Les épreuves corrigées des grandes écoles commerciales

problèmes corrigés de MATHÉMATIQUES

posés aux concours H.E.C. E.S.C.P. Europe ECRICOME et E.S.C.

OPTION TECHNOLOGIQUE

Tome 2

solutions proposées par

Laurent BRETONNIÈRE

ellipses

Problèmes corrigés de
MATHÉMATIQUES

Les épreuves corrigées des grandes écoles commerciales

problèmes corrigés de MATHÉMATIQUES

posés aux concours

H.E.C., E.S.C.P. Europe
ECRICOME et E.S.C.

OPTION TECHNOLOGIQUE

solutions proposées par

Laurent BRETONNIÈRE

Professeur agrégé de mathématiques
en classe préparatoire ECE

ellipses

ISBN 9782340-048980

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Table des matières

Première partie

Énoncés des épreuves

$\boxed{1}$ ESCP Europe 2014, énoncé

Exercice 1 (probabilités continues)

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2(t-a)} & \text{si} \quad t \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1/ **a/** Soit B un réel supérieur ou égal à a. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^B 2e^{-2(t-a)}\,dt$.

b/ En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} 2e^{-2(t-a)}\,dt$.

2/ Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.
Dans la suite, on note X une variable aléatoire admettant f comme densité.

3/ Montrer que la fonction de répartition F_X de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-a)} & \text{si} \quad x \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4/ On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = X - a$.

a/ Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

b/ En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c/ Donner la valeur de l'espérance de Y.

d/ En déduire que X admet une espérance et donner sa valeur.

Exercice 2 (suite et intégrale)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n \,dt$$

1/ On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : pour tout $t \geqslant 0$,

$$g(t) = (1+t)\ln(1+t) - t$$

a/ On note g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.

b/ En déduire la valeur de u_1.

2/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,,1]$ à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \ln(1+t)$$

a/ On note f' et f'' respectivement, les dérivées première et seconde de f. Calculer pour tout réel t de $[0\,,1]$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

b/ Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,,1]$ et tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
(on donne : $\ln 2 \simeq 0,7$)

c/ Montrer que la fonction f est concave sur $[0\,,1]$.

3/ a/ Justifier pour tout réel t de $[0\,,1]$, l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln 2$$

b/ Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$.

c/ En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0.

4/ a/ À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$u_{n+1} = 2\,(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n$$

(on pourra remarquer qu'une primitive de la fonction $t \longmapsto 1$ est $t \longmapsto 1+t$)

b/ En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$(n+1)u_n \leqslant 2\,(\ln 2)^{n+1}$$

c/ Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d/ En utilisant la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$(n+2)u_n \geqslant 2\,(\ln 2)^{n+1}$$

e/ Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{nu_n}{2\,(\ln 2)^{n+1}}$.

Exercice 3 (suites, fonction et matrices)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : pour tout $x \geqslant 0$,

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$, et pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1/ a/ On note f' la fonction dérivée de f. Calculer pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x)$.

b/ Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Placer les réels 1 et $f(1)$ dans ce tableau.

2/ a/ Montrer que pour tout entier naturel n, le réel u_n appartient à l'intervalle $[0\,,1]$.

b/ Établir pour tout réel x de $[0\,,1]$, l'inégalité suivante : $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{3}{4}$.

c/ En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{3}{4}\,|u_n - 1|$$

d/ Établir pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante :

$$|u_n - 1| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

e/ En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

3/ Soit A, J et I les matrices d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a/ Montrer que $J^2 = 2J$.

b/ Établir pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$A^n = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$$

(on rappelle que $A^0 = I$)

c/ Donner sous forme matricielle, l'expression de A^n en fonction de n.

4/ On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $p_0 = 1$, $q_0 = 2$, et pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$$

On considère pour tout n de $\mathbb{N}$, la matrice à deux lignes et une colonne X_n définie par :

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

a/ Établir par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $X_n = A^n X_0$.

b/ En déduire l'expression de X_n en fonction de n et donner les valeurs de p_n et q_n en fonction de n.

5/ a/ À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

b/ Donner l'expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 (probabilités discrètes)

Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, numérotés 1, 2, 3 et 4, d'un carré selon le protocole suivant :

- À l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet 1.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 0$) la puce se trouve sur le sommet 1, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$) la puce se trouve sur le sommet 2, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$) la puce se trouve sur le sommet 3, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$) la puce se trouve sur le sommet 4, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet occupé par la puce à l'instant n et on a donc $P([X_0 = 1]) = 1$.

