MPSI

Nicolas Nguyen
Walter Damin
Mathieu Fontes
Christophe Jan

PRÉPAS SCIENCES
COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

4e édition actualisée

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux
- Erreurs à éviter
- Exercices de base et d'approfondissement
- Énoncés de sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

Mathématiques
MPSI

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques MPSI

4e édition actualisée

ouvrage coordonné par

Nicolas NGUYEN

Professeur au lycée François Rabelais (Saint-Brieuc)

Walter DAMIN

Professeur au lycée Pierre-Paul Riquet (Saint-Orens de Gameville)

Mathieu FONTES

Professeur au lycée Louis Barthou (Pau)

Christophe JAN

Professeur au lycée Claude Fauriel (Saint-Étienne)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen en Latex.

ISBN 9782340-019263

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un DS, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en mathématiques comme en physique ou chimie.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un DS, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme et de remédier à quelques mauvais réflexes. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de maths comme ceux de physique et de chimie vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Premier semestre

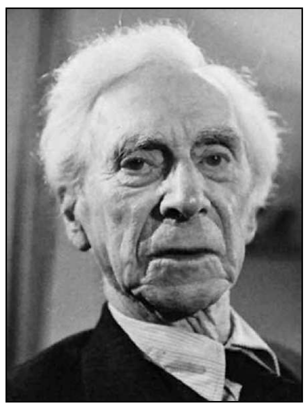
Deuxième semestre

Annexes

Premier semestre

Chapitre 1
Logique et raisonnements

Le mathématicien italien Giuseppe **Peano** était très soucieux d'exposer les mathématiques dans un cadre précis et rigoureux. Dans son *Formulaire mathématique* publié en 1895, il introduisit de nombreux symboles nouveaux. On lui doit en particulier $\cap$ et $\cup$ désignant respectivement l'intersection et la réunion. Il utilise la lettre grecque *epsilon*, abréviation du grec *esti, il est*, pour noter l'appartenance et introduit le quantificateur existentiel qu'il note $\exists$, renversant un E pour signifier l'initiale du mot italien *esiste*. Il propose aussi de supprimer les déclinaisons du latin pour obtenir une langue internationale, simple et comprise par tous, qu'il nomme *Latino sine flexione*. Le logicien anglais Bertrand **Russell** propose un paradoxe qui remet en cause la théorie des ensembles et nécessite de la fonder sur un système d'axiomes.



Bertrand Russell
1872-1970

■■ Objectifs

■ Les incontournables

- ▷ Manipuler les quantificateurs.
- ▷ Raisonner par implication ou par équivalence.
- ▷ Utiliser un raisonnement par l'absurde ou par contraposition.
- ▷ Effectuer un raisonnement par récurrence simple ou double.

■ Et plus si affinités...

- ▷ Appliquer une récurrence forte.
- ▷ Raisonner par analyse-synthèse.

Résumé de cours

Notions de logique

Définition : Proposition —. *Une **proposition** (ou assertion) est un énoncé mathématique qui peut prendre deux valeurs : vrai (V) ou faux (F).*

Définition : Négation d'une proposition —. *Soit P une proposition. On appelle **négation** de P et on note non P la proposition définie par :*

- *non P est vraie lorsque P est fausse ;*
- *non P est fausse lorsque P est vraie.*

Définition : Conjonction de deux propositions —. *Soit P et Q deux propositions. On appelle conjonction de P et Q la proposition notée P et Q, et définie de la manière suivante :*

- *P et Q est vraie lorsque P et Q sont vraies ;*
- *P et Q est fausse lorsque l'une au moins des deux propositions est fausse.*

Définition : Disjonction de deux propositions —. *Soit P et Q deux propositions. On appelle disjonction de P et Q la proposition notée P ou Q, et définie de la manière suivante :*

- *P ou Q est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie ;*
- *P ou Q est fausse lorsque P et Q sont fausses.*

Définition : Implication —. *Soit P et Q deux propositions. On appelle implication de Q par P la proposition non P ou Q. Cette proposition se note $P \Rightarrow Q$.*

Vocabulaire : *la proposition $P \Rightarrow Q$ se lit « P implique Q » ou encore « **si** P **alors** Q »*

Remarque : lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une **condition suffisante** pour avoir Q, ou que Q est une **condition nécessaire** pour avoir P.

Définition : Réciproque —. *Soit P et Q deux propositions. On appelle réciproque de $P \Rightarrow Q$ l'implication $Q \Rightarrow P$.*

Définition : Équivalence —. *Soit P et Q deux propositions. On appelle équivalence de P et Q la proposition $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. Cette proposition se note $P \Leftrightarrow Q$.*

Vocabulaire : *la proposition $P \Leftrightarrow Q$ se lit « P **si et seulement si** Q ».*

Remarque : lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, P est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir Q. Ainsi, les équivalences sont les conditions nécessaires et suffisantes.

Table de vérité des connecteurs logiques :

P	Q	*non P*	*P et Q*	*P ou Q*	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque : d'après cette table de vérité, si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**.

