

# ECS

## 1<sup>re</sup> année

**Sylvain Rondy**

*Pierre Berlandi*

*Gianfranco Niffoi*

*Anne-Sophie Pierson-Fertel*

*Nicolas Pierson*

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

# MATHS

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai-faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Énoncés de sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés
- Éléments d'informatique et d'algorithmique avec Scilab

**3<sup>e</sup> édition  
actualisée**



**PRÉPAS SCIENCES**

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

# Mathématiques

## ECS - 1<sup>re</sup> année

3<sup>e</sup> édition actualisée

ouvrage coordonné par

Sylvain RONDY

*Professeur au lycée Saint Jean (Douai)*

Pierre BERLANDI

*Professeur au lycée Saint Jean (Douai)*

Gianfranco NIFFOI

*Professeur au lycée Saint Michel de Picpus (Paris)*

Anne-Sophie PIERSON-FERTEL

*Professeur au lycée Saint Jean (Douai)*

Nicolas PIERSON

*Professeur au lycée Saint Jean (Douai)*



# COLLECTION PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur [www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)



*Les auteurs remercient Geoffrey Lescaux pour son efficace et patiente relecture.*

ISBN 9782340-016460  
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2017  
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

[www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)

# Avant-propos

**Réussir en classes préparatoires** nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir surveillé, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours.

**Le résumé de cours** est là pour vous remettre en mémoire toutes les notions à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir surveillé ou le passage d'une colle relative au thème traité. Les résultats sont énoncés sans démonstration.

**La partie « méthode »** vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Compléments indispensables du cours, elles l'éclairent et l'illustrent.

**La partie « vrai/faux »** vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révéler les mauvais réflexes à corriger. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

**Les exercices** sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi cet ouvrage vous accompagnera tout au long de l'année et vous guidera dans votre cheminement **vers le passage en deuxième année et la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne



# Sommaire

## Premier semestre

1. Raisonnements mathématiques.....	1
2. Sommes et produits .....	19
3. Ensembles .....	39
4. Applications .....	57
5. Dénombrement .....	77
6. Nombres complexes.....	95
7. Polynômes .....	113
8. Matrices et systèmes linéaires.....	133
9. Espaces vectoriels.....	159
10. Généralités sur les fonctions.....	181
11. Limites.....	199
12. Continuité .....	221
13. Dérivabilité.....	241
14. Suites .....	265
15. Suites usuelles .....	287
16. Intégration sur un segment.....	305
17. Probabilité sur un univers fini .....	327
18. Conditionnement et indépendance (univers fini).....	345
19. Variables aléatoires finies .....	365
20. Lois finies usuelles .....	387

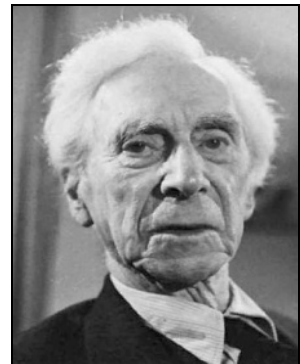
## Deuxième semestre

21. Espaces vectoriels de dimension finie .....	403
22. Applications linéaires .....	427
23. Applications linéaires en dimension finie .....	451
24. Équivalence et négligeabilité .....	475
25. Séries .....	497
26. Dérivées successives .....	523
27. Formules de Taylor-Développements limités .....	541
28. Intégrales impropres .....	563
29. Espaces probabilisés .....	589
30. Variables aléatoires discrètes .....	611
31. Lois discrètes usuelles .....	635
32. Variables aléatoires à densité.....	655
33. Lois à densité usuelles .....	677
34. Convergence en probabilité-Convergence en loi .....	699
35. Initiation à Scilab : matrices, fonctions.....	721
36. Initiation à Scilab : simulation, graphiques en 2D .....	753
Index.....	781

