OPTIMUM

Mathématiques en MPSI/PCSI

Fiches et exercices

- Classes préparatoires
- Universités

Antony **Didier**
Laurent **Pater**

ellipses

OPTIMUM

Collection dirigée par Fabien Fichaux

Mathématiques en MPSI/PCSI

Fiches et exercices

Antony Didier

Ancien élève de l'Université de Reims Champagne-Ardenne
Professeur agrégé en classe préparatoire MPSI au lycée Chrestien de Troyes (Troyes)

Laurent Pater

Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Cachan (antenne de Bretagne)
Docteur de l'Université de Rennes I
Professeur agrégé en classe préparatoire PCSI au lycée Chrestien de Troyes (Troyes)

ellipses

ISBN 9782340-049413

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné aux étudiants de classes préparatoires scientifiques MPSI et PCSI, mais il intéressera également les étudiants de première et seconde années de licence de mathématiques.

Votre réussite dans l'enseignement supérieur nécessite une adaptation qui peut être difficile : hiérarchisation des connaissances, maîtrise de techniques classiques, résolution de problèmes longs à questions enchaînées. Ce manuel a été conçu pour répondre à ces trois difficultés. Il est divisé en 28 chapitres et est conforme aux nouveaux programmes de MPSI et PCSI. Ces deux programmes, différents, comportent néanmoins de nombreuses notions communes : chaque chapitre fait apparaître clairement cette différence et les chapitres spécifiques pour PCSI ou MPSI sont indiqués dans le sommaire.

La page d'introduction de chaque chapitre présente rapidement les concepts mis en jeu et comporte souvent un script Python vous permettant de faire le lien avec votre cours d'informatique commun de première année.

Le résumé de cours, généralement de 4 à 5 pages, comporte toutes les notions importantes, sans démonstration, que vous devez connaître. De nombreux dessins viennent illustrer ce cours et permettent souvent de mieux comprendre le contexte d'un théorème ou d'une proposition.

Les exercices, au nombre généralement de 3 pour pour chaque chapitre, ont été choisis pour leur caractère très classique et leur mise en œuvre des théorèmes importants du programme. De difficulté variable, ils comportent tous une correction détaillée et des remarques dans la marge.

Le problème à question enchaînées indiqué par la mention « Au concours » est un exercice plus long, extrait de concours adaptés à la première année de classe préparatoire scientifique. Il doit vous permettre d'aborder sereinement les devoirs surveillés ainsi que de vous préparer aux concours de seconde année.

Nous espérons que cet ouvrage répondra à vos attentes et vous aidera à obtenir, à l'issue de votre classe préparatoire, une Grande École. Nous vous souhaitons beaucoup de succès dans vos études.

Nous remercions B. Saleur pour la relecture attentive de ce manuel.

Les auteurs

Sommaire

Chapitre 1

Nombres réels et nombres complexes

Présentation

Si on considère une équation du second degré à coefficients complexes, on peut encore déterminer les solutions à l'aide du discriminant. Cependant, il est nécessaire d'en déterminer une racine carrée, éventuellement complexe :

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow (a+ib)^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \mathrm{Re}(\Delta) \\ 2ab = \mathrm{Im}(\Delta) \end{cases}$$

L'identification des modules dans la première égalité nous permet alors d'ajouter une dernière équation au système : $a^2 + b^2 = |\Delta|$. On peut ainsi déterminer a et b puis une racine carrée $\delta = a + ib$ de Δ.

On peut donc adapter le programme de résolution des équations du second degré vu en Terminale S aux nombres complexes :

```
from math import *
def trinome(a,b,c):
  D=b**2-4*a*c
    if D==0:
    return -b/2*a
  else:
    if D.imag>=0:
      d=sqrt((abs(D)+D.real)/2)+1j*sqrt((abs(D)-D.real)/2)
    else:
      d=sqrt((abs(D)+D.real)/2)-1j*sqrt((abs(D)-D.real)/2)
      return (-b+d)/2*a,(-b-d)/2*a


>>> trinome(1,-3-1j,4+3j)
```

$((2-1j),(1+2j))$

Nombres réels

Proposition 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a : $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Inégalités

Définition. $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\geq$ définie par : $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$.

Proposition 2. (Compatibilité des opérations) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. La relation d'ordre $\geq$ est compatible avec les opérations sur $\mathbb{R}$:

(i) $\forall\, c, d \in \mathbb{R},\ a \geq b,\ c \geq d \Rightarrow a + c \geq b + d$;

(ii) $\forall\, c, d \in \mathbb{R},\ a \geq b \geq 0,\ c \geq d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd \geq 0$.

La multiplication par un nombre négatif inverse une inégalité.

Valeur absolue

Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **valeur absolue** de x le réel noté $|x|$ et défini par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

Proposition 3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $|x| \geq 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $\sqrt{x^2} = |x|$;

(ii) $|x| = \max(x, -x)$;

(iv) $|xy| = |x||y|$ et, pour $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;

(v) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (**inégalité triangulaire**).

Nombres complexes

Ecriture algébrique et représentation

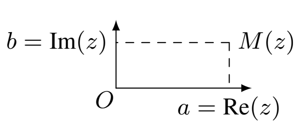
Définition. L'ensemble des **nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble $\{a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, où i vérifie la relation $i^2 = -1$. On définit la somme et le produit de deux nombres complexes par :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b') \quad \text{et} \quad (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Proposition 4. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a : $z\,z' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Théorème 5. (Existence et unicité de l'écriture algébrique) Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. Les réels a et b sont respectivement appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** de z. On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

On identifie le plan complexe au plan usuel : tout point $M(a, b)$ désigne le point d'**affixe** $z = a + ib$ qu'on note $M(z)$.



