

Mathématiques

PC/PC*

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques

PC/PC*

3^e édition actualisée

ouvrage coordonné par

Michel GOUMI

Professeur au lycée E. Perrier (Tulle)

Walter DAMIN

Professeur au lycée Pierre-Paul Riquet (Saint-Orens-de-Gameville)

Ivan GOZARD

Professeur au lycée Carnot (Dijon)

Bertrand HAUCHECORNE

Professeur au lycée Pothier (Orléans)

Olivier LEUCK

Professeur au lycée R. Follereau (Belfort)



COLLECTION PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen.

ISBN 9782340-018662

© Ellipses Édition Marketing S.A., 2017

32, rue Bague 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un DS, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en mathématiques comme en physique ou chimie.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un DS, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthode » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à corriger. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de maths comme ceux de physique et de chimie vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

1	Espaces vectoriels et applications linéaires	1
2	Matrices	41
3	Déterminants.....	79
4	Réduction des endomorphismes et des matrices carrés.....	103
5	Espaces euclidiens.....	139
6	Espaces vectoriels normés de dimension finie.....	185
7	Intégration sur un intervalle	221
8	Séries numériques.....	261
9	Suites et séries de fonctions.....	293
10	Séries entières.....	327
11	Fonctions vectorielles et arcs paramétrés	365
12	Théorèmes d'interversion de symboles	393
13	Espaces probabilisés.....	421
14	Variables aléatoires discrètes	453
15	Calcul différentiel.....	495
16	Équations différentielles linéaires	531
17	Les maths avec Python	573
	Index.....	643

Chapitre 1

Espaces vectoriels et applications linéaires

Les espaces vectoriels ont été introduits par **Cayley** et **Grassmann** au milieu du XIX^e siècle. Cependant, le premier ne proposait qu'un calcul sur des n -uplets et la formalisation du second était des plus obscures. Ce fut l'œuvre de Giuseppe **Peano** de déchiffrer le travail du mathématicien allemand et de donner le premier, en 1888, une définition satisfaisante d'un espace vectoriel. Il introduisit les applications linéaires et montra que cette théorie ne se réduit pas à la dimension finie en citant l'exemple des polynômes. Giuseppe Peano est aussi connu pour son axiomatique des entiers naturels et pour avoir construit une courbe remplissant un carré. On lui doit d'astucieux contre-exemples qui ont remis en cause des assertions qui semblaient pourtant bien établies.



Giuseppe Peano
1858-1932

■■ Objectifs

■ Les incontournables

- ▷ Revoir et enrichir les notions élémentaires concernant les espaces vectoriels : famille libre, famille génératrice, base, dimension, rang
- ▷ Revoir et enrichir les notions élémentaires concernant les applications linéaires
- ▷ Découvrir le produit d'espaces vectoriels et étendre les notions de somme et de somme directe de sous-espaces vectoriels
- ▷ Vérifier sa capacité à déterminer le rang d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire et à utiliser le théorème du rang
- ▷ Découvrir la notion de sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme et la notion d'endomorphisme induit sur un sous-espace vectoriel stable.

■ Et plus si affinités...

- ▷ Savoir démontrer qu'une famille infinie de vecteurs est une base
- ▷ Approfondir les questions d'existence, en dimension finie, d'une base, d'un supplémentaire pour tout sous-espace vectoriel...

■ ■ Résumé de cours

\mathbb{K} désigne indifféremment l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

■ Familles libres, familles génératrices, bases

Définition : Combinaison linéaire —. On appelle *combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs* x_1, x_2, \dots, x_n de E toute somme $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires (des éléments de \mathbb{K}), appelés *coefficients* de la combinaison linéaire.

Proposition 1.1.— **Sous-espace vectoriel engendré par une famille** —. L'ensemble des combinaisons linéaires finies d'une famille X de vecteurs est un sous-espace vectoriel de E , appelé *sous-espace vectoriel engendré par X* et noté $\text{Vect}(X)$.

Remarque : $\text{Vect}(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E , au sens de l'inclusion, contenant la famille X .

Définition : Famille libre, famille liée —. ▶ $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, famille *finie* de vecteurs de E , est **libre** si, et seulement si, quelle que soit la famille $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0.$$

- ▶ $(x_i)_{i \in I}$, famille de vecteurs de E de cardinal quelconque, est **libre** si, et seulement si, toutes ses sous-familles finies sont libres.
- ▶ Les $x_i, i \in I$, sont **linéairement indépendants** si, et seulement si, la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre.
- ▶ Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.

Propriétés : ▷ Toute famille contenue dans une famille libre est libre.

▷ Toute famille contenant une famille liée est liée (contraposition de l'implication précédente). En particulier, toute famille contenant le vecteur nul est liée.

