ECE
1re année

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Gianfranco Niffoi
Anne-Sophie Pierson-Fertel
Nicolas Pierson

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR BERTRAND HAUCHECORNE

MATHS

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai-faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Énoncés de sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés
- Éléments d'informatique et d'algorithmique avec Scilab

3e édition actualisée

ellipses

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques
ECE - 1re année

3e édition actualisée

ouvrage coordonné par

Sylvain RONDY

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Pierre BERLANDI

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Gianfranco NIFFOI

Professeur au lycée Saint Michel de Picpus (Paris)

Anne-Sophie PIERSON-FERTEL

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Nicolas PIERSON

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les auteurs remercient Geoffrey Lescaux pour son efficace et patiente relecture.

ISBN 9782340-016446

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir surveillé, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire toutes les notions à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir surveillé ou le passage d'une colle relative au thème traité. Les résultats sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthode » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Compléments indispensables du cours, elles l'éclairent et l'illustrent.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révéler les mauvais réflexes à corriger. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi cet ouvrage vous accompagnera tout au long de l'année et vous guidera dans votre cheminement **vers le passage en deuxième année et la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

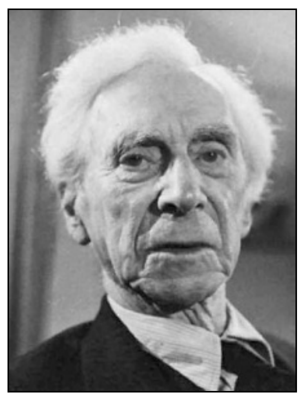
Sommaire

Premier semestre

Deuxième semestre

Chapitre 1
Raisonnements mathématiques

Le mathématicien italien Giuseppe **Peano** était très soucieux d'exposer les mathématiques dans un cadre précis et rigoureux. Dans son *Formulaire mathématique* publié en 1895, il introduisit de nombreux symboles nouveaux. On lui doit en particulier $\cap$ et $\cup$ désignant respectivement l'intersection et la réunion. Il utilise la lettre grecque *epsilon*, abréviation du grec *esti, il est*, pour noter l'appartenance et introduit le quantificateur existentiel qu'il note $\exists$, renversant un E pour signifier l'initiale du mot italien *esiste*. Il propose aussi de supprimer les déclinaisons du latin pour obtenir une langue internationale, simple et comprise par tous, qu'il nomme *Latino sine flexione*. Le logicien anglais Bertrand **Russell** propose un paradoxe qui remet en cause la théorie des ensembles et nécessite de la fonder sur un système d'axiomes.



Bertrand Russell
1872-1970

■■ Objectifs

■ Les incontournables

▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence.

▷ Savoir utiliser un raisonnement par récurrence d'ordre supérieur ou égal à 2.

■ Et plus si affinités

▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence forte (ou généralisée).

▷ Savoir mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.

▷ Savoir manipuler les connecteurs logiques et les quantificateurs.

Résumé de cours

Les éléments du raisonnement

Proposition

Définition 1.1. — On appelle *proposition* toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable x, nous pourrons la noter $\mathcal{P}(x)$.

Remarque 1.1 — On écrira indifféremment " $\mathcal{P}$ " ou " $\mathcal{P}$ est vraie ".

Exemple 1.1. — Pour tout réel x strictement positif, "$\ln(x) > 0$" est une proposition dépendante de la variable x. Elle est vraie si $x > 1$, et fausse sinon.

Exemple 1.2. — "*La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante*" est une proposition. Notons qu'elle ne dépend pas de l'entier n.

Exemple 1.3. — Pour un dé lancé, "*le numéro sorti est pair*" est une proposition.

Exemple 1.4. — Pour tout réel x, " $(2x+1)e^{-x}$ " n'est pas une proposition.

Quantificateurs

Notation — Le signe " $\forall$ " placé devant une variable x signifie "*quel que soit x*...".
Le signe " $\exists$ " placé devant une variable x signifie "*il existe (au moins) un x*...".
Le signe " $\exists!$ " placé devant une variable x signifie "*il existe un unique x*...".

" $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1>0$ " se lit : "quel que soit le réel x, x^2+1 est strictement positif" ou "pour tout réel x, x^2+1 est strictement positif".

" $\exists x \in \,]0,+\infty[,\ x^2-6x+1=0$ " se lit : "il existe au moins un réel x strictement positif tel que x^2-6x+1 est égal à 0" (il y a d'ailleurs deux tels x : $3+2\sqrt{2}$ et $3-2\sqrt{2}$).

" $\exists! n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n(n+1)}{2}=3$ " se lit : "il existe un unique entier naturel n non nul tel que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est égal à 3" (il s'agit du nombre 2).