Définition. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Proposition 6. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

(i) $\overline{\overline{z}} = z$; (ii) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; (iii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; (iv) si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Proposition 7. (Caractérisation des nombres réels et imaginaires purs) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

(i) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; (ii) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$; (iii) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$; (iv) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

Module et argument d'un nombre complexe

Définition. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **module** de z le nombre réel noté $|z|$ et défini par :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Proposition 8. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

(i) $|z| \geq 0$ et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (ii) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$ (iii) $|\overline{z}| = |z|$

(iv) $|zz'| = |z||z'|$ (v) si de plus $z' \neq 0$, $|\dfrac{z}{z'}| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Proposition 9. (Inégalité triangulaire) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

et on a le cas d'égalité : $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow z' = 0$ ou $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ z = \alpha z'$.

Le cas d'égalité signifie que $O, M(z)$ et $M'(z')$ sont alignés sur une même demi-droite d'origine O.

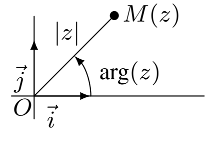
Définition. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On appelle **argument** de z tout nombre réel θ vérifiant :

$$z = |z|\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big).$$

On note $\arg(z)$ n'importe quel argument du nombre complexe z.

Définition. Soit $\theta, \theta', \alpha \in \mathbb{R}$. On note $\theta \equiv \theta'\ [\alpha]$ lorsque $\theta - \theta' \in \alpha\mathbb{Z}$.

Si on considère le point $M(z)$ dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le module représente la distance OM et l'argument donne une mesure de l'angle des vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.



Proposition 10. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ non nuls. On a :

$$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi].$$

Proposition 11. Soit $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a :

(i) $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$; (ii) $\arg(zz') \equiv \arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$; (iii) $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$.

Proposition 12. (Caractérisation des nombres réels et imaginaires purs) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a :

(i) $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\ [\pi]$; (ii) $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Définition. On pose pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Ainsi, tout nombre complexe non nul peut s'écrire sous **forme trigonométrique** :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec } r = |z| > 0 \text{ et } \theta \equiv \arg(z)\ [2\pi].$$

Proposition 13. Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'\ [2\pi]$; (ii) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; (iii) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; (iv) $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Proposition 14. (Formules d'Euler et de de Moivre) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ qui s'écrit encore : $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

Définition. On définit l'**exponentielle complexe** pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ par :

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a\big(\cos(b) + i\sin(b)\big)$$

Proposition 15. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a :

(i) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \neq 0$; (ii) $\dfrac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$; (iii) $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$; (iv) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

Proposition 16. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a : $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Nombres complexes de module 1

Définition. On appelle **cercle trigonométrique** l'ensemble des nombres complexes de module 1 noté $\mathbb{U}$ qu'on peut paramétrer de plusieurs façons :

$$\mathbb{U} = \big\{M\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big),\ \theta \in \mathbb{R}\big\} = \{M(e^{i\theta}),\ \theta \in \mathbb{R}\}$$

Théorème 17. (Relation fondamentale) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

Formules géométriques. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

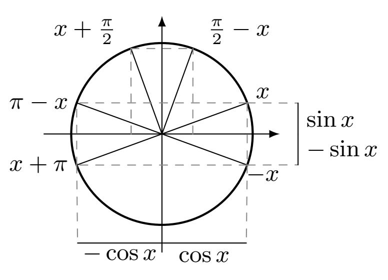
(i) $\cos(-x) = \cos(x),\ \sin(-x) = -\sin(x)$;

(ii) $\cos(x+\pi) = -\cos(x),\ \sin(x+\pi) = -\sin(x)$;

(iii) $\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin(x),\ \sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos(x)$;

(iv) $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin(x),\ \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(x)$;

(v) $\cos(\pi-x) = -\cos(x),\ \sin(\pi-x) = \sin(x)$.



Proposition 18. (Formules d'addition, soustraction, duplication et linéarisation) Soit $a, b, x \in \mathbb{R}$.

(i) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

(ii) $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$

(iii) $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

(iv) $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

(v) $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

(vi) $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$

(vii) $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

Proposition 19. (Formules du demi-angle) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a les factorisations :

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\tfrac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}} \quad \text{et} \quad e^{i\,a} - e^{i\,b} = 2i \sin\left(\tfrac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Ces formules permettent de trouver les factorisations de $\cos a + \cos b$ et de $\sin a + \sin b$.

Proposition 20. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose $A = |\alpha + i\,\beta|$ et $\varphi = \arg(\alpha + i\,\beta)$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\alpha\,\cos x + \beta\,\sin x = A\cos(x - \varphi).$$

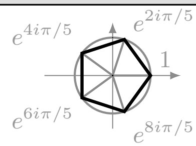
Équations dans $\mathbb{C}$

Racines de l'unité

Théorème 21. (Racines n-ièmes de l'unité) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \quad z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Cette équation possède donc n solutions qui forment les sommets d'un polygone régulier (comme le montre le dessin pour $n = 5$).



