MATHÉMATIQUES

LES 113 exercices corrigés

2e édition

William SMITH

Dumé WESSON

posés à l'oral

Concours
Communs
Polytechniques

Filière MP

ellipses

MATHÉMATIQUES

LES 113 exercices corrigés

posés à l'oral

***C**oncours*
***C**ommuns*
***P**olytechniques*

2e édition

William SMITH Dumé WESSON

ellipses

ISBN 9782340-049819

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Il n'est pas de meilleure préface que les indications du jury :

À cette épreuve, les élèves ont deux exercices à résoudre. Le premier, noté sur 8 points, porte sur des notions fondamentales du programme. Il s'agit de questions de cours ou d'exercices d'applications classiques, figurant dans la liste ci-jointe.

La banque actuelle est constituée de 113 énoncés, 58 d'analyse, 37 d'algèbre et 18 de probabilités.

Nous avons fait précéder chaque exercice, en italique, du thème ou du chapitre de cours à connaître avant d'aborder la recherche. En effet, ce recueil se veut une aide à la préparation au concours, un manuel à utiliser tout au long de l'année pour les colles.

Dans cette optique, nous avons rajouté, en fin de volume, d'anciens exercices figurant dans l'ancienne banque et qui ont été supprimés.

Précisions :

- Lorsqu'il est demandé de « démontrer », l'élève doit faire une démonstration de la propriété indiquée, et ne pas se contenter de faire appel à un résultat direct de cours. Cette remarque concerne essentiellement les questions de cours.
- Ces énoncés recouvrent une grande partie du programme. L'étude d'une telle banque peut donc permettre aux candidats de mieux se préparer, en confiance, à l'oral bien sûr, mais aussi à l'écrit.

Il ne suffit pas d'avoir les meilleurs pistolets pour sortir vainqueur du duel ; il faut s'entraîner pour savoir les utiliser.

Analyse

Exercice 1

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \sim v_n$. Démontrez que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2. Déterminez le signe au voisinage de l'infini de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Équivalence de suites.

1. Par définition il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 1 et telle que, à partir d'un rang n_0, on a $u_n = v_n\alpha_n$. On choisit un rang n_1 à partir duquel $\alpha_n > 0$ et alors, pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a u_n et v_n de même signe.

2. Comme, en 0, on a les développements limités $\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, par différence $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{6n^3}$ et, donc, $u_n < 0$ pour n assez grand.

Exercice 2

On pose $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(3-x)}$.

1. Décomposez $f(x)$ en éléments simples et en déduire la primitives G de f définie sur l'intervalle $]-1,3[$ telle que $G(1) = 0$.

2. Déterminez le développement en série entière en 0 de la fonction f et précisez le rayon de convergence.

3. Déduire de ce développement la valeur de $G^{(3)}(0)$.

Décomposition en éléments simples et séries entières associées.

1. $f(x) = \dfrac{\alpha}{(x+1)^2} + \dfrac{\beta}{x+1} + \dfrac{\gamma}{3-x}$ et, en utilisant les équivalents en -1 et en 3, on obtient $\alpha = \frac{1}{4}$ et $\gamma = \frac{1}{16}$.

Enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0 = \beta - \gamma$ d'où $\beta = \frac{1}{16}$.

Par suite G est primitive de f sur $]-1,3[$ si, et seulement si, il existe un réel k tel que, sur cet intervalle, $G(x) = -\dfrac{1}{4(x+1)} + \dfrac{1}{16}\ln\left(\dfrac{x+1}{3-x}\right) + k$.

Enfin $G(1) = 0 \iff k = \frac{1}{8}$.

2. Sur $]-1,1[$ on a $16f(x) = \dfrac{1}{1+x} - 4\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1+x}\right) + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}$ ou encore

$$16f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-1-n}x^n \text{ soit}$$

$16f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n(4n+5) + E^{-1-n}\right]x^n$ et le rayon de convergence de cette série entière est 1.

3. $G^{(3)}(0) = f''(0) = 2a_2$ si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ au voisinage de 0 d'après la formule de Taylor, d'où $G^{(3)}(0) = \left(13 + \dfrac{1}{27}\right) \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{44}{27}\cdot$

Exercice 3

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}\cdot$
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On pose $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$ pour $x > -1$. Calculez $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Formule de Leibniz.

1. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $]-1, +\infty[$ respectivement avec $g^{(p)} : x \mapsto 2^p e^{2x}$ et $h^{(q)} : x \mapsto (-1)^q q!(1+x)^{-q-1}$.

2. Par suite $x > -1 \Rightarrow f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k!(1+x)^{-k-1} 2^{n-k} e^{2x}$, soit

$$f^{(n)}(x) = \frac{2^n n! e^{2x}}{1+x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)!(2+2x)^k}\cdot$$

3. On procède par récurrence sur n en utilisant $(fg)^{(n+1)} = (f'g + fg')^{(n)}$, l'hypothèse de récurrence et le triangle de Pascal.

