la sphère de rayon R ; donc $\vec{AG} = R \vec{x}_2$.

Composition des vecteurs rotation instantanée

$$\overline{\Omega (2/0)} = \overline{\Omega (2/1)} + \overline{\Omega (1/0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) \vec{z}$$

Formules de passage

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos \alpha \vec{x}_0 + \sin \alpha \vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 = -\sin \alpha \vec{x}_0 + \cos \alpha \vec{y}_0 \\ \vec{z}_1 = \vec{z}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^0 \vec{x}_1}{dt} = \frac{d^1 \vec{x}_1}{dt} + \overline{\Omega (1/0)} \wedge \vec{x}_1 = \vec{0} + \dot{\alpha} \vec{z} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ \frac{d^0 \vec{y}_1}{dt} = \frac{d^1 \vec{y}_1}{dt} + \overline{\Omega (1/0)} \wedge \vec{y}_1 = \vec{0} + \dot{\alpha} \vec{z} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\alpha} \vec{x}_1 \\ \frac{d^0 \vec{z}_1}{dt} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{x}_2 = \cos \varphi \vec{x}_1 + \sin \varphi \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 = -\sin \varphi \vec{x}_1 + \cos \varphi \vec{y}_1 \\ \vec{z}_2 = \vec{z}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^1 \vec{x}_2}{dt} = \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt} + \overrightarrow{\Omega(2/1)} \wedge \vec{x}_2 = \vec{0} + \dot{\varphi} \vec{z} \wedge \vec{x}_2 = \dot{\varphi} \vec{y}_2 \\ \frac{d^1 \vec{y}_2}{dt} = \frac{d^2 \vec{y}_2}{dt} + \overrightarrow{\Omega(2/1)} \wedge \vec{y}_2 = \vec{0} + \dot{\varphi} \vec{z} \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\varphi} \vec{x}_2 \\ \frac{d^1 \vec{z}_2}{dt} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{x}_2 = \cos(\alpha + \varphi) \vec{x}_0 + \sin(\alpha + \varphi) \vec{y}_0 \\ \vec{y}_2 = -\sin(\alpha + \varphi) \vec{x}_0 + \cos(\alpha + \varphi) \vec{y}_0 \\ \vec{z}_2 = \vec{z}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^0 \vec{x}_2}{dt} = \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \vec{x}_2 = \vec{0} + (\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) \vec{z} \wedge \vec{x}_2 = (\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) \vec{y}_2 \\ \frac{d^0 \vec{y}_2}{dt} = \frac{d^2 \vec{y}_2}{dt} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \vec{y}_2 = \vec{0} + (\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) \vec{z} \wedge \vec{y}_2 = -(\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) \vec{x}_2 \\ \frac{d^0 \vec{z}_2}{dt} = \vec{0} \end{cases}$$

41. CALCUL DE LA VITESSE DE G

Première méthode : En utilisant la définition de la vitesse

$$\overrightarrow{V(G, 2/0)} = \frac{d^0 \overrightarrow{OG}}{dt} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = x \vec{x}_1 + R \vec{x}_2$$

$$\overrightarrow{V(G, 2/0)} = x \frac{d^0 \vec{x}_1}{dt} + \dot{x} \vec{x}_1 + R \frac{d^0 \vec{x}_2}{dt} + \dot{R} \vec{x}_2$$

d'où :

$$\overrightarrow{V(G, 2/0)} = \dot{x} \vec{x}_1 + x \dot{\alpha} \vec{y}_1 + R (\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) \vec{y}_2$$

Deuxième méthode : En utilisant le champ des vitesses d'un solide indéformable

$$\overrightarrow{V(G, 2/0)} = \overrightarrow{V(A, 2/0)} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{AG}$$

$$\bullet \overrightarrow{V(A, 2/0)} = \frac{d^0 \overrightarrow{OA}}{dt} = \dot{x} \vec{x}_1 + x \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

$$\bullet \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{AG} = (\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) \vec{z} \wedge R \vec{x}_2 = R (\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) \vec{y}_2$$

d'où :

$$\overrightarrow{V(G, 2/0)} = \dot{x} \vec{x}_1 + x \dot{\alpha} \vec{y}_1 + R (\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) \vec{y}_2$$

Troisième méthode : En utilisant la composition des vitesses

$$\overrightarrow{V(G, 2/0)} = \overrightarrow{V(G, 2/1)} + \overrightarrow{V(G, 1/0)}$$

Lors du mouvement du repère 2 par rapport au repère 1, x et φ sont variables et α est constant ; donc :

$$\overrightarrow{V(G, 2/1)} = \frac{d^1 \overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d^1 (x \vec{x}_1 + R \vec{x}_2)}{dt} = \dot{x} \vec{x}_1 + R \dot{\varphi} \vec{y}_2$$