Corollaire 22. (Racines n-ièmes d'un complexe) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On a :

$$z^n = z_0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \quad z = |z_0|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\arg(z)}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Équation $e^z = z_0$

Théorème 23. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a :

$$e^z = z_0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \ln|z_0| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) \equiv \arg(z_0)\ [2\pi].$$

Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Proposition 24. (Équation du second degré) On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$. On note Δ le **discriminant** associé défini par $\Delta = b^2 - 4ac$ et on considère $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

(i) Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double : $z_0 = \frac{-b}{2a}$.

(ii) Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Proposition 25. (Relation coefficients-racines) Soit $s, p \in \mathbb{C}$. On a :

$$z_1, z_2 \text{ sont les solutions de l'équation } z^2 - sz + p = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}.$$

Utilisation des nombres complexes en géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Définition. Si $A(a), B(b)$ sont deux points d'affixes $a, b \in \mathbb{C}$, on définit l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par $b - a$.

Proposition 26. Soit $A(a), B(b), C(c)$ des points distincts d'affixes $a, b, c \in \mathbb{C}$. On a :

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = \frac{CB}{CA} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \ [2\pi]$$

Corollaire 27. (Configuration à trois points) Avec les notations de la proposition précédente :

1. A, B, C sont alignés si et seulement si $\frac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}$;
2. $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{b-c}{a-c} \in i\mathbb{R}$;

Définition. On appelle **transformation du plan complexe** toute fonction $f : z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$.

Proposition 28. (Transformations de base)

1. Si $b \in \mathbb{C}$, $z \mapsto z + b$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
2. Si $z \mapsto \overline{z}$ est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
3. Si $\theta \in \mathbb{R}$, $z \mapsto e^{i\theta} z$ est la rotation de centre O et d'angle θ.
4. Si $k \in \mathbb{R}^*$, $z \mapsto kz$ est l'homothétie de rapport k.

La fin du chapitre est réservée aux MPSI

Théorème 29. (Similitudes directes) On considère

$$f : z \in \mathbb{C} \mapsto az + b$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $a \notin \{0, 1\}$ et on pose $z_0 = \frac{b}{1-a}$.
f est la composée commutative de la rotation de centre z_0 et d'angle $\arg(a)$, et de l'homothétie de centre z_0 et de rapport $|a|$ et est appelée **similitude directe de rapport** $|a|$ **et d'angle** $\arg(a)$.

Exercices

Exercice 1. Calcul de sommes.
Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, les sommes :

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx),\ S_2(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx),\ S_3(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ikx}) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k\Big).$$

On pourra citer la formule de Moivre.

On reconnaît alors la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison e^{ix}.

- si $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \equiv 0\ [2\pi]$, alors $\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.
- sinon, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k = \frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\ (*)$$

Ne pas oublier le cas $q = 1$.

En factorisant par l'exponentielle de la demi-somme, on en déduit :

$$(*) = \frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}.\frac{e^{-i\frac{(n+1)}{2}x} - e^{i\frac{(n+1)}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{nx}{2}}.\frac{(-2i)\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{(-2i)\sin(\frac{x}{2})}$$

D'où pour tout $x \neq 0\ [2\pi]$, $\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k = e^{i\frac{nx}{2}}.\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$

Ainsi, en prenant la partie réelle dans chacun des cas, on obtient :

$$S_1(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \equiv 0\ [2\pi] \\ \cos(\frac{nx}{2}).\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{sinon} \end{cases}$$

De la même façon,

$$S_2(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(e^{ikx}) = \mathrm{Im}(\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k)$$

de sorte que :

$$S_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \equiv 0\ [2\pi] \\ \sin(\frac{nx}{2}).\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les dernières sommes, il suffit de se ramener à la formule de duplication :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

Ainsi,

$$S_3(x) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{n} 1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \cos(k.2x)}_{S_1(2x)}\Big) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \equiv 0\ [\pi] \\ \frac{n+1}{2} + \cos(nx).\frac{\sin((n+1)x)}{2\sin(x)} & \text{sinon} \end{cases}$$

De même, on pourrait calculer $S_4 = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$.

Exercice 2. Module et argument d'un nombre complexe.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+e^{i\frac{5\pi}{6}}}\right)^n$
2. $(1+i)^n + (1-i)^n$

On factorise par le module avant de reconnaître des valeurs usuelles.

1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n ce nombre complexe. On a d'une part :

$$1 - i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) - i\sin(\frac{\pi}{3})) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

D'autre part, la factorisation par l'exponentielle de la demi-somme nous donne :

$$1 + e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{12}}.(e^{-i\frac{5\pi}{12}} + e^{i\frac{5\pi}{12}}) = e^{i\frac{5\pi}{12}}.2\cos(\frac{5\pi}{12})$$

et ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \left(\dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{5\pi}{12}}.2\cos(\frac{5\pi}{12})}\right)^n = \frac{1}{\cos^n(\frac{5\pi}{12})}.e^{-i\frac{3n\pi}{4}}$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^n(\frac{5\pi}{12}) > 0$ et finalement,

Ne pas oublier de vérifier que le module est strictement positif.

$$\begin{cases} |z_n| = \frac{1}{\cos^n(\frac{5\pi}{12})} \\ \arg(z_n) \equiv -\frac{3n\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}$$

2. Notons encore pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n ce nombre complexe. On rappelle que :

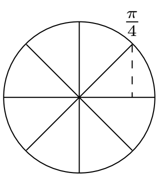
$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \sqrt{2}^n.\left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}^n.2\cos(\frac{n\pi}{4})$$

On en déduit que $z_n \in \mathbb{R}$. Discutons alors le signe de $\cos(\frac{n\pi}{4})$ en fonction des valeurs prises par $n \in \mathbb{N}$:

On discute les huit valeurs possibles sur un tour du cercle trigo : on dit qu'on travaille modulo 8.