1/ **a/** Déterminer la loi de X_1.

b/ Calculer l'espérance et la variance de X_1.

2/ Déterminer la loi de X_2.

3/ **a/** En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P([X_{n+1} = 1]) = \frac{2}{3}P([X_n = 1]) + \frac{1}{2}P([X_n = 2])$$

b/ Exprimer de même, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $P([X_{n+1} = 2])$, $P([X_{n+1} = 3])$, $P([X_{n+1} = 4])$ en fonction de $P([X_n = 1])$, $P([X_n = 2])$, $P([X_n = 3])$ et $P([X_n = 4])$.

c/ Vérifier que les relations précédentes sont encore valables pour $n = 1$ et $n = 0$.

d/ Que vaut pour tout n de $\mathbb{N}$, la somme :

$$P([X_n = 1]) + P([X_n = 2]) + P([X_n = 3]) + P([X_n = 4]) \quad ?$$

4/ On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, on note U_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} P([X_n = 1]) \\ P([X_n = 2]) \\ P([X_n = 3]) \end{pmatrix}$$

De plus, on pose : $A = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant les relations trouvées précédemment, établir pour tout n de $\mathbb{N}$, la relation :

$$U_{n+1} = AU_n + B$$

5/ **a/** Déterminer une matrice L à trois lignes et une colonne vérifiant :

$$L = AL + B$$

b/ Établir pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$U_n = A^n(U_0 - L) + L$$

6/ On pose $C = 6A$. Soit R, D et Q les matrices d'ordre 3 définies par :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a/ Calculer RQ. En déduire que R est inversible et donner R^{-1}, où R^{-1} désigne la matrice inverse de la matrice R.

b/ Calculer $CR - RD$.

c/ En déduire pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$$

7/ On admet que la limite de la matrice U_n lorsque n tend vers $+\infty$, est une matrice U dont les coefficients sont obtenus en prenant la limite des coefficients de U_n lorsque n tend vers $+\infty$. Déterminer U et préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} P([X_n = 4])$.

– fin de l'énoncé –

$\boxed{2}$ ECRICOME 2014, énoncé

Exercice 1 (suite et fonctions)

On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]0\,,+\infty[\;, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1/ Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

2/ Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \,]0\,,+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de g sur $]0\,,+\infty[$.

3/ Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,,+\infty[$.
On la note α.

4/ Justifier que :

$$\alpha \in [1\,,\mathrm{e}] \quad \text{et} \quad f(\alpha) = \alpha.$$

5/ Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \,]0\,,+\infty[$ et préciser la monotonie de la fonction f.

6/ Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}.$$

7/ Vérifier que :

$$\forall x \in [1\,,\mathrm{e}]\;, \quad \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

En déduire, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|\,.$$

8/ Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2^n}.$$

9/ Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 2 (probabilités discrètes)

Cet exercice est composé de deux parties.
La partie **I** consiste à calculer en fonction de n les termes d'une suite récurrente $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
La partie **II** étudie l'obtention du premier double PILE lors de lancers d'une pièce déséquilibrée.
Les résultats de la partie **I** peuvent être utilisés librement dans la partie **II**.

PARTIE I – Étude d'une suite.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{4}{9}, \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n.$$

On considère également les quatre matrices carrées d'ordre 2 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = QAP$$

ainsi que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, les matrices colonnes :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_n = QX_n.$$

1/ Vérifier que les matrices PQ et D sont diagonales (*les calculs devront être inscrits sur la copie*).

2/ En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.

3/ Soit $n \geqslant 1$. Donner, en la justifiant, la relation liant X_{n+1}, A et X_n. Prouver que $PY_n = X_n$. En déduire que :

$$Y_{n+1} = DY_n.$$

4/ Prouver que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad Y_n = D^{n-1}Y_1.$$

5/ Calculer Y_1 et expliciter les coefficients de la matrice colonne Y_n.

6/ En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

PARTIE II – Probabilités discrètes.

On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir PILE vaut $\dfrac{2}{3}$.

On suppose donnée un espace probabilisé muni d'une probabilité P modélisant cette expérience.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang n si on obtient PILE au $(n-1)$-ième lancer et PILE au n-ième lancer.

On note :

- pour tout entier $n \geqslant 1$, F_n l'événement « on obtient FACE au n-ième lancer » ;
- pour tout entier $n \geqslant 2$, D_n l'événement « on obtient un double PILE au rang n **pour la première fois** » ;
- pour tout entier $n \geqslant 2$, $v_n = P(D_n)$. On conviendra que $v_1 = 0$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement :

« PILE, FACE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE »

alors l'événement D_8 est réalisé.

