

*Les épreuves corrigées des grandes écoles commerciales*

# problèmes corrigés de MATHÉMATIQUES

*posés aux concours*

H.E.C. E.S.C.P. Europe  
ECRICOME et E.S.C.

*OPTION TECHNOLOGIQUE*

Tome 2

*solutions proposées par*

Laurent  
BRETONNIÈRE



ellipses

Problèmes corrigés de  
MATHÉMATIQUES



*Les épreuves corrigées des grandes écoles commerciales*

problèmes corrigés de  
**MATHÉMATIQUES**

posés aux concours

H.E.C., E.S.C.P. Europe  
ECRICOME et E.S.C.

OPTION TECHNOLOGIQUE

*solutions proposées par*

Laurent BRETONNIÈRE

Professeur agrégé de mathématiques  
en classe préparatoire ECE



ISBN 9782340-048980

©Ellipses Édition Marketing S.A., 2015

32, rue Bague 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

[www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Énoncés des épreuves</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>ESCP Europe 2014, énoncé</b>	<b>10</b>
	Exercice 1 (probabilités continues) . . . . .	10
	Exercice 2 (suite et intégrale) . . . . .	10
	Exercice 3 (suites, fonction et matrices) . . . . .	11
	Exercice 4 (probabilités discrètes) . . . . .	13
<b>2</b>	<b>ECRICOME 2014, énoncé</b>	<b>15</b>
	Exercice 1 (suite et fonctions) . . . . .	15
	Exercice 2 (probabilités discrètes) . . . . .	15
	Exercice 3 (probabilités continues) . . . . .	18
<b>3</b>	<b>ESC 2014, énoncé</b>	<b>20</b>
	Exercice 1 (suites et matrices) . . . . .	20
	Exercice 2 (suite et fonctions) . . . . .	21
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	22
	Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	23
<b>4</b>	<b>ESCP Europe 2013, énoncé</b>	<b>24</b>
	Exercice 1 (suite et intégrales) . . . . .	24
	Exercice 2 (probabilités discrètes) . . . . .	24
	Exercice 3 (couple de variables aléatoires) . . . . .	25
	Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	26
<b>5</b>	<b>ECRICOME 2013, énoncé</b>	<b>28</b>
	Exercice 1 (suite et matrices) . . . . .	28
	Exercice 2 (fonctions et suite implicite) . . . . .	29
	Exercice 3 (probabilités discrètes et continues) . . . . .	30
<b>6</b>	<b>ESC 2013, énoncé</b>	<b>33</b>
	Exercice 1 (suite et matrices) . . . . .	33
	Exercice 2 (étude d'une fonction) . . . . .	34
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	34
	Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	36

<b>7</b>	<b>ESCP Europe 2012, énoncé</b>	<b>37</b>
	Exercice 1 (matrices) . . . . .	37
	Exercice 2 (suite et intégrales) . . . . .	38
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	39
	Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	40
<b>8</b>	<b>ECRICOME 2012, énoncé</b>	<b>41</b>
	Exercice 1 (matrice, suite, fonctions et intégrales) . . . . .	41
	Exercice 2 (suite et fonction) . . . . .	42
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	43
<b>9</b>	<b>ESC 2012, énoncé</b>	<b>45</b>
	Exercice 1 (suite et matrices) . . . . .	45
	Exercice 2 (fonctions et suite) . . . . .	46
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	47
	Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	48
<b>10</b>	<b>ESCP Europe 2011, énoncé</b>	<b>49</b>
	Exercice 1 (matrices) . . . . .	49
	Exercice 2 (suite et fonctions) . . . . .	49
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	50
	Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	52
<b>11</b>	<b>ECRICOME 2011, énoncé</b>	<b>54</b>
	Exercice 1 (fonction et suite) . . . . .	54
	Exercice 2 (suites et matrices) . . . . .	55
	Exercice 3 (probabilités) . . . . .	56
<b>12</b>	<b>ESC 2011, énoncé</b>	<b>60</b>
	Exercice 1 (matrices et probabilités) . . . . .	60
	Exercice 2 (étude d'une fonction) . . . . .	61
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	62
	Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	63
<b>13</b>	<b>ESCP Europe 2010, énoncé</b>	<b>64</b>
	Exercice 1 (suite et fonctions) . . . . .	64
	Exercice 2 (suites et matrices) . . . . .	65
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	66
	Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	67
<b>14</b>	<b>ECRICOME 2010, énoncé</b>	<b>69</b>
	Exercice 1 (suite et matrices) . . . . .	69
	Exercice 2 (fonction, probabilités continues) . . . . .	70
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	71
<b>15</b>	<b>ESC 2010, énoncé</b>	<b>73</b>