- si $n = 8q$ ou $8q+1$ ou $8q+7$ où $q \in \mathbb{Z}$, alors $\cos(\frac{n\pi}{4}) > 0$ donc

$$\begin{cases} |z_n| = \sqrt{2}^n.2\cos(\frac{n\pi}{4}) \\ \arg(z_n) \equiv 0\ [2\pi] \end{cases}$$

- si $n = 8q+2$ ou $8q+6$ où $q \in \mathbb{Z}$, alors $\cos(\frac{n\pi}{4}) = 0$ donc $z_n = 0$.
- si $n = 8q+3$ ou $8q+4$ ou $8q+5$ où $q \in \mathbb{Z}$, alors $\cos(\frac{n\pi}{4}) < 0$ donc $z_n = -\sqrt{2}^n.2\cos(\frac{n\pi}{4})e^{i\pi}$ de sorte que :

$$\begin{cases} |z_n| = -\sqrt{2}^n.2\cos(\frac{n\pi}{4}) \\ \arg(z_n) \equiv \pi\ [2\pi] \end{cases}$$

Exercice 3. Résolution d'équations polynomiales dans $\mathbb{C}$.
Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$;
2. $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$;
3. $(z+1)^3 - (z-1)^3 = 0$.

1. Il s'agit d'une équation à coefficients complexes de degré 2 : on calcule le discriminant $\Delta = -8 - 6i$ et on cherche une racine carrée δ telle que :

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow (a+ib)^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ 2ab = -6 \\ b = \pm 3 \end{cases}$$

La dernière égalité vient de l'égalité des modules $|\delta|^2 = |\Delta|$.

La deuxième condition nous donne alors : $\delta = 1 - 3i$ convient. On en déduit :

$$S = \{1 + 2i, 2 - i\}$$

2. Il s'agit d'une équation à coefficients complexes de degré 6. Posons $Z = z^3$ de sorte que :

$$z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0 \Leftrightarrow Z^2 + (2i-1)Z - 1 - i = 0$$

On résout cette dernière équation. Il vient $\Delta = 1$, et ainsi $\delta = 1$ convient. Par conséquent,

$$Z^2 + (2i-1)Z - 1 - i = 0 \Leftrightarrow Z \in \{-i, 1-i\}$$

On est alors amené à résoudre deux nouvelles équations :

$$z^3 = -i \text{ et } z^3 = 1 - i$$

- pour cette première équation, on remarque que i est une solution évidente et ainsi, on a immédiatement $z \in \{ie^{i\frac{2k\pi}{3}},\ k \in [\![0,2]\!]\}$.
- $z^3 = 1 - i \Leftrightarrow z^3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
En posant $z = \rho e^{i\theta}$ $(\rho > 0, \theta \in \mathbb{R})$, on identifie le module et argument et ainsi, $z \in \{2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}e^{i\frac{2k\pi}{3}},\ k \in [\![0,2]\!]\}$.

Les solutions sont obtenues en multipliant une solution particulière par les racines de l'unité.

On en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$S = \{i, ie^{i\frac{2\pi}{3}}, i.e^{i\frac{4\pi}{3}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{7\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{15\pi}{12}}\}$$

3. En développant, on peut se ramener à une équation du second degré à coefficients réels. Par ailleurs :

$$(z+1)^3 - (z-1)^3 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^3 = (z-1)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 = 1\ , z \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}_3\ , z \neq 1 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = e^{i\frac{2k\pi}{3}}\ k \in \{1, 2\}.$$

En conclusion, on trouve alors en notant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$:

$$S = \{\frac{j+1}{j-1}, \frac{j^2+1}{j^2-1}\}.$$

On a aussi $j^2 = \overline{j}$: $1, j, j^2$ sont les racines 3-ièmes de l'unité.

Au concours

Exercice 4. (Adapté des Mines de sup 2000)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $A(X) = (X+1)^{2n} - 1$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, et on pose :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{2n})$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $X, Y \in \mathbb{C}$: $X^n - Y^n = (X - Y) \sum_{k=0}^{n-1} X^k Y^{n-1-k}$.
2. En déduire que pour tout $X \in \mathbb{C}$, $A(X) = X.B(X)$, où B est un polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant ainsi que le terme constant noté b_0.
3. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, \dots, z_{2n-1}$ seront mises sous forme exponentielle.
4. Montrer que $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin(\frac{k\pi}{2n})$. En déduire que si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin(\frac{k\pi}{2n})$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.
5. Calculer de deux façons le produit : $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$, puis en déduire Q_n et P_n.

Par convention, $X^0 = 1$.