1/ On lance n fois de suite la pièce de monnaie. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours de ces n lancers.

a/ Déterminer la loi de X (*une réponse argumentée est attendue*). Préciser l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X ainsi que la valeur de $P(X = k)$ lorsque $k \in X(\Omega)$.

b/ Donner la valeur de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

2/ On lance indéfiniment la pièce. On note Y le rang d'apparition du premier PILE, s'il apparaît.

a/ Déterminer la loi de Y (*une réponse argumentée est attendue*). Préciser l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y ainsi que la valeur de $P(Y = k)$ lorsque $k \in Y(\Omega)$.

b/ Donner la valeur de l'espérance $E(Y)$ et de la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y.

3/ Calculer v_2 et v_3. Vérifier que :

$$v_3 = \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1.$$

Rappelons que l'on a convenu que $v_1 = 0$.

4/ Soit $n \geqslant 2$. On suppose qu'au premier lancer, PILE est obtenu et on souhaite la réalisation de l'événement D_{n+2}.

Quel est alors le résultat du second lancer ? À l'issue de ces deux premiers lancers, combien de lancers reste-t-il à effectuer pour que D_{n+2} puisse se réaliser ?

Les réponses devront être justifiées.

En déduire que :

$$P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = \frac{1}{3}v_n.$$

5/ Pour $n \geqslant 2$, justifier que :

$$P_{F_1}(D_{n+2}) = v_{n+1}.$$

6/ À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n.$$

En outre, d'après la question **II/3/**, *cette formule est vraie pour* $n = 1$.

7/ À l'aide de la partie **I/**, justifier que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(D_n) = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

8/ Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note E_n l'événement « il n'y a pas eu deux PILE consécutifs au cours des n premiers lancers ».

Exprimer l'événement $\overline{E_n}$ en fonction des événements $D_2, \ldots, D_n$. En déduire que :

$$P(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} v_k.$$

9/ Calculer la limite de $P(E_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3 (probabilités continues)

On considère les fonctions f, g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{1+\mathrm{e}^x}, \qquad g(x) = -2\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1/ Soit $x \geqslant 0$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ puis vérifier que :

$$h(x) = -f'(x) \quad \text{et} \quad f(x) = g'(x).$$

2/ Soit $A \geqslant 0$. Justifier que :

$$\int_0^A h(x)\,\mathrm{d}x = 1 - f(A).$$

Que vaut $\displaystyle\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$?

3/ Soit $A \geqslant 0$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^A x.h(x)\,\mathrm{d}x = -Af(A) + g(A) - g(0).$$

4/ La fonction h est-elle continue en 0 ? *Une réponse argumentée est attendue.*

5/ Prouver que h est une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par Z une variable aléatoire dont h est une densité.

6/ Démontrer que la fonction de répartition H de Z est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si} \quad x \geqslant 0, \quad H(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ \text{si} \quad x < 0, \quad H(x) = 0. \end{cases}$$

7/ Calculer les probabilités suivantes :

$$P(Z \geqslant \ln(2)), \quad P(\ln(2) \leqslant Z \leqslant \ln(8)) \quad \text{et} \quad P_{[Z \geqslant \ln(2)]}(Z \leqslant \ln(8))$$

On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

8/ Déterminer la médiane de Z, c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle

$$H(x) = \frac{1}{2}.$$

9/ Établir que Z possède une espérance et donner la valeur de $E(Z)$.

– fin de l'énoncé –

$\boxed{3}$ ESC 2014, énoncé

Exercice 1 (suites et matrices)

On considère les matrices $N = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \dfrac{1}{20}N$.

On pose : $A = N - 4I$ et $B = N - 12I$.

1/ Vérifier que $AB = BA = 0$. En déduire que : $NA = 12A$ et que $NB = 4B$.

2/ On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = \frac{1}{8}$, $b_0 = -\frac{1}{8}$ et les relations :

$$a_{n+1} = 12a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 4b_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a/ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$N^n = a_n A + b_n B$$

b/ Quel est le type des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Déterminer, pour tout entier naturel n, des expressions de a_n et de b_n en fonction de n.

c/ Montrer que : $M^n = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n A - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n B$ pour tout entier naturel n.