Lors du mouvement du repère 1 par rapport au repère 0 seul α est variable, x et φ sont constants ; donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(G, 1/0)} &= \frac{d^0 \overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d^0 (x \vec{x}_1 + R \vec{x}_2)}{dt} = x \frac{d^0 \vec{x}_1}{dt} + R \frac{d^0 \vec{x}_2}{dt} \\ &= x \dot{\alpha} \vec{y}_1 + R \dot{\alpha} \vec{y}_2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\overrightarrow{V(G, 2/0)} = \dot{x} \vec{x}_1 + x \dot{\alpha} \vec{y}_1 + R (\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) \vec{y}_2$$

42. CALCUL DE L'ACCELERATION DE G

Première méthode : En utilisant la définition de l'accélération

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma(G, 2/0)} &= \frac{d^0 \overrightarrow{V(G, 2/0)}}{dt} = \ddot{x} \vec{x}_1 + \dot{x} \dot{\alpha} \vec{y}_1 + \dot{\alpha} x \vec{y}_1 + \dot{\alpha} \dot{x} \vec{y}_1 - \dot{\alpha}^2 x \vec{x}_1 \\ &\quad + R (\ddot{\alpha} + \ddot{\varphi}) \vec{y}_2 - R (\dot{\alpha} + \dot{\varphi})^2 \vec{x}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma(G, 2/0)} &= (\ddot{x} - \dot{\alpha}^2 x) \vec{x}_1 + (2 \dot{x} \dot{\alpha} + \dot{\alpha} x) \vec{y}_1 \\ &\quad - R (\dot{\alpha} + \dot{\varphi})^2 \vec{x}_2 + R (\ddot{\alpha} + \ddot{\varphi}) \vec{y}_2 \end{aligned}$$

Deuxième méthode : En utilisant le champ des accélérations d'un solide indéformable

$$\overrightarrow{\Gamma(G, 2/0)} = \overrightarrow{\Gamma(A, 2/0)} + \frac{d^0 \overrightarrow{\Omega(2/0)}}{dt} \wedge \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge [\overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{AG}]$$

$$\bullet \overrightarrow{V(A, 2/0)} = \dot{x} \vec{x}_1 + x \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

d'où :

$$\overrightarrow{\Gamma(A, 2/0)} = \frac{d^0 \overrightarrow{V(A, 2/0)}}{dt} = \ddot{x} \vec{x}_1 + \dot{x} \dot{\alpha} \vec{y}_1 + \dot{\alpha} \dot{x} \vec{y}_1 + x \ddot{\alpha} \vec{y}_1 - x \dot{\alpha}^2 \vec{x}_1$$

- $\frac{d^0 \overrightarrow{\Omega(2/0)}}{dt} \wedge \overrightarrow{\Lambda AG} = (\ddot{\alpha} + \dot{\varphi}) \vec{z} \wedge R \vec{x}_2 = (\ddot{\alpha} + \dot{\varphi}) R \vec{y}_2$
- $\overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge [\overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{\Lambda AG}] = (\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) \vec{z} \wedge (\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) R \vec{y}_2 = -(\dot{\alpha} + \dot{\varphi})^2 R \vec{x}_2$

d'où :

$$\overrightarrow{\Gamma(G, 2/0)} = (\ddot{x} - \dot{\alpha}^2 x) \vec{x}_1 + (2 \dot{x} \dot{\alpha} + \ddot{\alpha} x) \vec{y}_1 - R (\dot{\alpha} + \dot{\varphi})^2 \vec{x}_2 + R (\ddot{\alpha} + \dot{\varphi}) \vec{y}_2$$

Troisième méthode : En utilisant la composition des accélérations

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma(G, 2/0)} &= \overrightarrow{\Gamma(G, 2/1)} + \overrightarrow{\Gamma(O, 1/0)} + \frac{d^0 \overrightarrow{\Omega(1/0)}}{dt} \wedge \overrightarrow{OG} \\ &\quad + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge [\overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{OG}] + 2 \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{V(G, 2/1)} \end{aligned}$$

- $\overrightarrow{V(G, 2/1)} = \dot{x} \vec{x}_1 + \dot{\varphi} R \vec{y}_2$

d'où :

$$\overrightarrow{\Gamma(G, 2/1)} = \frac{d^1 \overrightarrow{V(G, 2/1)}}{dt} = \ddot{x} \vec{x}_1 + \dot{\varphi} R \vec{y}_2 - \dot{\varphi}^2 R \vec{x}_2$$

