ECS
2^e année

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Gianfranco Niffoi
Anne-Sophie Pierson-Fertel
Nicolas Pierson

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs à éviter
- Exercices de base et d'approfondissement
- Énoncés de sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés
- Éléments d'informatique et d'algorithmique avec Scilab

3^e édition actualisée

ellipses

Mathématiques

ECS - 2e année

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques ECS - 2e année

3e édition actualisée

ouvrage coordonné par

Sylvain RONDY

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Pierre BERLANDI

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Gianfranco NIFFOI

Professeur au lycée Saint Michel de Picpus (Paris)

Anne-Sophie PIERSON-FERTEL

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Nicolas PIERSON

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-016477

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir surveillé, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaines de cours.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire toutes les notions à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir surveillé ou le passage d'une colle relative au thème traité. Les résultats sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthode » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révéler les mauvais réflexes à corriger. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi cet ouvrage vous accompagnera tout au long de l'année et vous guidera dans votre cheminement **vers la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

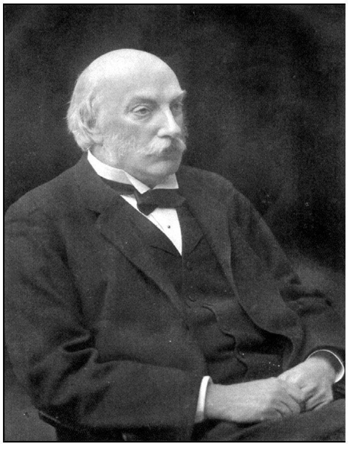
Sommaire

Premier semestre

Deuxième semestre

Chapitre 1
Compléments d'algèbre linéaire

Le physicien et mathématicien anglais John William **Strutt**, baron de **Rayleigh**, élabore une théorie mathématique de l'optique et des systèmes vibratoires. Par la suite il s'intéresse à tous les domaines de la physique. En travaillant sur la structure de la matière, il découvre un gaz rare, l'argon, ce qui lui vaut le prix Nobel en 1907. Pour étayer ses différents travaux, il développe des méthodes mathématiques dans le cadre de l'analyse vectorielle au sein de l'école de physique mathématique de Cambridge.



John Rayleigh
1842-1919

Objectifs

Les incontournables

▷ Connaître la définition d'une matrice de passage et les formules de changements de bases.

▷ Connaître la définition de la trace d'une matrice.

▷ Connaître la définition de deux matrices semblables.

▷ Connaître la notion de sous-espace stable par un endomorphisme.

Et plus si affinités

▷ Savoir découvrir des propriétés d'un endomorphisme laissant stable des sous-espaces donnés.

■■ Résumé de cours

Dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La lettre n désigne un entier naturel non nul et E est un espace vectoriel de dimension n.

■ Changement de bases

❑ Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 1.1. — On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ une famille de p vecteurs de E ($p \in \mathbb{N}^*$). On appelle *matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$*, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne sont les coordonnées de f_j dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 1.1. — Soit x un vecteur de E et $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées du vecteur x dans une base $\mathcal{B}$ de E. La matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Propriété 1.1. — Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de n vecteurs de E. Si la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

➪ **Méthode 1.1. Comment montrer, matriciellement, qu'une famille est une base ?**

❑ Matrice de passage

Définition 1.2. — On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété 1.2. — Pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

❑ Formules de changement de bases

Théorème 1.1. — Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si, pour tout vecteur x de E, on note X (respectivement X') la matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$), alors on a : $X = PX'$.

Théorème 1.2. — Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si, pour tout endomorphisme f de E, on note A (respectivement A') la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$), alors on a : $A' = P^{-1}AP$.

❑ Matrices semblables

Définition 1.3. — Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible, et telle que : $A' = P^{-1}AP$.