3/ Un particulier a acheté une poule. La poule pond chaque semaine entre 0 et 3 œufs. Si une semaine donnée, la poule ne pond pas d'œuf, son propriétaire décide de la manger à la fin de la semaine (elle ne pondra donc plus d'œufs les semaines suivantes). On note pour tout entier n non nul,

- U_n l'événement « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond un œuf » ;
- D_n l'événement « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond deux œufs » ;
- T_n l'événement « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond trois œufs ».

On note u_n, d_n et t_n leurs probabilités respectives. On suppose que la première semaine la poule pond un œuf puis que pour tout entier naturel non nul, on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{7}{20}u_n + \frac{1}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ d_{n+1} = \frac{3}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ t_{n+1} = \frac{9}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{7}{20}t_n \end{cases}$$

On note X_n la matrice $\begin{pmatrix} u_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

a/ Justifier que : $X_{n+1} = MX_n$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

b/ Montrer que : $X_n = M^{n-1}X_1$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

c/ En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \ ; \quad d_n = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \ ;$$

$$\text{et} \quad t_n = \frac{9}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{9}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

d/ Que représente le nombre $1 - (u_n + d_n + t_n)$?

e/ Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$u_n + 2d_n + 3t_n = \frac{9}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(u_n + 2d_n + 3t_n)$ converge et calculer sa somme.
Que représente ce nombre ?

Exercice 2 (suite et fonctions)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2 + \mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1/ a/ Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une droite asymptote $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 2$.

b/ Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ puis $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de f en $-\infty$?

2/ Calculer $f'(x)$ pour tout réel x. Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

3/ Justifier que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β, le premier étant positif, le deuxième étant négatif.
On donne $e \simeq 2,7$. Prouver que $\alpha \in \left]1\,,2\right[$.

4/ Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$. On donne $\alpha \simeq 1,84$ et $\beta \simeq -1,14$.

5/ On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 - \mathrm{e}^{-x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.

a/ Montrer que pour tout réel x, on a : $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$.

b/ Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g.
Montrer alors que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout entier naturel n.

c/ Établir que pour tout réel x appartenant à $[1\,,2]$: $0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{1}{e}$.

d/ En déduire, en appliquant l'inégalité des accroissements finis que :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$$

pour tout entier naturel n.

e/ Montrer par récurrence que : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e^n}$ pour tout entier naturel n. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 3 (probabilités discrètes)

Un immeuble est constitué de 3 étages. Dans le hall de l'immeuble on peut accéder à un ascenseur qui distribue chaque étage. 5 personnes montent ensemble dans l'ascenseur. On suppose que chacune d'elles souhaite monter à l'un des trois étages de manière équiprobable et indépendamment des 4 autres. On suppose également que l'ascenseur dessert les étages demandés dans l'ordre et qu'il ne revient pas en arrière.

On note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 1, X_2 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 2 et X_3 celle égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 3.

1/ a/ Reconnaître la loi de X_1. Décrire l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs prises par X_1. Donner $P(X_1 = k)$ pour chaque k appartenant à $X_1(\Omega)$.

b/ Donner $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

c/ Expliquer pourquoi X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1.

2/ a/ Justifier que $X_1 + X_2 + X_3 = 5$.

b/ En déduire la probabilité $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$.

c/ Montrer que la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois est $\dfrac{1}{81}$.

3/ On considère la variable aléatoire Z égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur. D'après **2/c/** on a $P(Z = 1) = \dfrac{1}{81}$. Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par Z.

4/ Soit Y_1 la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête au premier étage et à 0 sinon. On définit de même les variables aléatoires Y_2 et Y_3 pour les étages 2 et 3.

a/ Justifier que $P(Y_1 = 0) = P(X_1 = 0)$.

b/ En déduire $P(Y_1 = 1)$ puis $E(Y_1)$. On admet que Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1 et qu'elles ont donc la même espérance.

c/ Exprimer Z en fonction de Y_1, Y_2 et Y_3. Calculer $E(Z)$ et vérifier que

$$E(Z) = \frac{211}{81}.$$

Exercice 4 (probabilités continues)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = (n+1)(n+2)t^n(1-t) \quad \text{si } t \in [0\,,1] \quad \text{et} \quad f_n(t) = 0 \quad \text{sinon}$$

1/ **a/** Vérifier que f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

b/ Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)\,\mathrm{d}t$.

c/ En déduire que f_n est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice on utilisera les fonctions f_n pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