Exemple : Si $\deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$, la famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans \mathbb{K} , (P_0, P_1, \dots, P_n) , est dite de degrés échelonnés. Une telle famille est libre.

Proposition 1.2.— **Famille liée et combinaison linéaire** —. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée si, et seulement si, l'un au moins des x_i est combinaison linéaire des autres.

(x_1, x_2) est liée si, et seulement si, il existe un scalaire λ tel que : $x_1 = \lambda x_2$ ou $x_2 = \lambda x_1$, et on dit alors que x_1 et x_2 sont **colinéaires**.

(x_1, x_2, x_3) est liée si, et seulement si, il existe deux scalaires λ et μ tels que : $x_1 = \lambda x_2 + \mu x_3$ ou $x_2 = \lambda x_1 + \mu x_3$ ou $x_3 = \lambda x_1 + \mu x_2$, et on dit alors que x_1, x_2 et x_3 sont **coplanaires**.

Définition : Famille génératrice —. Une famille X de vecteurs de E est une **famille génératrice** de E si, et seulement si, tout vecteur de E est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de vecteurs de X .

Définition : Base —. Une famille de vecteurs du \mathbb{K} -espace vectoriel E en est une **base** si, et seulement si, elle est une famille libre et génératrice.

Exemples : $\triangleright (X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. $(X^i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

$\triangleright ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Ces bases sont les plus simples de chacun de ces espaces vectoriels : on dit que ce sont leurs **bases canoniques** respectives.

Proposition 1.3.— Coordonnées d'un vecteur dans une base —. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout vecteur x de E , il existe un n -uplet unique $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de \mathbb{K}^n tel que :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ est le n -uplet des coordonnées du vecteur x dans la base \mathcal{B} et $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est

la **matrice colonne des coordonnées du vecteur x dans la base \mathcal{B}** .

Exemple : Les coordonnées d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont ses coefficients.

■ Dimension

Définition : Espace vectoriel de dimension finie —. Un espace vectoriel est de **dimension finie** si, et seulement si, il admet une famille génératrice finie.

Proposition 1.4.— Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète —. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul de dimension finie.

De toute famille génératrice de E , on peut extraire une base de E ; par conséquent, E admet une base finie.

Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E .

Lemme 1.5.— Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Théorème-Définition 1.6.— Théorème de la dimension —. Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé **dimension de E** et noté $\dim E$. Par convention, la dimension de $\{0_E\}$ est 0.

Proposition 1.7.— Si $\dim E = n$ et si \mathcal{F} est une famille de n vecteurs de E , alors il y a équivalence entre :

(1) \mathcal{F} est une base de E (2) \mathcal{F} est une famille libre (3) \mathcal{F} est une famille génératrice de E .

Définition : Rang d'une famille finie de vecteurs —. Le rang d'une famille finie \mathcal{F} de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille. On le note $\text{rg } \mathcal{F}$.

Proposition 1.8.— Une famille finie de vecteurs est libre si, et seulement si, son cardinal est égal à son rang.

■ Produit, somme et somme directe d'espaces vectoriels

Produit d'espaces vectoriels

Définition : Produit cartésien —. Le produit cartésien de deux ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \times B$, défini par :

$$A \times B = \{(u, v) \mid u \in A \text{ et } v \in B\}$$

Le produit cartésien de n ensembles A_1, A_2, \dots, A_n est l'ensemble, noté $\prod_{i=1}^n A_i$ défini par :

$$\prod_{i=1}^n A_i = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_i \in A_i\}$$

Soit $(E, +, \cdot)$ et $(F, \hat{+}, \hat{\cdot})$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels :

Théorème-Définition 1.9.— **Produit de deux sous-espaces vectoriels** —.

Si on pose :
$$\begin{cases} \forall (u, v) \in E \times F, \forall (u', v') \in E \times F, (u, v) \hat{+} (u', v') = (u + v, u' \hat{+} v') \\ \forall (u, v) \in E \times F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \hat{\cdot} (u, v) = (\lambda \cdot u, \lambda \cdot v) \end{cases}$$
,

alors $(E \times F, \hat{+}, \hat{\cdot})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, dit *espace vectoriel produit de E et F* .

Proposition 1.10.— **Dimension du produit de deux espaces vectoriels** —. Si E et F sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives n et p , alors $E \times F$ est de dimension $n + p$.

Soit (E_1, E_2, \dots, E_p) une famille finie de \mathbb{K} -espaces vectoriels. On suppose, pour simplifier, que sur chaque E_i , l'addition et la multiplication externe sont notées par les mêmes symboles : $+$ pour l'addition et la simple juxtaposition pour la multiplication externe.

Théorème-Définition 1.11.— **Produit de p sous-espaces vectoriels** —.