Remarque 1.2. — Notons que, dans un énoncé, l'expression "*il existe un x*" signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

Propriété 1.1. — En général, la proposition $(\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x,y))$ est différente de $(\exists y, \forall x, \mathcal{P}(x,y))$.

Exemple 1.5. — La proposition " $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ n \le x < n+1$ " énonce que, quel que soit le réel x, il existe un entier n, tel que x soit compris entre n et $n+1$, cette dernière valeur étant exclue. C'est une proposition vraie (qui définit d'ailleurs ce que l'on appelle la partie entière de x). Elle est différente de la suivante : " $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \le x < n+1$ " qui affirme, quant à elle, que tous les réels sont compris entre deux entiers fixés. Elle est évidemment fausse.

Remarque 1.3. — Dans l'expression " $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}, \ldots$ ", il faut noter que x dépend de y, on devrait en toute rigueur le noter x_y ou $x(y)$, ce que l'on ne fait presque jamais.

❑ Connecteurs logiques

Définition 1.2. — La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée non$\mathcal{P}$ et appelée *négation* de $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Propriété 1.2. — La négation de $\left(\forall x, \mathcal{P}(x)\right)$ est la proposition $\left(\exists x, \text{non}\,\mathcal{P}(x)\right)$.
La négation de $\left(\exists x, \mathcal{P}(x)\right)$ est la proposition $\left(\forall x, \text{non}\,\mathcal{P}(x)\right)$.

Exemples 1.6. — • Pour un dé lancé trois fois, le contraire de "*les trois numéros obtenus sont pairs*" est "*au moins un des numéros obtenus est impair*".

• La négation de " $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ n \leq x < n+1$ " est :

" $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ x < n$ ou $x \geq n+1$ "

La première proposition est vraie puisqu'elle définit l'entier n qui est la partie entière de x (voir **exemple 1.5**) et la deuxième est fausse car il n'existe pas de réel x tel qu'aucun entier ne soit dans l'intervalle $\left]x-1,\ x\right]$.

Définition 1.3. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *disjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), le "ou" étant entendu ici inclusivement (soit $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{Q}$, soit les deux).

Exemple 1.7. — Pour un dé lancé, on considère $\mathcal{P}$: "*le numéro sorti est pair*", et $\mathcal{Q}$: "*le numéro sorti est supérieur ou égal à* 3". Alors, ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 2,3,4,5 *ou* 6".

Définition 1.4. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *conjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) (les deux simultanément).

Exemple 1.8. — En reprenant l'**exemple 1.7**, ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 4 *ou* 6".

Définition 1.5. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *implique* $\mathcal{Q}$, et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, lorsque, si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie (l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).

Vocabulaire — Lorsque $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante de $\mathcal{Q}$, et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{P}$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment établir que $f(x) \leq f(y)$?**

⇨ **Méthode 1.2. Comment établir une inégalité quelconque ?**

⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par implication ?**

Exemple 1.9. — Pour tout réel x, on a : $\left(x = x^2\right) \Rightarrow \left(x \geq 0\right)$ (l'implication réciproque est fausse).

Définition 1.6. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *équivaut* à $\mathcal{Q}$ (ou que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Vocabulaire — Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une *condition nécessaire et suffisante* de $\mathcal{Q}$.

⇨ **Méthode 1.5. Comment montrer une équivalence par double implication ?**

Exemple 1.10. — $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \left(\ln a < \ln b\right) \Leftrightarrow \left(a < b\right)$.

Exemple 1.11. — Pour tout entier n, n est multiple de 6 si, et seulement si, n est multiple à la fois de 2 et de 3.

■ Différents types de raisonnements

❑ Démonstration par l'absurde

Théorème 1.1. — Quelles que soient les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, pour montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie, que $\mathcal{Q}$ est fausse, et on montre que c'est impossible.

⇨ **Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par l'absurde ?**

❑ Démonstration par récurrence

Récurrence simple

Théorème 1.2. — Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n.
Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si, en supposant la proposition $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on montre que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Méthode 1.6. Comment montrer une proposition par récurrence ?**

Vocabulaire. — La preuve de $\mathcal{P}(n_0)$ s'appelle l'*initialisation* de la récurrence. La vérité de l'implication $\big(\mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\big) \Rightarrow \big(\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}\big)$ s'appelle l'*hérédité* de la proposition.
Attention ! Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n (sinon, il n'y a plus rien à prouver !). On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n, et on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
Remarque 1.4. — La plupart du temps, on a $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

Récurrence d'ordre p (avec $p \geq 2$)

Il arrive que, pour établir une proposition à un certain rang, on ait besoin de savoir qu'elle est vraie aux p rangs précédents (souvent $p = 2$). On a alors :

Théorème 1.3. — Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n.
Si les p premières propositions $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(p-1)$ sont vraies et si, en supposant les p propositions $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), \ldots, \mathcal{P}(n+p-1)$ vraies, pour un certain entier naturel n de $\mathbb{N}$, on montre que $\mathcal{P}(n+p)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier n de $\mathbb{N}$.