1. Soit $X, Y \in \mathbb{C}$. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
   - Pour $n = 1$, $(X - Y) \sum_{k=0}^{0} X^k Y^{0-k} = X - Y$ et donc la propriété est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que la propriété est vraie au rang n. Dans ce cas,

     $$X^{n+1} - Y^{n+1} = X(X^n - Y^n) + XY^n - Y^{n+1} = X(X^n - Y^n) + (X - Y)Y^n$$

     or d'après l'hypothèse de récurrence, $X^n - Y^n = (X - Y) \sum_{k=0}^{n-1} X^k Y^{n-1-k}$ de sorte que :

     On décale l'indice dans la somme : on parle de changement d'indice.

     $$\begin{aligned} X^{n+1} - Y^{n+1} &= X(X - Y) \sum_{k=0}^{n-1} X^k Y^{n-1-k} + (X - Y)Y^n \\ &= (X - Y) \sum_{k=0}^{n-1} X^{k+1} Y^{n-1-k} + (X - Y)Y^n \\ &= (X - Y) \sum_{k=1}^{n} X^k Y^{n-k} + \underbrace{(X - Y)Y^n}_{\text{cas } k=0} \end{aligned}$$

     et ainsi $X^{n+1} - Y^{n+1} = (X - Y) \sum_{k=0}^{n} X^k Y^{n-k}$, ce qui achève la récurrence.

   En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X^n - Y^n = (X - Y) \sum_{k=0}^{n-1} X^k Y^{n-1-k}$.
2. La formule de factorisation précédente nous donne, pour tout $X \in \mathbb{C}$,

   $$A(X) = (X+1)^{2n} - 1^{2n} = (X + 1 - 1) \sum_{k=0}^{2n-1} (X+1)^k . 1^{2n-1-k} = XB(X)$$

où $B(X)=\sum_{k=0}^{2n-1}(X+1)^k$.
On constate alors que B est un polynôme unitaire de degré $2n-1$ et de terme constant :

$$b_0 = B(0) = \sum_{k=0}^{2n-1} 1 = 2n$$

3. Avec $A(X)=XB(X)$, 0 est racine évidente. D'autre part, on peut écrire :

$$B(X) = \sum_{k=0}^{2n-1}(X+1)^k = \frac{(X+1)^{2n}-1}{X+1-1} = \frac{(X+1)^{2n}-1}{X}$$

Ainsi, r est racine de B si et seulement si :

$$\begin{cases}(r+1)^{2n}=1\\ r\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r+1\in\mathbb{U}_{2n}\\ r\neq 0\end{cases}$$

On en déduit que les racines de A de degré $2n$ sont exactement : $z_0=0$ ainsi que les $2n-1$ complexes $z_k = e^{i\frac{k\pi}{n}}-1,\ k\in[\![1,2n-1]\!]$.
En factorisant par l'exponentielle de la demi-somme, il vient :

Un polynôme de degré $2n$ a au plus $2n$ racines.

$$z_k = e^{i\frac{k\pi}{2n}}(e^{i\frac{k\pi}{2n}}-e^{-i\frac{k\pi}{2n}}) = 2ie^{i\frac{k\pi}{2n}}\sin(\frac{k\pi}{2n})$$

Formule d'Euler.

4. On fait un changement d'indice en posant $l=2n-k$, ainsi :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{2n}) = \prod_{l=n+1}^{2n-1}\sin(\frac{(2n-l)\pi}{2n}) = \prod_{l=n+1}^{2n-1}\sin(\frac{l\pi}{2n})$$

et par conséquent :

$$Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1}\sin(\frac{k\pi}{2n}) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{2n}).1.\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin(\frac{k\pi}{2n}) = P_n^2$$

5.
- Les questions précédentes nous permettent alors de factoriser le polynôme B et d'après la question 2, B étant unitaire de degré $2n-1$:

$$B(X) = \prod_{k=1}^{2n-1}(X-z_k)$$

Le coefficient dominant vaut 1.

Et donc, $B(0)=2n=\prod_{k=1}^{2n-1}(-z_k) \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n$.

- D'autre part,

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = \prod_{k=1}^{2n-1} 2ie^{i\frac{k\pi}{2n}}\sin(\frac{k\pi}{2n}) &= (2i)^{2n-1}e^{i\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1}k}Q_n\\ &= (2i)^{2n-1}e^{i(2n-1)\frac{\pi}{2}}Q_n = (2i)^{2n-1}(-1)^{n+1}iQ_n\end{aligned}$$

Par conséquent, il vient $(2i)^{2n-1}(-1)^{n+1}iQ_n = -2n \Leftrightarrow 2^{2n-1}Q_n = 2n$ et donc :

$$Q_n = \frac{n}{2^{2n-2}} \text{ et } P_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

On a : $i^{2n-1} = i^{2n}/i = (-1)^n.(-i) = (-1)^{n+1}i$.

Chapitre 2

Techniques de calcul en analyse

Présentation

Étudions l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^5 - x - 1 = 0. \tag{E}$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^5 - x - 1$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 5\,x^4 - 1 = 5\,(x-\alpha)\,(x+\alpha)\,(x^2+\alpha^2)$$

où on a posé $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$. De plus $f(-\alpha) = -\frac{4}{5} - 1 < 0$ (car $\alpha^4 = \frac{1}{5}$).

On obtient ainsi le tableau :

x	$-\infty$		$-\alpha$		α	a		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\alpha) < 0$	$\searrow$	$f(\alpha) < 0$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance de f sur $[\alpha, +\infty[$ montre que l'équation (E) possède une unique solution. Nous verrons dans ce chapitre que le *théorème de la bijection* justifie également l'existence et l'unicité de cette solution.

Nous avons démontré que le polynôme $X^5 - X - 1$ possède exactement 1 racine réelle sans en déterminer une expression. Contrairement au cas des trinômes du second degré, il est impossible d'avoir des formules générales pour obtenir une expression « simple » de cette racine.

Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition, représentation graphique

Définition. Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une correspondance, qui à un réel x associe **au plus** un élément $f(x) \in \mathbb{R}$. Lorsque $f(x)$ est défini, $f(x)$ est appelé **image** de x et x est un antécédent de $f(x)$.

Définition. On appelle **ensemble de définition** d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ existe.

Dans la suite, f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont le domaine de définition est noté $\mathscr{D}(f)$.

Définition. Soit $I \subset \mathscr{D}(f)$. On note $f(I)$ l'ensemble de toutes les images de tous les éléments de I appelé image de I par f.

On peut faire la somme, la différence, le produit et le quotient de deux fonctions mais également :

Définition. Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit la fonction composée de f par g :

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

lorsque $g\big(f(x)\big)$ existe (c'est-à-dire lorsque $f(x) \in \mathscr{D}(g)$).

Définition. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle **courbe représentative** de f (ou **graphe** de f) l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$. On notera cette courbe $\mathscr{C}_f$.

Parité, imparité, périodicité

Définition. Un ensemble A est symétrique par rapport à $a \in \mathbb{R}$ lorsque pour tout $x \in A$, $a - x \in A$.

Définition. On dit que f est

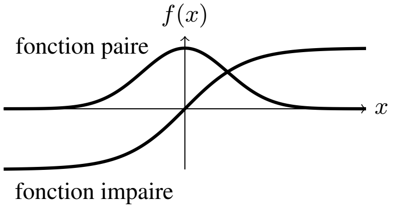
(i) **paire** lorsque $\mathscr{D}(f)$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$: $f(-x) = f(x)$;

(ii) **impaire** lorsque $\mathscr{D}(f)$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$: $f(-x) = -f(x)$;

(iii) T-**périodique** lorsqu'il existe $T \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que

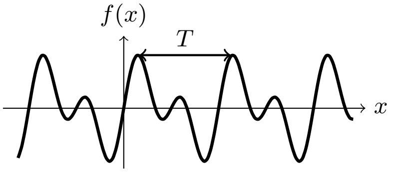
$$\forall x \in \mathscr{D}(f), \quad x + T \in \mathscr{D}(f) \text{ et } f(x+T) = f(x).$$

Le réel T est appelé **période** de f.



Le graphe d'une fonction :

- paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- impaire est symétrique par rapport au centre du repère.



Le graphe d'une fonction périodique est invariant par translation de période T.

Monotonie

Définition. On dit que f est

(i) **croissante** (respectivement **décroissante**) sur I lorsque

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (resp. } f(x_1) \geq f(x_2)\text{)};$$

(ii) **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) sur I lorsque

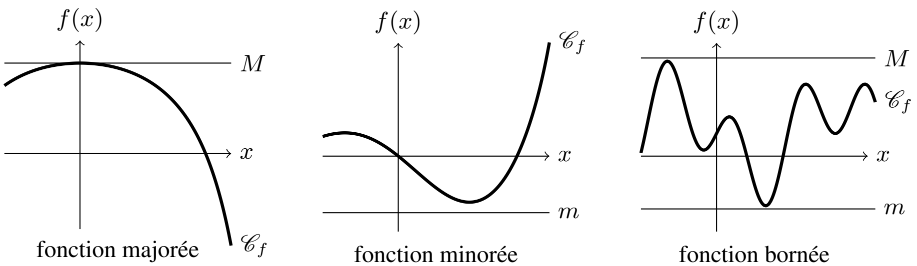
$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \text{ (resp. } f(x_1) > f(x_2)\text{)}.$$

La monotonie d'une fonction est donnée **sur** un ensemble : c'est une propriété **globale**.

Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition. Soit $A \subset \mathscr{D}(f)$. On dit que f est

1. **majorée** sur A lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, $f(x) \leq M$;
2. **minorée** sur A lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, $f(x) \geq m$;
3. **bornée** sur A lorsque f est à la fois majorée et minorée sur A.



fonction majorée — fonction minorée — fonction bornée

Proposition 1. f est bornée sur $A \subset \mathscr{D}(f)$ si et seulement si : $\exists C \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in A,\ |f(x)| \leq C$.

Limites

Soit f, g admettant des limites en $a \in \mathscr{D}(f) \cap \mathscr{D}(g)$ ou $a = \pm\infty$. On a les opérations sur les limites :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big)$	$\lim\limits_{x \to a} f(x)\, g(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell\,\ell'$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$
$\pm\infty$	$\mp\infty$	F.I.	$-\infty$
$\ell > 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\ell < 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)}$
$\ell \neq 0$	$\frac{1}{\ell}$
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$

- F.I. sont des formes indéterminés : les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure.
- Pour étudier la limite d'un quotient, on peut utiliser le tableau en écrivant $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.
- Ces tableaux sont valables pour des limites en a^+ (limite à droite en a) et en a^- (limite à gauche en a).

Le théorème suivant sera donné de façon plus précise dans le chapitre Limites et continuité.

Théorème 2. (Composition des limites) Si les limites suivantes

$$b = \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{X \to b} g(X)$$

existent alors

$$\lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = \lim_{X \to b} g(X).$$

Ce théorème peut être vu comme un changement de variable $X = f(x)$.

Continuité

Définition. On dit que f est continue en $a \in \mathscr{D}(f)$ si et seulement si f admet une limite en a et

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Une fonction est continue sur un ensemble I lorsqu'elle est continue en tout $a \in I$.

Les fonctions usuelles : les polynômes, $\exp$, $\ln$, $\cos$, $\sin$, $\sqrt{\ }$ sont continues sur leurs ensembles de définition.