Exercice 1 (suites et matrices) . . . . .	73
Exercice 2 (suites et fonction) . . . . .	73
Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	74
Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	75
<b>16 HEC 2009, énoncé</b>	<b>76</b>
Exercice 1 (suite et fonctions) . . . . .	76
Exercice 2 (probabilités discrètes) . . . . .	77
Exercice 3 (probabilités continues) . . . . .	78
Exercice 4 (suites et matrices) . . . . .	79
<b>17 ECRICOME 2009, énoncé</b>	<b>80</b>
Exercice 1 (suite et matrices) . . . . .	80
Exercice 2 (fonction et intégrales) . . . . .	81
Exercice 3 (probabilités) . . . . .	83
<b>18 ESC 2009, énoncé</b>	<b>86</b>
Exercice 1 (suite et matrices) . . . . .	86
Exercice 2 (fonction et suite) . . . . .	87
Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	88
Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	89
<b>19 HEC 2008, énoncé</b>	<b>90</b>
Exercice 1 (suites et intégrales) . . . . .	90
Exercice 2 (matrices) . . . . .	91
Exercice 3 (probabilités continues) . . . . .	92
Exercice 4 (probabilités discrètes) . . . . .	93
<b>20 ECRICOME 2008, énoncé</b>	<b>95</b>
Exercice 1 (marche aléatoire) . . . . .	95
Exercice 2 (suite et fonctions) . . . . .	97
Exercice 3 (probabilités discrètes et continues) . . . . .	98
<b>21 ESC 2008, énoncé</b>	<b>101</b>
Exercice 1 (chaîne de Markov) . . . . .	101
Exercice 2 (suite et fonctions) . . . . .	103
Exercice 3 (probabilités) . . . . .	104
<b>II Corrigés des épreuves</b>	<b>105</b>
<b>1 ESCP Europe 2014, corrigé</b>	<b>106</b>
Exercice 1 (probabilités continues) . . . . .	106
Exercice 2 (suite et intégrale) . . . . .	107
Exercice 3 (suites, fonction et matrices) . . . . .	111
Exercice 4 (probabilités discrètes) . . . . .	115

<b>2</b>	<b>ERICOME 2014, corrigé</b>	<b>122</b>
	Exercice 1 (suite et fonctions) . . . . .	122
	Exercice 2 (probabilités discrètes) . . . . .	124
	Exercice 3 (probabilités continues) . . . . .	129
<b>3</b>	<b>ESC 2014, corrigé</b>	<b>133</b>
	Exercice 1 (suites et matrices) . . . . .	133
	Exercice 2 (suite et fonctions) . . . . .	137
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	141
	Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	142
<b>4</b>	<b>ESCP Europe 2013, corrigé</b>	<b>146</b>
	Exercice 1 (suite et intégrales) . . . . .	146
	Exercice 2 (probabilités discrètes) . . . . .	148
	Exercice 3 (couple de variables aléatoires) . . . . .	150
	Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	153
<b>5</b>	<b>ERICOME 2013, corrigé</b>	<b>157</b>
	Exercice 1 (suite et matrices) . . . . .	157
	Exercice 2 (fonctions et suite implicite) . . . . .	160
	Exercice 3 (probabilités discrètes et continues) . . . . .	162
<b>6</b>	<b>ESC 2013, corrigé</b>	<b>165</b>
	Exercice 1 (suite et matrices) . . . . .	165
	Exercice 2 (étude d'une fonction) . . . . .	168
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	169
	Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	170
<b>7</b>	<b>ESCP Europe 2012, corrigé</b>	<b>173</b>
	Exercice 1 (matrices) . . . . .	173
	Exercice 2 (suite et intégrales) . . . . .	176
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	178
	Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	182
<b>8</b>	<b>ERICOME 2012, corrigé</b>	<b>186</b>
	Exercice 1 (matrice, suite, fonctions et intégrales) . . . . .	186
	Exercice 2 (suite et fonction) . . . . .	189
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	193
<b>9</b>	<b>ESC 2012, corrigé</b>	<b>199</b>
	Exercice 1 (suite et matrices) . . . . .	199
	Exercice 2 (fonctions et suite) . . . . .	201
	Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	204
	Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	206
<b>10</b>	<b>ESCP Europe 2011, corrigé</b>	<b>209</b>