Exercice 4

Théorème(s) des accroissements finis.

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
Démontrez que si f' admet une limite en x_0, alors la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$.

2. Prouver que l'implication :

$$\big(f \text{ est dérivable en } x_0\big) \Rightarrow \big(f' \text{ admet une limite finie en } x_0\big)$$

est fausse.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

---

1. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et à valeurs réelles alors il existe un élément c de $]a, b[$ pour lequel $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

2. L'inégalité des accroissements finis est plus adaptée que l'égalité précédente.
Soit $\varphi : x \mapsto f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0)$ où ℓ est la limite de f' en x_0.
La fonction φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[\,\setminus\{x_0\}$ avec, sur cet ensemble, $\varphi'(x) = f'(x) - \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Au voisinage de x_0 on a $|\varphi'| \leqslant \varepsilon$ et, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à droite et à gauche de x_0, on en déduit que φ est localement ε-lipschitzienne, d'où $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \varepsilon|x - x_0|$ au voisinage de x_0. Comme $\varphi(x_0) = 0$ cela montre que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = \ell$.

3. g est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ avec $g(x) = O(x^2)$, donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. Si $x \neq 0$ alors $g'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et donc $g'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = -1$, ce qui montre que g' n'est pas continue en 0. Cela montre que l'implication proposée est fausse.

Exercice 5

Séries de Bertrand.

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\big[\ln(n)\big]^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas** $\alpha \leqslant$ **o**
En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
(b) **Cas** $\alpha >$ **o**
Étudier la nature de la série.
Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x\big[\ln(x)\big]^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 3} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{\big[\ln(n^2 + n)\big]^2}$.

---

1. (a) Si $\alpha \leqslant 0$ alors dès que $n \geqslant 3$ on a $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ et, donc, $\sum u_n$ diverge.
(b) Sinon f est positive continue et décroissante sur $[2, +\infty[$, et donc $\sum u_n$ converge si, et seulement si, f est intégrable sur $[2, +\infty[$.

Si $X \geqslant 2$ le changement de variable $u = \ln(x)$ montre :
$\displaystyle\int_e^X f(x)\,dx = \int_1^{\ln(X)} \frac{du}{u^\alpha}$ et, donc, f est intégrable sur $[2, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.
En résumé : $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2. $e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} 1$, $\ln(n^2+n) \underset{n\to\infty}{\sim} 2\ln(n)$ et $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ soit $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{=} \exp\left(-\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{=} e\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ d'où, ici, $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{e}{4n\ln(n)}$ et la question précédente dans le cas où $\alpha = 1$ montre la divergence de la série proposée.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrez que si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrivez judicieusement la définition de $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ puis majorez, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

---

1. Soit $q = \dfrac{1+\ell}{2}$, alors $\ell < q < 1$ et, par définition de la limite, à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q = \dfrac{q^{n+1}}{q^n}$ d'où $u_n = O(q^n)$. Comme $\sum q^n$ est une série à termes positifs convergente, par domination $\sum u_n$ converge.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \dfrac{n!}{n^n}\cdot$
Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1} < 1$ et la question précédente montre la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 7

Équivalence de suites, séries, absolue convergence.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrez que : $u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudiez la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln(n)}$.
(i est ici le nombre complexe de carré égal à -1).

---

1. Par définition de $\sim$ à partir d'un certain rang $0 \leqslant \dfrac{u_n}{2} \leqslant v_n \leqslant 2u_n$.
$\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum(2u_n)$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ converge par majoration.
$\sum v_n$ converge $\Rightarrow \displaystyle\sum \frac{u_n}{2}$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge toujours par majoration.
On a également utilisé la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes.

2. On évitera de faire remarquer à l'examinateur que $X^2 = -1$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$ mais on doit le savoir.
On pose, pour tout $n \geqslant 2$, $\alpha_n = \dfrac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln(n)}$.
Alors $|\alpha_n| \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}\ln(n)} \underset{n\to\infty}{=} o(n^{-\frac{5}{4}})$ et la question précédente montre que $\sum \alpha_n$ est absolument convergente et, donc, convergente.

Exercice 8

Théorème spécial des séries alternées, séries de fonctions.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
1. (a) Démontrez que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.
Indication : considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de cette série.

2. (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}.$$

(b) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de cette série de fonctions.

---

1. (a) L'hypothèse de positivité de u_n est redondante.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}(u_{2k}-u_{2k+1})$ et donc, comme $(u_n)_n$ décroît, la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante car, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u_{2k}-u_{2k+1}\geqslant 0$.
De même $S_{2n} = u_0 - \sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_{2k+1}-u_{2k+2})$ et $(S_{2n})_n$ décroît.

9 782340 011151

www.editions-ellipses.fr