Si :
$$\begin{cases} \forall (u_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \prod_{i=1}^p E_i, \forall (u'_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \prod_{i=1}^p E_i, (u_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} + (u'_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} = (u_i + u'_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \\ \forall (u_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \prod_{i=1}^p E_i, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda (u_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} = (\lambda u_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \end{cases}$$

alors $\left(\prod_{i=1}^p E_i, +, \cdot\right)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, dit *espace vectoriel produit des E_i* .

Proposition 1.12.— **Dimension du produit de p espaces vectoriels** —. Si (E_1, E_2, \dots, E_p) est une famille de \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives n_1, n_2, \dots, n_p , alors

$$\dim \left(\prod_{i=1}^p E_i \right) = \sum_{i=1}^p n_i.$$

Somme de sous-espaces vectoriels

Théorème-Définition 1.13.— Somme — Soit $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E , $\left\{ \sum_{i=1}^n x_i, \text{ où, } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in E_i \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Il est noté $\sum_{i=1}^n E_i$ et c'est la **somme des sous-espaces vectoriels** $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition : Somme directe — La somme des sous-espaces vectoriels de la famille $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est directe si, et seulement si, tout vecteur x de $\sum_{i=1}^n E_i$ se décompose de manière

unique sous la forme : $x = \sum_{i=1}^n x_i$, où $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Dans ce cas là, on note la somme de ces sous-espaces vectoriels : $\bigoplus_{i=1}^n E_i$.

Proposition 1.14.— Caractérisation d'une somme directe — La somme des sous-espaces vectoriels de la famille $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est directe si, et seulement si,

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n, \left(\sum_{i=1}^n x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0_{E_i} \right).$$

Commentaire : La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est directe si, et seulement si, leur intersection est réduite à $\{0_E\}$.

En revanche, si $n \geq 3$, il ne suffit pas que les intersections deux à deux des E_i soient réduites à $\{0_E\}$, pour que la somme des E_i soit directe.

Définition : Sous-espaces vectoriels supplémentaires — Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires dans E** si, et seulement si, leur somme est directe et égale à E , autrement dit, lorsque : $E = F \oplus G$.

Théorème-Définition 1.15.— Base adaptée à un sous-espace vectoriel — Si (e_1, e_2, \dots, e_p) est une base d'un sous-espace vectoriel F d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n , alors il existe une base de E de la forme $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Une telle base est une **base de E adaptée au sous-espace vectoriel F** .

Commentaire : Il en découle, qu'en dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire, puisque $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans E .

Proposition 1.16.— Les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de E constituent une décomposition

en somme directe de E si, et seulement si, $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$, ou, ce qui est équivalent :

$$\forall x \in E, \exists! (x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Proposition 1.17.— Décomposition en somme directe en fractionnant une base —. Si on fractionne une base $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E , on obtient :

$$E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) \oplus \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n).$$

Plus généralement, si on fractionne une base \mathcal{B} de E en une partition $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_k)$, alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \text{Vect}(\mathcal{B}_i).$$

Réciproquement :

Théorème-Définition 1.18.— Base adaptée à une décomposition en somme directe —.

$(E_i)_{i \in [1, n]}$ est une famille de n sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie, les \mathcal{B}_i , $1 \leq i \leq n$, sont des bases respectives des E_i , $1 \leq i \leq n$ et \mathcal{B} est la famille obtenue en juxtaposant (on dit aussi « en concaténant ») les vecteurs des familles \mathcal{B}_i .

Si la somme des $(E_i)_{i \in [1, n]}$ est directe, alors \mathcal{B} est une base de $\bigoplus_{i=1}^n E_i$. Si $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$, alors \mathcal{B} est une base de E dite *base adaptée à cette décomposition*.

■ Sous-espaces-vectoriels en dimension finie

Proposition 1.19.— Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Proposition 1.20.— Caractérisation d'une somme directe par les dimensions —. Si E_1, E_2, \dots, E_p sont des sous-espaces de dimension finie, alors :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p E_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim E_i$$

avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Corollaire 1.21.— Décomposition en somme directe en dimension finie —. En dimension finie,

$E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ si, et seulement si, **deux des trois** propositions suivantes sont vérifiées :

(i) $E = \sum_{i=1}^n E_i$; (ii) $\dim E = \sum_{i=1}^n \dim E_i$; (iii) la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe.

Corollaire 1.22.— Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels —. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

■ Applications linéaires

E et F sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Définition : Une application u de E dans F est dite **linéaire** si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y).$$

Notations et vocabulaire : \triangleright On note $\mathcal{L}(E, F)$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des applications linéaires de E dans F . Lorsque E et F sont de dimensions finies, $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

\triangleright Une application linéaire de E dans E est un **endomorphisme** de E . Leur ensemble est l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

\triangleright Une application linéaire de E dans \mathbb{K} est une **forme linéaire** sur E .