---

Exercice 1 (matrices) . . . . .	209
Exercice 2 (suite et fonctions) . . . . .	211
Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	213
Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	218
<b>11 ECRICOME 2011, corrigé</b>	<b>222</b>
Exercice 1 (fonction et suite) . . . . .	222
Exercice 2 (suites et matrices) . . . . .	224
Exercice 3 (probabilités) . . . . .	228
<b>12 ESC 2011, corrigé</b>	<b>232</b>
Exercice 1 (matrices et probabilités) . . . . .	232
Exercice 2 (étude d'une fonction) . . . . .	235
Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	237
Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	238
<b>13 ESCP Europe 2010, corrigé</b>	<b>241</b>
Exercice 1 (suite et fonctions) . . . . .	241
Exercice 2 (suites et matrices) . . . . .	244
Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	246
Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	250
<b>14 ECRICOME 2010, corrigé</b>	<b>254</b>
Exercice 1 (suite et matrices) . . . . .	254
Exercice 2 (fonction, probabilités continues) . . . . .	257
Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	261
<b>15 ESC 2010, corrigé</b>	<b>266</b>
Exercice 1 (suites et matrices) . . . . .	266
Exercice 2 (suites et fonction) . . . . .	268
Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	270
Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	272
<b>16 HEC 2009, corrigé</b>	<b>276</b>
Exercice 1 (suite et fonctions) . . . . .	276
Exercice 2 (probabilités discrètes) . . . . .	279
Exercice 3 (probabilités continues) . . . . .	281
Exercice 4 (suites et matrices) . . . . .	284
<b>17 ECRICOME 2009, corrigé</b>	<b>287</b>
Exercice 1 (suite et matrices) . . . . .	287
Exercice 2 (fonction et intégrales) . . . . .	290
Exercice 3 (probabilités) . . . . .	294
<b>18 ESC 2009, corrigé</b>	<b>298</b>
Exercice 1 (suite et matrices) . . . . .	298

Exercice 2 (fonction et suite) . . . . .	300
Exercice 3 (probabilités discrètes) . . . . .	304
Exercice 4 (probabilités continues) . . . . .	305
<b>19 HEC 2008, corrigé</b>	<b>308</b>
Exercice 1 (suites et intégrales) . . . . .	308
Exercice 2 (matrices) . . . . .	311
Exercice 3 (probabilités continues) . . . . .	313
Exercice 4 (probabilités discrètes) . . . . .	316
<b>20 ECRICOME 2008, corrigé</b>	<b>319</b>
Exercice 1 (marche aléatoire) . . . . .	319
Exercice 2 (suite et fonctions) . . . . .	324
Exercice 3 (probabilités discrètes et continues) . . . . .	327
<b>21 ESC 2008, corrigé</b>	<b>330</b>
Exercice 1 (chaîne de Markov) . . . . .	330
Exercice 2 (suite et fonctions) . . . . .	334
Exercice 3 (probabilités) . . . . .	339

Première partie

Énoncés des épreuves

# 1 ESCP Europe 2014, énoncé

## Exercice 1 (probabilités continues)

Soit  $a$  un réel strictement positif et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2(t-a)} & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1/ a/ Soit  $B$  un réel supérieur ou égal à  $a$ . Calculer l'intégrale  $\int_a^B 2e^{-2(t-a)} dt$ .

b/ En déduire la valeur de l'intégrale  $\int_a^{+\infty} 2e^{-2(t-a)} dt$ .

2/ Montrer que  $f$  peut être considérée comme une densité de probabilité.

*Dans la suite, on note  $X$  une variable aléatoire admettant  $f$  comme densité.*

3/ Montrer que la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$  est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-a)} & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4/ On note  $Y$  la variable aléatoire définie par :  $Y = X - a$ .

a/ Déterminer la fonction de répartition  $F_Y$  de  $Y$ .

b/ En déduire que  $Y$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c/ Donner la valeur de l'espérance de  $Y$ .

d/ En déduire que  $X$  admet une espérance et donner sa valeur.

## Exercice 2 (suite et intégrale)

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 1$ , et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$$

1/ On note  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs réelles telle que : pour tout  $t \geq 0$ ,

$$g(t) = (1+t) \ln(1+t) - t$$

a/ On note  $g'$  la fonction dérivée de  $g$ . Calculer  $g'(t)$  pour tout réel  $t \geq 0$ .

b/ En déduire la valeur de  $u_1$ .

2/ Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \ln(1+t)$$

- a/ On note  $f'$  et  $f''$  respectivement, les dérivées première et seconde de  $f$ . Calculer pour tout réel  $t$  de  $[0, 1]$ ,  $f'(t)$  et  $f''(t)$ .
- b/ Étudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  et tracer la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé.  
(on donne :  $\ln 2 \simeq 0,7$ )
- c/ Montrer que la fonction  $f$  est concave sur  $[0, 1]$ .
- 3/ a/ Justifier pour tout réel  $t$  de  $[0, 1]$ , l'encadrement suivant :

$$0 \leq \ln(1+t) \leq \ln 2$$

- b/ Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :  $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$ .
- c/ En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et a pour limite 0.
- 4/ a/ À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel  $n$ , la relation suivante :

$$u_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n$$

(on pourra remarquer qu'une primitive de la fonction  $t \mapsto 1$  est  $t \mapsto 1+t$ )

- b/ En déduire que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$(n+1)u_n \leq 2(\ln 2)^{n+1}$$

- c/ Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
- d/ En utilisant la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :

$$(n+2)u_n \geq 2(\ln 2)^{n+1}$$

- e/ Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n}{2(\ln 2)^{n+1}}$ .