# Chapitre 1

# Raisonnements mathématiques

Le mathématicien italien Giuseppe **Peano** était très soucieux d'exposer les mathématiques dans un cadre précis et rigoureux. Dans son *Formulaire mathématique* publié en 1895, il introduisit de nombreux symboles nouveaux. On lui doit en particulier  $\cap$  et  $\cup$  désignant respectivement l'intersection et la réunion. Il utilise la lettre grecque *epsilon*, abréviation du grec *esti, il est*, pour noter l'appartenance et introduit le quantificateur existentiel qu'il note  $\exists$ , renversant un E pour signifier l'initiale du mot italien *esiste*. Il propose aussi de supprimer les déclinaisons du latin pour obtenir une langue internationale, simple et comprise par tous, qu'il nomme *Latino sine flexione*. Le logicien anglais Bertrand **Russell** propose un paradoxe qui remet en cause la théorie des ensembles et nécessite de la fonder sur un système d'axiomes.



**Bertrand Russell**  
1872-1970



## ■■ Objectifs

### ■ Les incontournables

- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence.
- ▷ Savoir utiliser un raisonnement par récurrence d'ordre supérieur ou égal à 2.
- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence forte (ou généralisée).
- ▷ Savoir mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.

### ■ Et plus si affinités

- ▷ Savoir raisonner par contraposée.
- ▷ Savoir manipuler les connecteurs logiques et les quantificateurs.
- ▷ Savoir écrire la négation d'une proposition.

## ■ Les éléments du raisonnement

### □ Proposition

**Définition 1.1.** — On appelle *proposition* toute phrase  $\mathcal{P}$  dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable  $x$ , nous pourrons la noter  $\mathcal{P}(x)$ .

**Remarque 1.1** — On écrira indifféremment " $\mathcal{P}$ " ou " $\mathcal{P}$  est vraie".

**Exemple 1.1.** — Pour tout réel  $x$  strictement positif, " $\ln(x) > 0$ " est une proposition dépendante de la variable  $x$ . Elle est vraie si  $x > 1$ , et fausse sinon.

**Exemple 1.2.** — "*La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante*" est une proposition. Notons qu'elle ne dépend pas de l'entier  $n$ .

**Exemple 1.3.** — Pour un dé lancé, "*le numéro sorti est pair*" est une proposition.

**Exemple 1.4.** — Pour tout réel  $x$ , " $(2x+1)e^{-x}$ " n'est pas une proposition.

### □ Quantificateurs

**Notation** — Le signe " $\forall$ " placé devant une variable  $x$  signifie "*quel que soit  $x$ ...*".

Le signe " $\exists$ " placé devant une variable  $x$  signifie "*il existe (au moins) un  $x$ ...*".

Le signe " $\exists!$ " placé devant une variable  $x$  signifie "*il existe un unique  $x$ ...*".

" $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ " se lit : "*quel que soit le réel  $x$ ,  $x^2 + 1$  est strictement positif*" ou "pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 1$  est strictement positif".

" $\exists x \in ]0, +\infty[, x^2 - 6x + 1 = 0$ " se lit : "*il existe au moins un réel  $x$  strictement positif tel que  $x^2 - 6x + 1$  est égal à 0*" (il y a d'ailleurs deux tels  $x$  :  $3 + 2\sqrt{2}$  et  $3 - 2\sqrt{2}$ ).

" $\exists! n \in \mathbb{N}^*, \frac{n(n+1)}{2} = 3$ " se lit : "*il existe un unique entier naturel  $n$  non nul tel que  $\frac{n(n+1)}{2}$  est égal à 3*" (il s'agit du nombre 2).

**Remarque 1.2.** — Notons que, dans un énoncé, l'expression "*il existe un  $x$* " signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

**Propriété 1.1.** — En général, la proposition  $(\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x, y))$  est différente de  $(\exists y, \forall x, \mathcal{P}(x, y))$ .