2/ Madame A doit se rendre de Paris à Londres en train. Le haut-parleur de la gare annonce pour son train un retard de moins d'une heure. On admet que la variable aléatoire X égale à la durée (en heures) du retard admet pour densité de probabilité la fonction f_1. C'est-à-dire :

$$f_1(t) = 6t(1-t) \quad \text{si } t \in [0\,,1] \quad \text{et} \quad f_1(t) = 0 \quad \text{sinon}$$

Soit F_1 la fonction de répartition de X.

a/ Déterminer l'expression de $F_1(x)$ lorsque $x < 0$ puis lorsque $x > 1$. Justifier que pour tout $x \in [0\,,1]$, $F_1(x) = 3x^2 - 2x^3$.

b/ Quelle est la probabilité que le train ait moins d'une demi-heure de retard ?

c/ Quelle est la probabilité que le train ait un retard compris entre un quart d'heure et une demi-heure ?

d/ La haut-parleur annonce que l'on sait que le retard sera inférieur à une demi-heure. Quelle est la probabilité qu'il soit supérieur à un quart d'heure ?

3/ **a/** Vérifier que $tf_1(t) = \frac{1}{2}f_2(t)$ pour tout réel t. En déduire l'espérance de X.

b/ Exprimer $t^2 f_1(t)$ en fonction de $f_3(t)$ pour tout réel t. En déduire $E(X^2)$ puis $V(X)$.

4/ Une fois que le train arrive à Paris, il continue à prendre du retard sur le chemin entre Paris et Londres. On nomme Y la variable aléatoire égale au retard en heures pris par le train durant ce trajet. On suppose que Y admet pour densité la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}t} \quad \text{si } t \in [0\,,+\infty[\quad \text{et} \quad g(t) = 0 \quad \text{sinon}$$

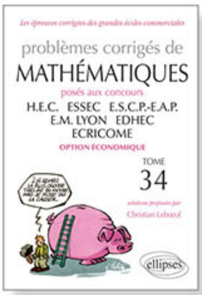
a/ De quelle loi usuelle reconnaissez-vous une densité ? Calculer $E(Y)$.

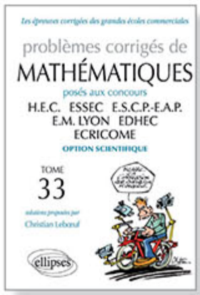
b/ Soit Z le retard total que cumule le train en arrivant à Londres. Exprimer Z en fonction de X et de Y. En déduire la durée moyenne en heures du retard de Mme A lors de son arrivée à Londres.

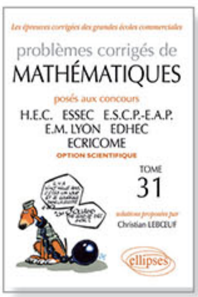
– FIN DE L'ÉNONCÉ –

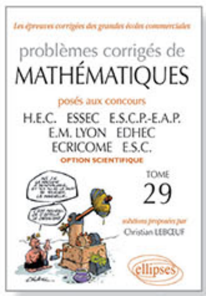
Les épreuves corrigées des grandes écoles commerciales

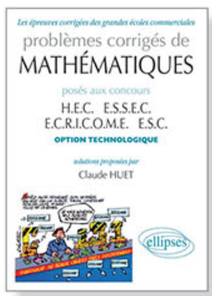
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2012-2013 option économique - Tome 34, C. Lebœuf	97827298-81917
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2012-2013 option scientifique - Tome 33, C. Lebœuf	97827298-81894
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2010-2011 option économique - Tome 32, J. Mallet, M. Miternique	97827298-65900
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2010-2011 option scientifique - Tome 31, C. Lebœuf	97827298-65870
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2008-2009 option économique - Tome 30, J. Mallet, M. Miternique	97827298-51279
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2008-2009 option scientifique - Tome 29 - C. Lebœuf	97827298-51248
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2006-2007 option économique - Tome 28 - ECE, J. Mallet, M. Miternique	97827298-37631
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2006-2007 option scientifique - Tome 27 - ECS, C. Lebœuf	97827298-37624
Mathématiques problèmes corrigés HEC 2002-2007 option technologique - Tome 1 - ECT, Cl. Huet	97827298-35712
Mathématiques problèmes corrigés HEC 1998-2001 option économique - Tome 22 - ECE, J. Mallet, M. Miternique	97827298-07122
Mathématiques problèmes corrigés HEC 1998-2001 option scientifique - Tome 21 - ECS, C. Lebœuf	97827298-07115











9 782340 003590

www.editions-ellipses.fr