### Exercice 3 (suites, fonction et matrices)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs réelles telle que : pour tout  $x \geq 0$ ,

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = \frac{1}{2}$ , et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- 1/ a/ On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Calculer pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $f'(x)$ .
- b/ Dresser le tableau de variation de  $f$  en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Placer les réels 1 et  $f(1)$  dans ce tableau.

2/ a/ Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , le réel  $u_n$  appartient à l'intervalle  $[0, 1]$ .

b/ Établir pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ , l'inégalité suivante :  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ .

c/ En déduire que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4} |u_n - 1|$$

d/ Établir pour tout entier naturel  $n$ , l'inégalité suivante :

$$|u_n - 1| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

e/ En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et donner sa limite.

3/ Soit  $A$ ,  $J$  et  $I$  les matrices d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a/ Montrer que  $J^2 = 2J$ .

b/ Établir pour tout entier naturel  $n$ , la relation suivante :

$$A^n = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$$

(on rappelle que  $A^0 = I$ )

c/ Donner sous forme matricielle, l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

4/ On note  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les deux suites définies par :  $p_0 = 1$ ,  $q_0 = 2$ , et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$$

On considère pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la matrice à deux lignes et une colonne  $X_n$  définie par :

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

a/ Établir par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $X_n = A^n X_0$ .

b/ En déduire l'expression de  $X_n$  en fonction de  $n$  et donner les valeurs de  $p_n$  et  $q_n$  en fonction de  $n$ .

5/ a/ À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité :

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

b/ Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et retrouver la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## Exercice 4 (probabilités discrètes)

Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, numérotés 1, 2, 3 et 4, d'un carré selon le protocole suivant :

- À l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet 1.
- Si à l'instant  $n$  ( $n \geq 0$ ) la puce se trouve sur le sommet 1, elle sera à l'instant  $n + 1$  sur le sommet 1 avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  et sur le sommet 3 avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ .
- Si à l'instant  $n$  ( $n \geq 1$ ) la puce se trouve sur le sommet 2, elle sera à l'instant  $n + 1$  sur le sommet 1 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  et sur le sommet 3 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ .
- Si à l'instant  $n$  ( $n \geq 1$ ) la puce se trouve sur le sommet 3, elle sera à l'instant  $n + 1$  sur le sommet 2 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  et sur le sommet 4 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ .
- Si à l'instant  $n$  ( $n \geq 1$ ) la puce se trouve sur le sommet 4, elle sera à l'instant  $n + 1$  sur le sommet 2 avec la probabilité  $\frac{1}{3}$  et sur le sommet 4 avec la probabilité  $\frac{2}{3}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro du sommet occupé par la puce à l'instant  $n$  et on a donc  $P([X_0 = 1]) = 1$ .

- 1/ a/ Déterminer la loi de  $X_1$ .  
b/ Calculer l'espérance et la variance de  $X_1$ .
- 2/ Déterminer la loi de  $X_2$ .
- 3/ a/ En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$P([X_{n+1} = 1]) = \frac{2}{3}P([X_n = 1]) + \frac{1}{2}P([X_n = 2])$$

- b/ Exprimer de même, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2,  $P([X_{n+1} = 2])$ ,  $P([X_{n+1} = 3])$ ,  $P([X_{n+1} = 4])$  en fonction de  $P([X_n = 1])$ ,  $P([X_n = 2])$ ,  $P([X_n = 3])$  et  $P([X_n = 4])$ .
- c/ Vérifier que les relations précédentes sont encore valables pour  $n = 1$  et  $n = 0$ .
- d/ Que vaut pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la somme :

$$P([X_n = 1]) + P([X_n = 2]) + P([X_n = 3]) + P([X_n = 4]) \quad ?$$

- 4/ On pose  $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on note  $U_n$  la matrice à trois lignes et une colonne définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} P([X_n = 1]) \\ P([X_n = 2]) \\ P([X_n = 3]) \end{pmatrix}$$