**Exemple 1.5.** — La proposition " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$ " énonce que, quel que soit le réel  $x$ , il existe un entier  $n$ , tel que  $x$  soit compris entre  $n$  et  $n+1$ , cette dernière valeur étant exclue. C'est une proposition vraie (qui définit d'ailleurs ce que l'on appelle la partie entière de  $x$ ). Elle est différente de la suivante : " $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x < n+1$ " qui affirme, quant à elle, que tous les réels sont compris entre deux entiers fixés. Elle est évidemment fausse.

**Remarque 1.3.** — Dans l'expression " $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \dots$ ", il faut noter que  $x$  dépend de  $y$ , on devrait en toute rigueur le noter  $x_y$  ou  $x(y)$ , ce que l'on ne fait presque jamais.

## □ Connecteurs logiques

**Définition 1.2.** — La proposition contraire de  $\mathcal{P}$ , notée  $\text{non } \mathcal{P}$  et appelée *négation* de  $\mathcal{P}$ , est la proposition qui est vraie lorsque  $\mathcal{P}$  est fausse et qui est fausse lorsque  $\mathcal{P}$  est vraie.

**Propriété 1.2.** — La négation de  $(\forall x, \mathcal{P}(x))$  est la proposition  $(\exists x, \text{non } \mathcal{P}(x))$ .

La négation de  $(\exists x, \mathcal{P}(x))$  est la proposition  $(\forall x, \text{non } \mathcal{P}(x))$ .

**Exemples 1.6.** — • Pour un dé lancé trois fois, le contraire de "*les trois numéros obtenus sont pairs*" est "*au moins un des numéros obtenus est impair*".

• La négation de " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$ " est :

$$" \exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, x < n \text{ ou } x \geq n+1 "$$

La première proposition est vraie puisqu'elle définit l'entier  $n$  qui est la *partie entière* de  $x$  (voir **exemple 1.5**) et la deuxième est fausse car il n'existe pas de réel  $x$  tel qu'aucun entier ne soit dans l'intervalle  $]x-1, x]$ .

**Définition 1.3.** — Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux propositions. On appelle *disjonction* de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  la proposition  $(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})$ , le "ou" étant entendu ici inclusivement (soit  $\mathcal{P}$ , soit  $\mathcal{Q}$ , soit les deux).

**Exemple 1.7.** — Pour un dé lancé, on considère  $\mathcal{P}$  : "*le numéro sorti est pair*", et  $\mathcal{Q}$  : "*le numéro sorti est supérieur ou égal à 3*". Alors,  $(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})$  est : "*le numéro sorti est 2,3,4,5 ou 6*".

**Définition 1.4.** — Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux propositions. On appelle *conjonction* de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  la proposition  $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$  (les deux simultanément).

**Exemple 1.8.** — En reprenant l'**exemple 1.7**,  $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$  est : "*le numéro sorti est 4 ou 6*".

**Définition 1.5.** — Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux propositions. On dit que  $\mathcal{P}$  *implique*  $\mathcal{Q}$ , et on note  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ , lorsque, si  $\mathcal{P}$  est vraie, alors  $\mathcal{Q}$  est vraie (l'implication  $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$  est appelée *réciproque* de  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ ).

**Vocabulaire.** — Lorsque  $\mathcal{P}$  implique  $\mathcal{Q}$ , on dit que  $\mathcal{P}$  est une condition suffisante de  $\mathcal{Q}$ , et que  $\mathcal{Q}$  est une condition nécessaire de  $\mathcal{P}$ .

**Exemple 1.9.** — Pour tout réel  $x$ , on a :  $(x = x^2) \Rightarrow (x \geq 0)$  (l'implication réciproque est fausse).

**Définition 1.6.** — Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux propositions. On dit que  $\mathcal{P}$  *équivalent* à  $\mathcal{Q}$  (ou que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont équivalentes), et on note  $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ , lorsqu'on a, à la fois,  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ .

**Vocabulaire.** — Lorsque  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont équivalentes, on dit que  $\mathcal{P}$  est vraie si, et seulement si,  $\mathcal{Q}$  est vraie. On dit aussi que  $\mathcal{P}$  est une *condition nécessaire et suffisante* de  $\mathcal{Q}$ .

⇒ **Méthode 1.2.** Comment montrer une équivalence par double implication ?

**Exemple 1.10.** —  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, (\ln a < \ln b) \Leftrightarrow (a < b)$ .

**Exemple 1.11.** — Pour tout entier  $n$ ,  $n$  est multiple de 6 si, et seulement si,  $n$  est multiple à la fois de 2 et de 3.

## ■ Différents types de raisonnements

### □ La contraposition

**Définition 1.7.** — Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux propositions. L'implication  $(\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P})$  s'appelle la *contraposée* de l'implication  $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ .

**Exemple 1.12.** — La contraposée de la proposition "*si il pleut, alors le sol est mouillé*" est "*si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas*".

**Théorème 1.1.** — Une implication et sa contraposée sont équivalentes : montrer que  $\mathcal{P}$  implique  $\mathcal{Q}$  revient à montrer que si  $\mathcal{Q}$  n'est pas vraie, alors  $\mathcal{P}$  n'est pas vraie.

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P})$$

**Remarque 1.4.** — L'exercice 1.4 (question 1) propose un exemple de raisonnement par contraposition.

### □ Démonstration par l'absurde

**Théorème 1.2.** — Quelles que soient les propositions  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ , pour montrer que  $\mathcal{P}$  implique  $\mathcal{Q}$ , on suppose que  $\mathcal{P}$  est vraie, que  $\mathcal{Q}$  est fausse, et on montre que c'est impossible.

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow ((\mathcal{P} \text{ et non } \mathcal{Q}) \text{ est fausse})$$

⇒ **Méthode 1.1.** Comment montrer une proposition par l'absurde ?

**Remarque 1.5.** — L'idée de la démonstration par l'absurde est très simple : pour montrer que  $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ , on suppose que  $\mathcal{P}$  est vraie et que  $\mathcal{Q}$  est fausse, puis on cherche à établir une contradiction.

### □ Démonstration par récurrence

#### Récurrence simple

**Théorème 1.3.** — Considérons une proposition  $\mathcal{P}(n)$  dépendant d'un entier naturel  $n$ .

Si  $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie et si, en supposant la proposition  $\mathcal{P}(n)$  vraie pour un certain entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ , on montre que la proposition  $\mathcal{P}(n+1)$  l'est aussi, alors la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ .

⇒ **Méthode 1.3.** Comment montrer une proposition par récurrence ?

**Vocabulaire.** — La preuve de  $\mathcal{P}(n_0)$  s'appelle l'*initialisation* de la récurrence. La vérité de l'implication  $(\mathcal{P}(n) \text{ est vraie}) \Rightarrow (\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie})$  s'appelle l'*hérédité* de la proposition.

**Attention !** Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n$  (sinon, il n'y a plus rien à prouver !). On suppose que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour un certain entier  $n$ , et on montre qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est encore vraie.

**Remarque 1.6.** — La plupart du temps, on a  $n_0 = 0$  ou  $n_0 = 1$ .

### Récurrence finie

Il se peut qu'on ait à montrer qu'une proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, non pas pour tout entier naturel  $n$ , mais pour un nombre fini d'entiers successifs, mettons de l'entier  $n_1$  à l'entier  $n_2$ , où  $n_1 < n_2$ . On a alors la version suivante :

**Théorème 1.4.** — Si  $\mathcal{P}(n_1)$  est vraie et si, pour tout entier  $n$  de  $\llbracket n_1, n_2 - 1 \rrbracket$ ,  $\mathcal{P}(n)$  implique  $\mathcal{P}(n+1)$ , alors la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie quel que soit l'entier  $n$  de  $\llbracket n_1, n_2 \rrbracket$ .