⇨ **Méthode 1.7. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 ?**

Récurrence forte

Pour établir l'hérédité d'une proposition, il se peut que l'on ait besoin de savoir si elle est vraie à tous les rangs jusqu'au $n^{\text{ème}}$ (et non pas seulement au $n^{\text{ème}}$), pour en montrer la vérité au rang $(n+1)$. On a alors le résultat suivant :

> **Théorème 1.4. —** Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel *n*.
> Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si, pour un certain entier naturel *n*, en supposant les propositions $\mathcal{P}(k)$ vraies pour tout *k* de $[\![0,n]\!]$, on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier naturel *n*.

⇨ **Un exemple de démonstration par récurrence forte sera donné au chapitre 2**

Remarque 1.5. — On ne peut pas remplacer une récurrence d'ordre 2 par une récurrence forte. Dans le cas d'une récurrence d'ordre 2, pour un entier *n* donné, on a besoin de la vérité de $\mathcal{P}(n)$ et de $\mathcal{P}(n+1)$ pour établir celle de $\mathcal{P}(n+2)$. La vérité d'une seule ne suffit pas ! On ne peut donc pas, contrairement à ce qui se passe dans la récurrence forte, déduire $\mathcal{P}(1)$ de $\mathcal{P}(0)$: il faut $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ pour obtenir $\mathcal{P}(2)$, puis enclencher la récurrence.

Comparaison d'expressions

Méthode 1.1. Comment établir que $f(x) \leq f(y)$?

Si une fonction f est monotone sur un ensemble I, et si x et y appartiennent à I, alors comparer x et y suffit pour comparer $f(x)$ et $f(y)$.

Plus précisément :

• Si f est croissante sur I, alors : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

• Si f est décroissante sur I, alors : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Remarque : si l'on veut établir des équivalences au lieu d'implications, il faut signaler en plus la bijectivité de f (ce qui établit l'implication réciproque grâce aux variations de f^{-1} qui sont les mêmes que celles de f).

⇨ Exercice 1.4

Exemple. Montrer que quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} \quad \text{(nous noterons cette inégalité } (I)\text{)}$$

Remarque importante de présentation — Nous allons commencer par une analyse qui se fait au brouillon, ou même, avec un peu d'habitude, mentalement. Nous proposerons une rédaction "au propre" dans un second temps.

Au brouillon :

• Compte tenu des règles sur les exposants, (I) s'écrit : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]^n$.

• Puisque la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque les deux membres de l'inégalité sont positifs (car $n \geq 2$), alors cette dernière inégalité équivaut à la suivante :

$$1-\frac{2}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^2.$$

• Mais, en développant le membre de droite, nous nous rendons compte que cette inégalité est évidente. En effet, elle s'écrit : $1-\frac{2}{n} \leq 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire : $0 \leq \frac{1}{n^2}$, ce qui est vrai.

Sur la copie :
Il suffit de "partir" de la fin du raisonnement au brouillon :
$\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} \geq 1-\frac{2}{n}$ (car $\frac{1}{n^2} \geq 0$) donc : $1-\frac{2}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^2$.

La fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et chaque membre est positif (car $n \geq 2$)

donc : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]^n$.

Cette inégalité s'écrit bien : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$.

❑ Méthode 1.2. Comment établir une inégalité quelconque ?

Si l'inégalité que l'on se propose de prouver ne peut pas se mettre sous la forme étudiée à la **méthode 1.1,** alors en "passant tout" dans un même membre, on se ramène à prouver qu'une expression est positive (ou négative, selon les cas). Il sera par exemple possible, mais non obligatoire (voir ci-dessous), d'étudier les variations de la fonction définie par cette expression.

⇨ **Exercice 1.4**

Exemple 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 2\sqrt{x}-1$.

Pour tout réel x positif, on a la chance de constater que : $x-2\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-1\right)^2$.

Comme un carré est positif, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x-2\sqrt{x}+1 \geq 0$.

On a bien montré que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 2\sqrt{x}-1$.

Exemple 2. Montrer que : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ \ln(1+x) \leq x$.

On pose $f(x) = x - \ln(1+x)$ et on étudie la fonction f sur $\left]-1, +\infty\right[$.

Cette fonction est bien sûr dérivable et on a : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ f'(x) = 1-\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.

Comme $1+x>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de x, ce qui prouve que f décroît sur $\left]-1, 0\right[$ et croît sur $\left]0, +\infty\right[$. Elle est donc minimale pour $x=0$.

On a alors : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ f(x) \geq f(0)$. Comme $f(0)=0$ on obtient : $x-\ln(1+x) \geq 0$.