De plus, on pose :  $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

En utilisant les relations trouvées précédemment, établir pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la relation :

$$U_{n+1} = AU_n + B$$

- 5/ a/ Déterminer une matrice  $L$  à trois lignes et une colonne vérifiant :

$$L = AL + B$$

- b/ Établir pour tout entier naturel  $n$ , la relation suivante :

$$U_n = A^n(U_0 - L) + L$$

- 6/ On pose  $C = 6A$ . Soit  $R$ ,  $D$  et  $Q$  les matrices d'ordre 3 définies par :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- a/ Calculer  $RQ$ . En déduire que  $R$  est inversible et donner  $R^{-1}$ , où  $R^{-1}$  désigne la matrice inverse de la matrice  $R$ .
- b/ Calculer  $CR - RD$ .
- c/ En déduire pour tout entier naturel  $n$ , la relation suivante :

$$A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^n R^{-1}$$

- 7/ On admet que la limite de la matrice  $U_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , est une matrice  $U$  dont les coefficients sont obtenus en prenant la limite des coefficients de  $U_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Déterminer  $U$  et préciser  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([X_n = 4])$ .

## 2 ECRICOME 2014, énoncé

### Exercice 1 (suite et fonctions)

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[ , \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1/ Calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

2/ Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  puis dresser le tableau des variations de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ .

3/ Prouver que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution sur  $]0, +\infty[$ .  
On la note  $\alpha$ .

4/ Justifier que :

$$\alpha \in [1, e] \quad \text{et} \quad f(\alpha) = \alpha.$$

5/ Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  et préciser la monotonie de la fonction  $f$ .

6/ Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq e.$$

7/ Vérifier que :

$$\forall x \in [1, e], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

En déduire, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

8/ Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}.$$

9/ Prouver que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et préciser sa limite.

### Exercice 2 (probabilités discrètes)

Cet exercice est composé de deux parties.

La partie **I** consiste à calculer en fonction de  $n$  les termes d'une suite récurrente  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

La partie **II** étudie l'obtention du premier double PILE lors de lancers d'une pièce déséquilibrée.

Les résultats de la partie **I** peuvent être utilisés librement dans la partie **II**.

## PARTIE I – Étude d’une suite.

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{4}{9}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n.$$

On considère également les quatre matrices carrées d’ordre 2 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = QAP$$

ainsi que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , les matrices colonnes :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_n = QX_n.$$

- 1/ Vérifier que les matrices  $PQ$  et  $D$  sont diagonales (*les calculs devront être inscrits sur la copie*).
- 2/ En déduire que  $P$  est inversible et expliciter  $P^{-1}$ .
- 3/ Soit  $n \geq 1$ . Donner, en la justifiant, la relation liant  $X_{n+1}$ ,  $A$  et  $X_n$ . Prouver que  $PY_n = X_n$ . En déduire que :

$$Y_{n+1} = DY_n.$$

- 4/ Prouver que :

$$\forall n \geq 1, \quad Y_n = D^{n-1}Y_1.$$

- 5/ Calculer  $Y_1$  et expliciter les coefficients de la matrice colonne  $Y_n$ .
- 6/ En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{4}{9} \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} - \left( -\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right].$$

## PARTIE II – Probabilités discrètes.

On effectue des lancers successifs et indépendants d’une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d’obtenir PILE vaut  $\frac{2}{3}$ .

On suppose donnée un espace probabilisé muni d’une probabilité  $P$  modélisant cette expérience.

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit qu’il y a apparition d’un double PILE au rang  $n$  si on obtient PILE au  $(n-1)$ -ième lancer et PILE au  $n$ -ième lancer.

On note :

- pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $F_n$  l'événement « on obtient FACE au  $n$ -ième lancer » ;
- pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $D_n$  l'événement « on obtient un double PILE au rang  $n$  pour la première fois » ;
- pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $v_n = P(D_n)$ . On conviendra que  $v_1 = 0$ .

Par exemple, si les lancers donnent successivement :

« PILE, FACE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE »

alors l'événement  $D_8$  est réalisé.

1/ On lance  $n$  fois de suite la pièce de monnaie. On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours de ces  $n$  lancers.

- a/ Déterminer la loi de  $X$  (*une réponse argumentée est attendue*). Préciser l'ensemble  $X(\Omega)$  des valeurs prises par la variable aléatoire  $X$  ainsi que la valeur de  $P(X = k)$  lorsque  $k \in X(\Omega)$ .
- b/ Donner la valeur de l'espérance  $E(X)$  et de la variance  $V(X)$  de la variable aléatoire  $X$ .

2/ On lance indéfiniment la pièce. On note  $Y$  le rang d'apparition du premier PILE, s'il apparaît.