### Récurrence d'ordre $p$ (avec $p \geq 2$ )

Il arrive que, pour établir une proposition à un certain rang, on ait besoin de savoir qu'elle est vraie aux  $p$  rangs précédents (souvent  $p = 2$ ). On a alors :

**Théorème 1.5.** — Considérons une proposition  $\mathcal{P}(n)$  dépendant d'un entier naturel  $n$ . Si les  $p$  premières propositions  $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(p-1)$  sont vraies et si, en supposant les  $p$  propositions  $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), \dots, \mathcal{P}(n+p-1)$  vraies, pour un certain entier naturel  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on montre que  $\mathcal{P}(n+p)$  est vraie, alors la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie quel que soit l'entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

⇔ **Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 ?**

### Récurrence forte

Pour établir l'hérédité d'une proposition, il se peut que l'on ait besoin de savoir si elle est vraie à tous les rangs jusqu'au  $n^{\text{ème}}$  (et non pas seulement au  $n^{\text{ème}}$ ), pour en montrer la vérité au rang  $(n+1)$ . On a alors le résultat suivant :

**Théorème 1.6.** — Considérons une proposition  $\mathcal{P}(n)$  dépendant d'un entier naturel  $n$ . Si  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et si, pour un certain entier naturel  $n$ , en supposant les propositions  $\mathcal{P}(k)$  vraies pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , on montre que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, alors la proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie quel que soit l'entier naturel  $n$ .

⇔ **Un exemple de démonstration par récurrence forte sera donné au chapitre 2**

**Remarque 1.7.** — On ne peut pas remplacer une récurrence d'ordre 2 par une récurrence forte. Dans le cas d'une récurrence d'ordre 2, pour un entier  $n$  donné, on a besoin de la vérité de  $\mathcal{P}(n)$  et de  $\mathcal{P}(n+1)$  pour établir celle de  $\mathcal{P}(n+2)$ . La vérité d'une seule ne suffit pas ! On ne peut donc pas, contrairement à ce qui se passe dans la récurrence forte, déduire  $\mathcal{P}(1)$  de  $\mathcal{P}(0)$  : il faut  $\mathcal{P}(0)$  et  $\mathcal{P}(1)$  pour obtenir  $\mathcal{P}(2)$ , puis enclencher la récurrence.

## ■ Raisonnements

### □ Méthode 1.1. Comment montrer une proposition par l'absurde ?

Pour montrer qu'une implication est vraie, il suffit de supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse, puis d'en déduire alors une contradiction.

⇒ Exercice 1.4

**Exemple.** Montrer que pour tout nombre réel  $x$  différent de  $-3$ , on a :  $\frac{x+1}{x+3} \neq 1$ .

Par l'absurde, si l'on avait  $\frac{x+1}{x+3} = 1$ , alors on en déduirait  $x+1 = x+3$ , ce qui équivaut à  $1 = 3$ .

Ceci étant manifestement faux, on en déduit que :  $\forall x \neq -3, \frac{x+1}{x+3} \neq 1$ .

### □ Méthode 1.2. Comment montrer une équivalence par double implication ?

L'équivalence ( $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ ) signifie la double implication : ( $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ ) et ( $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ ).

⇒ Exercice 1.3

**Remarque** — On privilégiera cette méthode lorsque les arguments permettant d'établir l'une des deux implications sont différents de ceux permettant d'établir l'autre.

**Exemple.** Soit deux réels  $a$  et  $b$ . Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}, a2^n + b3^n = 0) \Leftrightarrow (a = b = 0)$ .

Commençons par noter que, si  $a = b = 0$ , alors pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a bien  $a2^n + b3^n = 0$ .