Conclusion : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ \ln(1+x) \leq x$.

■ Différents types de raisonnement

❑ Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par implication ?

La plupart du temps, pour prouver une proposition, on procède par implication (sans se sentir obligé d'utiliser le symbole $\Rightarrow$) en construisant un raisonnement "direct".

⇨ **Exercice 1.5**

Exemple. Montrer que, si $x < 1$, alors $|x-4| > 3$.
Si $x < 1$, alors $x - 4 < -3$. Par décroissance de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}_-$, on en déduit que : $|x-4| > |-3|$. Ceci veut bien dire que : $|x-4| > 3$.
Avec des notations plus symboliques, on vient de montrer que : $(x < 1) \Rightarrow (\,|x-4| > 3\,)$.

❑ Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par l'absurde ?

Pour montrer qu'une implication est vraie, il suffit de supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse, puis d'en déduire alors une contradiction.

⇨ **Exercice 1.7**

Exemple. Montrer que pour tout nombre réel x différent de -3, on a : $\dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

Par l'absurde, si l'on avait $\dfrac{x+1}{x+3} = 1$, alors on en déduirait $x+1 = x+3$, ce qui équivaut à $1 = 3$.

Ceci étant manifestement faux, on en déduit que : $\forall x \neq -3,\ \dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

❑ Méthode 1.5. Comment montrer une équivalence par double implication ?

L'équivalence $(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q})$ signifie la double implication : $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$.

⇨ **Exercice 1.6**

Remarque — On privilégiera cette méthode lorsque les arguments permettant d'établir l'une des deux implications sont différents de ceux permettant d'établir l'autre.

Exemple. Soit deux réels a et b. Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ a2^n + b3^n = 0\right) \Leftrightarrow \left(a = b = 0\right)$.

Commençons par noter que, si $a = b = 0$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a bien $a\,2^n + b\,3^n = 0$.

Méthodes

Établissons l'autre implication :

Si, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$a2^n + b3^n = 0, \text{ alors } \begin{cases} a2^0 + b3^0 = 0 \\ a2^1 + b3^1 = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} \text{si l'égalité est vraie pour tout } n \text{ alors elle} \\ \text{l'est en particulier pour } n = 0 \text{ et } n = 1 \end{pmatrix}.$$

Ce système s'écrit $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases}$ et on en déduit : $\begin{cases} b = -a \\ 2a - 3a = 0 \end{cases}$.

On a bien montré que : $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

Ceci prouve la seconde implication, et finalement l'équivalence.

Remarque — Le fait de choisir deux valeurs de n pour trouver a et b n'est pas une hérésie puisque a et b sont des constantes (indépendantes de n). Si a et b étaient des fonctions de n, tout ceci serait inacceptable.

■ Récurrences

❑ Méthode 1.6. Comment montrer une proposition par récurrence ?

n_0 est ici un entier naturel fixé.

On veut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n à partir de n_0.

- Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : on considère que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n supérieur ou égal à n_0. En utilisant $\mathcal{P}(n)$, on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est alors vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Exercices 1.8, 1.9, 1.10, 1.12**

Exemple. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{u_n} \end{cases}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

On commence par noter, pour n entier naturel, $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 1$".

• Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie par choix de u_0.

• Hérédité : on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie (c'est-à-dire $u_n = 1$) pour un entier naturel n fixé.

On a alors $u_{n+1} = \dfrac{3\times 1 - 2}{1} = 3 - 2 = 1$.

Ceci montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• En conclusion, on a bien montré, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.

❑ Méthode 1.7. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 sur l'entier naturel *n* ?

On veut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n à partir de n_0.

- Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies.
- Hérédité : on considère un entier n fixé, supérieur ou égal à n_0, tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Grâce à $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, on montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Exercice 1.11**

Remarque. On généralise sans problème au cas d'une récurrence d'ordre 3 ou plus.

Exemple. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

On commence par noter, pour n appartenant à $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 3^n - 2^{n+1}$".

• Initialisation (pour $n = 0$) :

$3^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1 = u_0$ et $3^1 - 2^2 = 3 - 4 = -1 = u_1$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

• Hérédité :

On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies pour un entier n naturel fixé et on va montrer que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie (c'est-à-dire que l'on a : $u_{n+2} = 3^{n+2} - 2^{n+3}$).

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5(3^{n+1} - 2^{n+2}) - 6(3^n - 2^{n+1})$, car $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies .

Comme $3^{n+1} = 3 \times 3^n$ et $2^{n+2} = 2 \times 2^{n+1}$, on a :

$u_{n+2} = (5\times 3 - 6).3^n + (-5\times 2 + 6).2^{n+1} = 9\times 3^n - 4\times 2^{n+1} = 3^{n+2} - 2^{n+3}$.

Ceci montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Méthodes