\triangleright Une application linéaire de E dans F bijective est un **isomorphisme** de E dans F . Un endomorphisme de E bijectif est un **automorphisme** de E . L'ensemble des automorphismes de E est noté $\text{GL}(E)$ et appelé **groupe linéaire de E** .

\triangleright Deux espaces vectoriels sont **isomorphes** si, et seulement si, il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.

Proposition 1.23.— Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base —. Étant donné deux \mathbb{K} -espaces vectoriels E et F et une base (e_1, e_2, \dots, e_p) de E , une application linéaire u de E dans F est entièrement déterminée par la donnée des $u(e_j)$, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Proposition 1.24.— Application linéaire et supplémentaires —. Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2 .

■ Sous-espaces stables

Définition : Un sous-espace vectoriel F de E est **stable par un endomorphisme u de E** lorsque

$$u(F) \subset F$$

Dans ce cas, l'application \hat{u} définie par : $\left\{ \begin{array}{l} F \rightarrow F \\ x \mapsto \hat{u}(x) = u(x) \end{array} \right.$ est l'endomorphisme de F induit par u .

■ Noyau, image

Théorème-Définition 1.25.— Noyau d'une application linéaire —. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble $\{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **noyau de u** et noté $\text{Ker } u$.

$u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si, et seulement si, son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.

Théorème-Définition 1.26.— Image d'une application linéaire —. u étant une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F , l'ensemble $\{u(x), x \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F appelé **image de u** et noté $\text{Im } u$.

u est surjective si, et seulement si, $\text{Im } u = F$.

L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice.

Remarque : Si les endomorphismes u et v commutent, alors $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v et, symétriquement, $\text{Im } v$ et $\text{Ker } v$ sont stables par u .

Proposition 1.27.— $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme de E dans F si, et seulement si, il existe une base de E dont l'image par u est une base de F .

Conséquences : \triangleright Deux espaces vectoriels de dimensions finies E et F sont isomorphes si, et seulement si, leurs dimensions sont égales. En particulier, tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n .

\triangleright Si E et F ont même dimension finie et si u un élément de $\mathcal{L}(E, F)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) u est bijective (2) u est injective (3) u est surjective

\triangleright L'image par un isomorphisme d'une famille finie de vecteurs est une famille de vecteurs de même rang.

Une base de E étant choisie, l'application associant à un vecteur le n -uplet de \mathbb{K}^n de ses coordonnées dans cette base est un isomorphisme; en conséquence, le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la famille des n -uplets de ses coordonnées dans \mathbb{K}^n .

■ Endomorphismes remarquables

Définition : Endomorphisme nul de E —. L'endomorphisme nul de E est l'application de E dans E notée $\tilde{0}$ telle que : $\forall x \in E, \tilde{0}(x) = 0_E$.

Définition : Identité de E —. L'identité de E est l'application de E dans E notée Id_E telle que : $\forall x \in E, \text{Id}_E(x) = x$.

$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), f \circ \text{Id}_E = f$ et $\forall g \in \mathcal{L}(F, E), \text{Id}_E \circ g = g$.

Définition : Homothétie —. Un endomorphisme u de E est une **homothétie de E** s'il existe un scalaire k tel que : $u = k \text{Id}_E$. u est alors l'homothétie de **rapport k** .

Définition : Projecteurs et symétries —. Un **projecteur** de E est un endomorphisme p de E vérifiant : $p \circ p = p$.

Une **symétrie** de E est un endomorphisme s de E vérifiant : $s \circ s = \text{Id}_E$.

Si $E = F \oplus G$, tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme : $x = x_F + x_G$, avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.

Théorème-Définition 1.28. — Projecteurs et symétries associés à des supplémentaires —.

$p_F : x \mapsto x_F$ et $p_G : x \mapsto x_G$ sont des projecteurs. (p_F, p_G) est le **couple de projecteurs associé aux sous-espaces supplémentaires F et G** .

$s_F : x \mapsto x_F - x_G$ et $s_G : x \mapsto x_G - x_F$ sont des symétries. (s_F, s_G) est le **couple de symétries associé aux sous-espaces supplémentaires F et G** .

Proposition 1.29.— Si p est un projecteur de E , alors $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ et $(p, \text{Id}_E - p)$ est le couple des projecteurs associés aux sous-espaces supplémentaires $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$.

Si s est une symétrie de E , alors $E = \{x \in E \mid s(x) = x\} \oplus \{x \in E \mid s(x) = -x\}$ et $(s, -s)$ est le couple de symétries associé aux sous-espaces supplémentaires $\{x \in E \mid s(x) = x\}$ et $\{x \in E \mid s(x) = -x\}$.

Commentaire : Si p est un projecteur et s une symétrie tels que : $\text{Im } p = \{x \in E \mid s(x) = x\}$ et $\text{Ker } p = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$, alors $s = 2p - \text{Id}_E$.