Établissons l'autre implication :

Si, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :

$$a2^n + b3^n = 0, \text{ alors } \begin{cases} a2^0 + b3^0 = 0 \\ a2^1 + b3^1 = 0 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{si l'égalité est vraie pour tout } n \text{ alors elle} \\ \text{l'est en particulier pour } n=0 \text{ et } n=1 \end{array} \right).$$

$$\text{Ce système s'écrit } \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+3b=0 \end{cases} \text{ et on en déduit } \begin{cases} b=-a \\ 2a-3a=0 \end{cases}, \text{ puis : } \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}.$$

Ceci prouve la seconde implication, et finalement l'équivalence.

**Remarque** — Le fait de choisir deux valeurs de  $n$  pour trouver  $a$  et  $b$  n'est pas une hérésie puisque  $a$  et  $b$  sont des constantes (indépendantes de  $n$ ). Si  $a$  et  $b$  étaient des fonctions de  $n$ , tout ceci serait inacceptable.

## ■ Récurrences

### □ Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par récurrence sur l'entier naturel $n$ ?

$n_0$  est ici un entier naturel fixé.

On veut montrer que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n$  à partir de  $n_0$ .

- Initialisation : on vérifie que  $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie.
- Hérité : on considère que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour un certain entier  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ . En utilisant  $\mathcal{P}(n)$ , on montre qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est encore vraie.
- Conclusion :  $\mathcal{P}(n)$  est alors vraie pour tout  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ .

⇒ Exercices 1.5, 1.6, 1.7, 1.9

**Exemple.** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n} \end{cases}$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à 1.

On commence par noter, pour  $n$  entier naturel,  $\mathcal{P}(n) : "u_n = 1"$ .

- Initialisation :  $\mathcal{P}(0)$  est vraie par choix de  $u_0$ .
- Hérité : on suppose  $\mathcal{P}(n)$  vraie (c'est-à-dire  $u_n = 1$ ) pour un entier naturel  $n$  fixé.

On a alors  $u_{n+1} = \frac{3 \times 1 - 2}{1} = 3 - 2 = 1$ , ce qui prouve que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- En conclusion, on a bien montré, par récurrence, que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$ .

### □ Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 sur l'entier naturel $n$ ?

On veut montrer que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n$  à partir de  $n_0$ .

- Initialisation : on vérifie que  $\mathcal{P}(n_0)$  et  $\mathcal{P}(n_0 + 1)$  sont vraies.
- Hérité : on considère un entier  $n$  fixé, supérieur ou égal à  $n_0$ , tel que  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  sont vraies. Grâce à  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$ , on montre que  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie.
- Conclusion :  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ .

⇒ Exercice 1.8

**Remarque.** On généralise sans problème au cas d'une récurrence d'ordre 3 ou plus.

**Exemple.** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2^{n+1}$ .

On commence par noter, pour  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n) : "u_n = 3^n - 2^{n+1}"$ .

• Initialisation pour  $n = 0$  :

$3^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1 = u_0$  et  $3^1 - 2^2 = 3 - 4 = -1 = u_1$  donc  $\mathcal{P}(0)$  et  $\mathcal{P}(1)$  sont vraies.

• Hérédité :

On suppose  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  vraies pour un entier  $n$  naturel fixé et on va montrer que  $\mathcal{P}(n+2)$

est vraie (c'est-à-dire que l'on a :  $u_{n+2} = 3^{n+2} - 2^{n+3}$ ).

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5(3^{n+1} - 2^{n+2}) - 6(3^n - 2^{n+1})$ , car  $\mathcal{P}(n+1)$  et  $\mathcal{P}(n)$  sont vraies .

Comme  $3^{n+1} = 3 \times 3^n$  et  $2^{n+2} = 2 \times 2^{n+1}$ , on a :

$u_{n+2} = (5 \times 3 - 6) \cdot 3^n + (-5 \times 2 + 6) \cdot 2^{n+1} = 9 \times 3^n - 4 \times 2^{n+1} = 3^{n+2} - 2^{n+3}$  .

Ceci montre que  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie.

• Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2^{n+1}$ .