- a/ Déterminer la loi de  $Y$  (*une réponse argumentée est attendue*). Préciser l'ensemble  $Y(\Omega)$  des valeurs prises par la variable aléatoire  $Y$  ainsi que la valeur de  $P(Y = k)$  lorsque  $k \in Y(\Omega)$ .
- b/ Donner la valeur de l'espérance  $E(Y)$  et de la variance  $V(Y)$  de la variable aléatoire  $Y$ .

3/ Calculer  $v_2$  et  $v_3$ . Vérifier que :

$$v_3 = \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1.$$

*Rappelons que l'on a convenu que  $v_1 = 0$ .*

4/ Soit  $n \geq 2$ . On suppose qu'au premier lancer, PILE est obtenu et on souhaite la réalisation de l'événement  $D_{n+2}$ .

Quel est alors le résultat du second lancer ? À l'issue de ces deux premiers lancers, combien de lancers reste-t-il à effectuer pour que  $D_{n+2}$  puisse se réaliser ?

*Les réponses devront être justifiées.*

En déduire que :

$$P_{F_1}(D_{n+2}) = \frac{1}{3}v_n.$$

5/ Pour  $n \geq 2$ , justifier que :

$$P_{F_1}(D_{n+2}) = v_{n+1}.$$

6/ À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n.$$

En outre, d'après la question II/3/, cette formule est vraie pour  $n = 1$ .

7/ À l'aide de la partie I/, justifier que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(D_n) = \frac{4}{9} \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} - \left( -\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right].$$

8/ Pour tout entier  $n \geq 2$ , on note  $E_n$  l'événement « il n'y a pas eu deux PILE consécutifs au cours des  $n$  premiers lancers ».

Exprimer l'événement  $\overline{E_n}$  en fonction des événements  $D_2, \dots, D_n$ . En déduire que :

$$P(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^n v_k.$$

9/ Calculer la limite de  $P(E_n)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

### Exercice 3 (probabilités continues)

On considère les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies respectivement sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{1 + e^x}, \quad g(x) = -2 \ln(1 + e^{-x})$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1/ Soit  $x \geq 0$ . Calculer  $f'(x)$  et  $g'(x)$  puis vérifier que :

$$h(x) = -f'(x) \quad \text{et} \quad f(x) = g'(x).$$

2/ Soit  $A \geq 0$ . Justifier que :

$$\int_0^A h(x) dx = 1 - f(A).$$

Que vaut  $\int_0^A f(x) dx$  ?

3/ Soit  $A \geq 0$ . À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^A x.h(x) dx = -Af(A) + g(A) - g(0).$$

- 4/ La fonction  $h$  est-elle continue en 0? Une réponse argumentée est attendue.  
 5/ Prouver que  $h$  est une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par  $Z$  une variable aléatoire dont  $h$  est une densité.

- 6/ Démontrer que la fonction de répartition  $H$  de  $Z$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} \text{si } x \geq 0, & H(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ \text{si } x < 0, & H(x) = 0. \end{cases}$$

- 7/ Calculer les probabilités suivantes :

$$P(Z \geq \ln(2)), \quad P(\ln(2) \leq Z \leq \ln(8)) \quad \text{et} \quad P_{[Z \geq \ln(2)]}(Z \leq \ln(8))$$

*On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.*

- 8/ Déterminer la médiane de  $Z$ , c'est-à-dire la valeur de  $x$  pour laquelle

$$H(x) = \frac{1}{2}.$$

- 9/ Établir que  $Z$  possède une espérance et donner la valeur de  $E(Z)$ .

– FIN DE L'ÉNONCÉ –

### 3 ESC 2014, énoncé

#### Exercice 1 (suites et matrices)

On considère les matrices  $N = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $M = \frac{1}{20}N$ .

On pose :  $A = N - 4I$  et  $B = N - 12I$ .

- 1/ Vérifier que  $AB = BA = 0$ . En déduire que :  $NA = 12A$  et que  $NB = 4B$ .
- 2/ On considère les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $a_0 = \frac{1}{8}$ ,  $b_0 = -\frac{1}{8}$  et les relations :

$$a_{n+1} = 12a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 4b_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- a/ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$N^n = a_n A + b_n B$$

- b/ Quel est le type des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , des expressions de  $a_n$  et de  $b_n$  en fonction de  $n$ .

- c/ Montrer que :  $M^n = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5}\right)^n A - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{5}\right)^n B$  pour tout entier naturel  $n$ .