- $\overrightarrow{\Gamma(O, 1/0)} = \frac{d^0 \overrightarrow{V(O, 1/0)}}{dt} = \vec{0}$

- $\frac{d^0 \overrightarrow{\Omega(1/0)}}{dt} \wedge \overrightarrow{OG} = \ddot{\alpha} \vec{z} \wedge (x \vec{x}_1 + R \vec{x}_2) = \ddot{\alpha} x \vec{y}_1 + \ddot{\alpha} R \vec{y}_2$

- $\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge [\overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{OG}] &= \dot{\alpha} \vec{z} \wedge [\dot{\alpha} \vec{z} \wedge (x \vec{x}_1 + R \vec{x}_2)] \\ &= \dot{\alpha} \vec{z} \wedge [\dot{\alpha} x \vec{y}_1 + \dot{\alpha} R \vec{y}_2] \\ &= -\dot{\alpha}^2 x \vec{x}_1 - \dot{\alpha}^2 R \vec{x}_2 \end{aligned}$

- $2 \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{V(G, 2/1)} = 2 \dot{\alpha} \vec{z} \wedge (\dot{x} \vec{x}_1 + \dot{\varphi} R \vec{y}_2) = 2 \dot{\alpha} \dot{x} \vec{y}_1 - 2 \dot{\alpha} \dot{\varphi} R \vec{x}_2$

d'où :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(G, 2/0) = & (\ddot{x} - \dot{\alpha}^2 x) \vec{x}_1 + (2 \dot{x} \dot{\alpha} + \ddot{\alpha} x) \vec{y}_1 \\ & - R (\dot{\alpha} + \dot{\varphi})^2 \vec{x}_2 + R (\ddot{\alpha} + \ddot{\varphi}) \vec{y}_2 \end{aligned}$$

Remarque : Dans l'étude d'un système peu compliqué (pas plus de trois repères), ce sont souvent les définitions des vitesses et des accélérations qui donnent les calculs les plus simples.

Chapitre 3

COMMENT ABORDER UN PROBLEME DE DYNAMIQUE

1. RAPPELS SUR LES INERTIES

11. DEFINITION

Soient un solide (S) de centre de gravité G et un repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à ce solide (fig. 1.12). On définit le **tenseur d'inertie** \overline{I} (solide S/G) du solide (S) par rapport à son centre de gravité G, exprimé dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par :

$$\overline{I} \text{ (solide S/G)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

A, B et C sont les moments d'inertie par rapport au centre de gravité G sur les axes \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} . D, E et F sont les produits d'inertie par rapport au centre de gravité G sur les axes \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} .

$$A = \iiint_{P \in (S)} (y^2 + z^2) dm_P$$

$$B = \iiint_{P \in (S)} (x^2 + z^2) dm_P$$

$$C = \iiint_{P \in (S)} (x^2 + y^2) dm_P$$

$$D = \iiint_{P \in (S)} y z dm_P$$

$$E = \iiint_{P \in (S)} x z dm_P$$

$$F = \iiint_{P \in (S)} x y dm_P$$

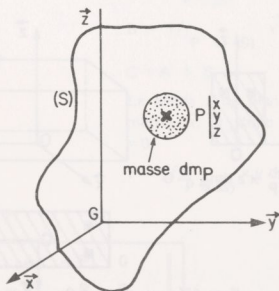


Fig. 1.12. Définition du tenseur d'inertie.

techni**D**

ISBN 2.7 108-0458-1

BIBLIOTHEQUE NATIONALE DE FRANCE



3 7502 00395439 5

VAN SEVEREN

Participant d'une démarche de transmission de fictions ou de savoirs rendus difficiles d'accès par le temps, cette édition numérique redonne vie à une œuvre existant jusqu'alors uniquement sur un support imprimé, conformément à la loi n° 2012-287 du 1^{er} mars 2012 relative à l'exploitation des Livres Indisponibles du XX^e siècle.

Cette édition numérique a été réalisée à partir d'un support physique parfois ancien conservé au sein des collections de la Bibliothèque nationale de France, notamment au titre du dépôt légal. Elle peut donc reproduire, au-delà du texte lui-même, des éléments propres à l'exemplaire qui a servi à la numérisation.

Cette édition numérique a été fabriquée par la société FeniXX au format PDF.

La couverture reproduit celle du livre original conservé au sein des collections de la Bibliothèque nationale de France, notamment au titre du dépôt légal.

*

La société FeniXX diffuse cette édition numérique en vertu d'une licence confiée par la Sofia – Société Française des Intérêts des Auteurs de l'Écrit – dans le cadre de la loi n° 2012-287 du 1^{er} mars 2012.

Avec le soutien du