Proposition 3. Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un ensemble I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) λf, $f + g$ et fg sont continues sur I.

(ii) Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

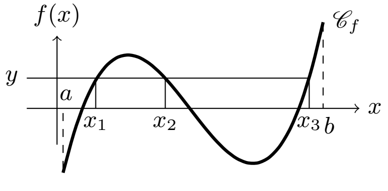
Proposition 4. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et g une fonction **définie et continue sur** $f(I)$. La fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Ceci signifie que pour $a \in \mathbb{R}$, si g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Théorème 5. (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction continue sur intervalle $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. Pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que

$$y = f(x_0).$$

On peut représenter graphiquement le théorème des valeurs intermédiaires :



En considérant $x \in [a, b]$ comme inconnue :

- l'ensemble des solutions de l'équation $y = f(x)$ est :

$$\{x_1, x_2, x_3\};$$

- l'ensemble des solutions de l'inéquation $y \leq f(x)$ est :

$$[x_1, x_2] \cup [x_3, b].$$

Dérivation

On donnera uniquement dans cette partie des aspects calculatoires : les aspects théoriques sont traités dans le chapitre Dérivabilité.

Théorème 6. Lorsque f est dérivable en $a \in \mathscr{D}(f)$, une équation de sa tangente en a est donnée par la formule $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Dans le tableau suivant, le domaine est l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable, et on considère n un entier naturel non nul, k un entier relatif strictement négatif et C une constante réelle.

Fonction	Dérivée	Domaine
$x \mapsto C$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^k$	$x \mapsto k\,x^{k-1}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+,*}$

Fonction	Dérivée	Domaine
cos	$-\sin$	$\mathbb{R}$
sin	cos	$\mathbb{R}$
exp	exp	$\mathbb{R}$
ln	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$

Proposition 7. Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Les fonctions $f + g$, λf et $f\,g$ sont dérivables sur I et

$$(f+g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f' \quad \text{et} \quad (f\,g)' = f'\,g + f\,g'.$$

(ii) Si g **ne s'annule pas sur** I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Proposition 8. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et g une fonction définie et dérivable sur $f(I)$. La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Cette proposition permet de retrouver toutes les dérivées composées usuelles.

Proposition 9. (Variations de f) Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

(i) f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

(ii) f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{(resp. } f'(x) \leq 0\text{)}.$$

(iii) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) , alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante).

Le (iii) est valable lorsque f' s'annule au plus en un nombre fini de points.

C'est avec ce théorème qu'on établit le **tableau des variations** d'une fonction.

Fonctions bijectives

Définition. Une fonction f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J lorsque :

$$\text{pour tout } y \in J, \text{ il existe un unique } x \in I \text{ tel que } y = f(x).$$

On dit aussi que f est bijective de I sur J : f fait correspondre de manière unique les éléments de I et J.

La notion de bijection est détaillée dans le chapitre Ensembles et applications.

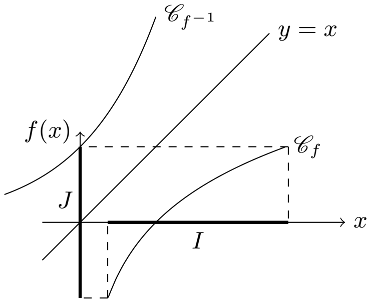
Définition. Avec les notations de la définition précédente, si f est bijective, on appelle **application réciproque**, qu'on note f^{-1}, l'application de J dans I qui vérifie, pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in J$,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Théorème 10. (Théorème de la bijection) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie, **continue et strictement monotone** sur I.

(i) f est une bijection de I sur $J = f(I)$.

(ii) Son application réciproque f^{-1} de J dans I est continue et strictement monotone sur J avec la même monotonie que f.



J est directement donné par le tableau des variations.

Les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Théorème 11. (Dérivée d'une réciproque) Soit f une bijection de I sur J. Si f est dérivable sur I et si sa fonction dérivée f' **ne s'annule pas sur** I, alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exercices

Exercice 1. Homographies.
Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$. On considère

$$f : x \mapsto \frac{a\,x + b}{c\,x + d}.$$

1. Déterminer le domaine de définition, noté $\mathscr{D}(f)$, et les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}(f)$ et déterminer une expression de sa dérivée.
3. Dresser le tableau des variations de f lorsque $ad - bc > 0$.
4. Montrer que f réalise une bijection entre $\mathscr{D}(f)$ et un ensemble que l'on précisera.

1. La fonction est définie lorsque son dénominateur ne s'annule pas donc son domaine de définition vaut, puisque $c \neq 0$,
$$\mathscr{D}(f) = \left]-\infty, -\tfrac{d}{c}\right[\cup \left]-\tfrac{d}{c}, +\infty\right[.$$
On peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f(x) = \frac{a + b/x}{c + d/x}.$$
Or $a + b/x \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} a$ et $c + d/x \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} c$ donc par opérations sur les limites
$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{c}.$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}(f)$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathscr{D}(f)$. Pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$, on a
$$f'(x) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax+b)(cx+d) - (ax+b)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cx+d)}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}.$$

On applique la formule de dérivation d'un quotient.

3. Avec la question précédente et l'hypothèse $ad - bc > 0$, la fonction f est strictement croissante sur $\left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$ et sur $\left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$. On obtient le tableau :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$\frac{a}{c} \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow \frac{a}{c}$

Le signe de la dérivée donne la monotonie sur un intervalle.