Théorème 1.3. — Deux matrices carrées sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

■ Trace d'une matrice carrée

❑ Définition

Définition 1.4. — Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \le i, j \le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *trace* de A, le scalaire noté $\mathrm{Tr}(A)$, égal à la somme des éléments diagonaux de A. On a donc : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Remarque 1.2. — La trace d'une matrice n'a de sens que si la matrice est carrée.

❑ Linéarité de la trace

Propriété 1.3. — L'application qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe sa trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Autrement dit :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \text{ et } \mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{Tr}(A)$$

❑ Invariance de la trace par similitude

Propriété 1.4. — Deux matrices semblables ont même trace. Autrement dit :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP)$$

■ Sous-espaces stables

Définition 1.5. — Soit F un sous-espace vectoriel de E et f un endomorphisme de E. On dit que F est *stable* par f si : $f(F) \subset F$.

⇨ **Méthode 1.2. Comment montrer, avec la définition, qu'un sous-espace est stable ?**

⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer qu'un sous-espace *F* est stable lorsque *F* est défini par une famille génératrice ?**

Remarque 1.3. — Autrement dit, F est stable par f si : $\forall x \in F,\ f(x) \in F$.

Méthodes

Matrice de passage

Méthode 1.1. Comment montrer, matriciellement, qu'une famille est une base ?

Soit un espace vectoriel E de base $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$. Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}=(f_1,\ldots,f_n)$ de n vecteurs de E est une base de E, on montre que la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible.
Cette matrice est alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$.

⇨ Exercices 1.1, 1.2

Exemple. Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On donne $u=(1,0,0)$, $v=(-1,2,-2)$ et $w=(3,-1,2)$. Montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
On a : $u=e_1$, $v=-e_1+2e_2-2e_3$ et $w=3e_1-e_2+2e_3$. La matrice de la famille (u,v,w) dans $\mathcal{B}$ est donc : $P=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&2&-1\\0&-2&2\end{pmatrix}$ qui admet pour réduite de Gauss la matrice $\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ (on a effectué dans P l'opération élémentaire $L_3\leftarrow L_3+L_2$). Cette matrice est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls : P est donc inversible et (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Sous-espaces stables

Méthode 1.2. Comment montrer, avec la définition, qu'un sous-espace est stable ?

Soit f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E. Pour montrer que F est stable par f, on montre que : $\forall x\in F\ ,\ f(x)\in F$.

⇨ Exercice 1.6

Exemple. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ est stable par f.

Méthodes

Pour tout vecteur x de $\mathrm{Ker}(f)$, on a : $f(x)=0$. En appliquant f, on obtient $f(f(x))=f(0)=0$ et ainsi : $f(x)\in \mathrm{Ker}(f)$. En conclusion, $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par f.

❑ Méthode 1.3. Comment montrer qu'un sous-espace *F* est stable lorsque *F* est défini par une famille génératrice ?

> Soit f un endomorphisme de E et $e_1,\ldots,e_p$ des vecteurs de E. Pour montrer que $F=\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_p)$ est stable par f, on montre que : $\forall i\in[\![1,p]\!],\ f(e_i)\in F$.

⇨ **Exercices 1.5, 1.6**

Exemple. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $e_1=(1,0,2)$ et $e_2=(0,1,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On pose $F=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$. Montrer que F est stable par f. On a :

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $f(e_1)=(-1,4,2)=-e_1+4e_2$. On en déduit que $f(e_1)$ est élément de F.

$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $f(e_2)=(-1,3,1)=-e_1+3e_2$. On en déduit que $f(e_2)$ est élément de F.

En conclusion : F est stable par f.

En effet, comme la famille (e_1,e_2) est génératrice de F, tout vecteur x de F s'écrit :

$$x=x_1e_1+x_2e_2$$

Par linéarité de f, on a :

$$f(x)=x_1f(e_1)+x_2f(e_2)$$

Ainsi, comme on vient de montrer que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont éléments de F, $f(x)$ appartient bien à F, comme combinaison linéaire de vecteurs de F.