- 3/ Un particulier a acheté une poule. La poule pond chaque semaine entre 0 et 3 œufs. Si une semaine donnée, la poule ne pond pas d'œuf, son propriétaire décide de la manger à la fin de la semaine (elle ne pondra donc plus d'œufs les semaines suivantes). On note pour tout entier  $n$  non nul,

- $U_n$  l'événement « la poule est vivante lors de la  $n$ -ème semaine et pond un œuf » ;
- $D_n$  l'événement « la poule est vivante lors de la  $n$ -ème semaine et pond deux œufs » ;
- $T_n$  l'événement « la poule est vivante lors de la  $n$ -ème semaine et pond trois œufs ».

On note  $u_n$ ,  $d_n$  et  $t_n$  leurs probabilités respectives. On suppose que la première semaine la poule pond un œuf puis que pour tout entier naturel non nul, on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{7}{20}u_n + \frac{1}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ d_{n+1} &= \frac{3}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ t_{n+1} &= \frac{9}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{7}{20}t_n \end{cases}$$

On note  $X_n$  la matrice  $\begin{pmatrix} u_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix}$ .

- a/ Justifier que :  $X_{n+1} = MX_n$ , pour tout entier  $n \geq 1$ .  
 b/ Montrer que :  $X_n = M^{n-1}X_1$ , pour tout entier  $n \geq 1$ .  
 c/ En déduire que pour tout  $n \geq 1$  :

$$u_n = \frac{3}{8} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} ; \quad d_n = \frac{3}{8} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} ;$$

$$\text{et } t_n = \frac{9}{8} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{9}{8} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

- d/ Que représente le nombre  $1 - (u_n + d_n + t_n)$  ?  
 e/ Vérifier que pour tout entier  $n \geq 1$  on a :

$$u_n + 2d_n + 3t_n = \frac{9}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{7}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} (u_n + 2d_n + 3t_n)$  converge et calculer sa somme.  
 Que représente ce nombre ?

## Exercice 2 (suite et fonctions)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ . On note  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

- 1/ a/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Montrer que la courbe  $\mathcal{C}$  admet en  $+\infty$  une droite asymptote  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x - 2$ .  
 b/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  puis  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de  $f$  en  $-\infty$  ?
- 2/ Calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ . Dresser le tableau des variations de  $f$  en y faisant figurer les limites en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- 3/ Justifier que  $\mathcal{C}$  coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses  $\alpha$  et  $\beta$ , le premier étant positif, le deuxième étant négatif.  
 On donne  $e \simeq 2,7$ . Prouver que  $\alpha \in ]1, 2[$ .
- 4/ Tracer l'allure de  $\mathcal{C}$  et de  $\mathcal{D}$ . On donne  $\alpha \simeq 1,84$  et  $\beta \simeq -1,14$ .
- 5/ On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2 - e^{-x}$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .
- a/ Montrer que pour tout réel  $x$ , on a :  $g(x) = x$  si et seulement si  $f(x) = 0$ .  
 b/ Calculer la dérivée de  $g$ . En déduire le sens de variation de  $g$ .  
 Montrer alors que  $1 \leq u_n \leq 2$  pour tout entier naturel  $n$ .  
 c/ Établir que pour tout réel  $x$  appartenant à  $[1, 2]$  :  $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$ .

d/ En déduire, en appliquant l'inégalité des accroissements finis que :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$$

pour tout entier naturel  $n$ .

e/ Montrer par récurrence que :  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$  pour tout entier naturel  $n$ .

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### Exercice 3 (probabilités discrètes)

Un immeuble est constitué de 3 étages. Dans le hall de l'immeuble on peut accéder à un ascenseur qui distribue chaque étage. 5 personnes montent ensemble dans l'ascenseur. On suppose que chacune d'elles souhaite monter à l'un des trois étages de manière équiprobable et indépendamment des 4 autres. On suppose également que l'ascenseur dessert les étages demandés dans l'ordre et qu'il ne revient pas en arrière.

On note  $X_1$  la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 1,  $X_2$  la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 2 et  $X_3$  celle égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 3.

1/ a/ Reconnaître la loi de  $X_1$ . Décrire l'ensemble  $X_1(\Omega)$  des valeurs prises par  $X_1$ . Donner  $P(X_1 = k)$  pour chaque  $k$  appartenant à  $X_1(\Omega)$ .

b/ Donner  $E(X_1)$  et  $V(X_1)$ .

c/ Expliquer pourquoi  $X_2$  et  $X_3$  suivent la même loi que  $X_1$ .

2/ a/ Justifier que  $X_1 + X_2 + X_3 = 5$ .

b/ En déduire la probabilité  $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$ .

c/ Montrer que la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois est  $\frac{1}{81}$ .

3/ On considère la variable aléatoire  $Z$  égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur. D'après 2/c/ on a  $P(Z = 1) = \frac{1}{81}$ . Déterminer l'ensemble  $Z(\Omega)$  des valeurs prises par  $Z$ .