Les limites en $-\frac{d}{c}$ à gauche et à droite viennent du signe de $ad - bc$.

4. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$ donc, par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$ sur $\left]\frac{a}{c}, +\infty\right[$ d'après le tableau.
Par le même raisonnement f réalise une bijection de $\left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$ sur $\left]-\infty, \frac{a}{c}\right[$.
On sait de plus que $\left]-\infty, \frac{a}{c}\right[\cap \left]\frac{a}{c}, +\infty\right[= \emptyset$.
En conclusion, f réalise une bijection de $\mathscr{D}(f)$ sur $\left]-\infty, \frac{a}{c}\right[\cup \left]\frac{a}{c}, +\infty\right[$.

Le théorème de la bijection s'applique sur un intervalle donc il faut l'appliquer deux fois.

Exercice 2. Obtention d'inégalités.

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x).$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

On étudie le signe de la différence.

1. On étudie la fonction
$$f : x \mapsto x - \ln(1+x).$$
Comme $\ln$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, par composition, f est définie et dérivable sur $]-1, 1[$. On a, pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$
donc $f'(x)$ est du signe de x. On a également $f(0) = 0$.
On obtient ainsi le tableau des variations de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, f est positive sur $]-1, 1[$ c'est-à-dire : pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$0 \leq x - \ln(1+x) \iff \ln(1+x) \leq x.$$
De la même manière, $-x \in]-1, 1[$, donc en remplaçant x par $-x$ dans l'inégalité précédente,

x est une lettre muette dans l'inégalité.

$$\ln(1-x) \leq -x \iff x \leq -\ln(1-x).$$
En conclusion, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Appliquons la partie de droite de l'inégalité précédente en considérant le cas particulier $x = 1/n \in]-1, 1[$:
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

On mentionne la monotonie de la fonction avant de composer les membres de l'inégalité.

En multipliant par n et en composant par la fonction $\exp$ qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient
$$\exp\left[n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \leq e^1 \leq \exp\left[-n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]$$

Pour $a \in \mathbb{R}^{+,*}$, $b \in \mathbb{R}$, $a^b = e^{b \ln a}$.

ce qui s'écrit
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Remarque. On peut montrer que les termes de droite et de gauche de cette dernière inégalité convergent vers e lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3. Une étude de fonction.
On considère la fonction
$$f : x \mapsto \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}(f)$ de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un ensemble qu'on précisera. On note g son application réciproque.
3. Déterminer une expression de g.

1. Comme $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction f est définie lorsque son dénominateur ne s'annule pas. Or, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$e^x - e^{-x} = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff e^{2x} = 1 \iff 2x = 0 \iff x = 0.$$
Le dénominateur est du signe de x.
Ainsi, f est définie sur $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}^*$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme inverse d'une fonction dérivable ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in]0, +\infty[$,
$$f'(x) = 2\,\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$
car lorsque $x > 0$, $e^x > 1 > e^{-x}$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante.
De plus, $e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par opération sur les limites
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
De même, $f(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
Par suite, la fonction f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc, par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ compte-tenu des limites précédentes. On note g sa fonction réciproque.
Les limites donnent la valeur de $f(]0, +\infty[)$.
3. Soit $y \in]0, +\infty[$. L'équation d'inconnue $x \in]0, +\infty[$: $y = f(x)$ admet l'unique solution $x = g(y)$. Déterminons l'expression de $g(y)$. Soit $x \in]0, +\infty[$. On a les équivalences :
$$y = f(x) \iff y = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \iff ye^x - ye^{-x} = 2 \iff ye^{2x} - 2e^x - y = 0.$$
En posant $X = e^x$, on résout l'équation du second degré $yX^2 - 2X - y = 0$ d'inconnue $X = e^x > 1$ car $x > 0$. Les racines de cette équation, dont le discriminant vaut $4 + 4y^2 > 0$, sont
$$\frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \sqrt{1 + y^2}}{y} < 0$$
On élimine une solution avec le signe.
où les signes viennent de l'inégalité $1 < 1 + y^2$. Compte-tenu du signe de X, on a donc
$$X = \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} \iff x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y}\right).$$
En conclusion, g est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ par
La lettre x est muette.
$$g : x \mapsto \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right).$$

Cet ouvrage est essentiellement destiné aux étudiants de classes préparatoires scientifiques MPSI et PCSI, mais il intéressera également les étudiants de première et seconde années de licence de mathématiques.

L'adaptation à l'enseignement supérieur peut être difficile : hiérarchisation des connaissances, maîtrise de techniques classiques, résolution de problèmes longs à questions enchaînées. Ce manuel a été conçu pour répondre à ces trois difficultés. Les programmes des deux filières MPSI et PCSI ont de nombreuses notions communes et les quelques chapitres différents sont indiqués dans l'ouvrage.

Chaque chapitre contient :

- une page d'introduction qui comporte souvent un script Python vous permettant de faire le lien avec le cours d'informatique ;
- un résumé de cours de 5 pages qui comporte toutes les notions du programme de façon concise ;
- des exercices qui ont été choisis pour leur caractère classique et leur mise en œuvre des théorèmes majeurs du programme. L'ouvrage comporte une centaine d'exercices tous corrigés avec soin et comportant de nombreuses remarques ;
- un problème qui doit vous permettre d'aborder sereinement les devoirs surveillés ainsi que vous préparer aux concours de seconde année.

9 782340 007758

www.editions-ellipses.fr