4/ Soit  $Y_1$  la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête au premier étage et à 0 sinon. On définit de même les variables aléatoires  $Y_2$  et  $Y_3$  pour les étages 2 et 3.

a/ Justifier que  $P(Y_1 = 0) = P(X_1 = 0)$ .

b/ En déduire  $P(Y_1 = 1)$  puis  $E(Y_1)$ . On admet que  $Y_2$  et  $Y_3$  suivent la même loi que  $Y_1$  et qu'elles ont donc la même espérance.

c/ Exprimer  $Z$  en fonction de  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Y_3$ . Calculer  $E(Z)$  et vérifier que

$$E(Z) = \frac{211}{81}.$$

## Exercice 4 (probabilités continues)

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n(t) = (n+1)(n+2)t^n(1-t) \quad \text{si } t \in [0, 1] \quad \text{et} \quad f_n(t) = 0 \quad \text{sinon}$$

1/ a/ Vérifier que  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

b/ Calculer  $\int_0^1 t^n(1-t) dt$ .

c/ En déduire que  $f_n$  est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice on utilisera les fonctions  $f_n$  pour  $n = 1$ ,  $n = 2$  et  $n = 3$ .

2/ Madame A doit se rendre de Paris à Londres en train. Le haut-parleur de la gare annonce pour son train un retard de moins d'une heure. On admet que la variable aléatoire  $X$  égale à la durée (en heures) du retard admet pour densité de probabilité la fonction  $f_1$ . C'est-à-dire :

$$f_1(t) = 6t(1-t) \quad \text{si } t \in [0, 1] \quad \text{et} \quad f_1(t) = 0 \quad \text{sinon}$$

Soit  $F_1$  la fonction de répartition de  $X$ .

a/ Déterminer l'expression de  $F_1(x)$  lorsque  $x < 0$  puis lorsque  $x > 1$ . Justifier que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $F_1(x) = 3x^2 - 2x^3$ .

b/ Quelle est la probabilité que le train ait moins d'une demi-heure de retard ?

c/ Quelle est la probabilité que le train ait un retard compris entre un quart d'heure et une demi-heure ?

d/ La haut-parleur annonce que l'on sait que le retard sera inférieur à une demi-heure. Quelle est la probabilité qu'il soit supérieur à un quart d'heure ?

3/ a/ Vérifier que  $tf_1(t) = \frac{1}{2}f_2(t)$  pour tout réel  $t$ . En déduire l'espérance de  $X$ .

b/ Exprimer  $t^2f_1(t)$  en fonction de  $f_3(t)$  pour tout réel  $t$ . En déduire  $E(X^2)$  puis  $V(X)$ .

4/ Une fois que le train arrive à Paris, il continue à prendre du retard sur le chemin entre Paris et Londres. On nomme  $Y$  la variable aléatoire égale au retard en heures pris par le train durant ce trajet. On suppose que  $Y$  admet pour densité la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(t) = \frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t} \quad \text{si } t \in [0, +\infty[ \quad \text{et} \quad g(t) = 0 \quad \text{sinon}$$

a/ De quelle loi usuelle reconnaissez-vous une densité ? Calculer  $E(Y)$ .

b/ Soit  $Z$  le retard total que cumule le train en arrivant à Londres. Exprimer  $Z$  en fonction de  $X$  et de  $Y$ . En déduire la durée moyenne en heures du retard de Mme A lors de son arrivée à Londres.

# Les épreuves corrigées des grandes écoles commerciales

Mathématiques problèmes corrigés HEC 2012-2013 option économique - Tome 34, C. Lebéouf	97827298-81917
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2012-2013 option scientifique - Tome 33, C. Lebéouf	97827298-81894
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2010-2011 option économique - Tome 32, J. Mallet, M. Mitermique	97827298-65900
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2010-2011 option scientifique - Tome 31, C. Lebéouf	97827298-65870
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2008-2009 option économique - Tome 30, J. Mallet, M. Mitermique	97827298-51279
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2008-2009 option scientifique - Tome 29 - C. Lebéouf	97827298-51248
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2006-2007 option économique - Tome 28 - ECE, J. Mallet, M. Mitermique	97827298-37631
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2006-2007 option scientifique - Tome 27 - ECS, C. Lebéouf	97827298-37624
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2002-2007 option technologique - Tome 1 - ECT, Cl. Huet	97827298-35712
Mathématiques problèmes corrigés HEC 1998-2001 option économique - Tome 22 - ECE, J. Mallet, M. Mitermique	97827298-07122
Mathématiques problèmes corrigés HEC 1998-2001 option scientifique - Tome 21 - ECS, C. Lebéouf	97827298-07115