Définition : Contraposée —. *Soit P et Q deux propositions. On appelle contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ l'implication non $Q \Rightarrow$ non P*

Théorème 1.1.— Soit P et Q deux propositions. L'implication $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée sont équivalentes. Autrement dit :

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)}$$

Proposition 1.2.— Soit P et Q deux propositions. Alors :

- *non (non P) $\Longleftrightarrow$ P*
- *non (P et Q) $\Longleftrightarrow$ (non P) ou (non Q)*
- *non (P ou Q) $\Longleftrightarrow$ (non P) et (non Q)*
- *non ($P \Rightarrow Q$) $\Longleftrightarrow$ P et (non Q)*

Quantificateurs

Définition : *Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un paramètre x, où x est un élément d'un ensemble E.*

- **Quantificateur universel :** *Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E, on écrit :*

$$\boxed{\forall x \in E,\ P(x)}$$

Le symbole $\forall$ est appelé ***quantificateur universel*** *et se lit « **quel que soit** ».*

- **Quantificateur existentiel —.** *Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E, on écrit :*

$$\boxed{\exists x \in E,\ P(x)}$$

Le symbole $\exists$ est appelé ***quantificateur existentiel*** *et se lit « **il existe** ».*

Proposition 1.3.— Négation des propositions avec quantificateurs —.

- La négation de la proposition $\forall x \in E,\ P(x)$ est : $\exists x \in E,\ \text{non } P(x)$.
- La négation de la proposition $\exists x \in E,\ P(x)$ est : $\forall x \in E,\ \text{non } P(x)$.

Remarque : attention, l'ordre des quantificateurs est très important. Lorsque plusieurs quantificateurs apparaissent dans une proposition, on ne peut pas intervertir leur ordre sans changer (en général) le sens de la proposition. Pour s'en convaincre, on pourra consulter le **Vrai/Faux**.

Raisonnement par récurrence

Théorème 1.4.— Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ —. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Théorème 1.5.— Principe de récurrence —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.6.— Récurrence double —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** les propriétés $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $(\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1))$ implique $\mathcal{P}(n+2)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.7.— Principe de récurrence forte (ou récurrence avec prédécesseurs) —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\Big(\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ et $\cdots$ et $\mathcal{P}(n)\Big)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

■■ Méthodes

■ Démontrer une proposition

> ❑ **Méthode 1.1.— Comment démontrer une proposition par déduction**
> Si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**. C'est un principe très simple que l'on utilise en permanence : si l'on sait qu'une proposition P est vraie (propriété du cours, résultat d'une question antérieure...) et que l'on sait démontrer $P \Rightarrow Q$, alors on a démontré que la proposition Q est vraie.

Exemple : montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$.
On a $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$. Or, $(x-2)^2 \geqslant 0$ (le carré d'un réel est positif) et $1 > 0$. Par conséquent, $(x-2)^2 + 1 > 0$, c'est-à-dire $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Mise en œuvre : tous les exercices !

> ❑ **Méthode 1.2.— Comment démontrer une proposition par disjonction de cas**
> On est parfois amené à distinguer plusieurs cas pour démontrer qu'une proposition est vraie. C'est le principe d'une démonstration par **disjonction de cas**. En particulier, si l'on souhaite démontrer qu'une proposition $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble E, on peut prouver la proposition pour tous les éléments d'une partie A de E, puis pour les éléments de E n'appartenant pas à A.

Exemple : montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On va démontrer que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ en distinguant les cas n pair ou impair.

- Si n est pair, on peut écrire $n = 2k$, où $k \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{N}$.
- Si n est impair, on a $n = 2p+1$, où $p \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{2} = (2p+1)(p+1) \in \mathbb{N}$.

Finalement, pour tout entier naturel n, $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre : exercice 1.5, exercice 1.6.

> ❑ **Méthode 1.3.— Comment démontrer une proposition par l'absurde**
> Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on peut utiliser un **raisonnement par l'absurde**. Pour cela, on suppose que P est fausse et on démontre que l'on aboutit alors à une contradiction.

Exemple : montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.
Nous allons démontrer cette proposition en raisonnant par l'absurde. Pour cela, on suppose qu'il existe un entier naturel N_0 supérieur à tous les autres. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant N_0$. La relation est donc vraie pour l'entier $n = N_0 + 1$, donc $N_0 + 1 \leqslant N_0$; d'où $1 \leqslant 0$, ce qui est faux ! Par conséquent, il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.

Mise en œuvre : exercice 1.9, exercice 1.12.

■ Démontrer une implication

> ❏ **Méthode 1.4.— Comment démontrer une implication par raisonnement direct**
> Pour montrer directement l'implication $P \Rightarrow Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie. La démonstration commence par « supposons que P est vraie » et se termine par « Q est vraie ».

Exemple : démontrer que, pour x et y réels, $x^2 = y^2 \Longrightarrow |x| = |y|$.
Soit x et y deux réels tels que $x^2 = y^2$. On a donc $x^2 - y^2 = 0$, soit $(x - y)(x + y) = 0$.
Par conséquent, $x - y = 0$ ou $x + y = 0$. Ainsi, $x = y$ ou $x = -y$, ce qui signifie que $|x| = |y|$ (x et y sont égaux ou opposés). On a donc démontré l'implication attendue.

> ❏ **Méthode 1.5.— Comment démontrer une implication par contraposition**
> Le raisonnement par contraposition est basé sur le **théorème 1.1** :
>
> l'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée *non* $Q \Rightarrow$ *non* P.
>
> Ainsi, pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on peut prouver que l'implication *non* $Q \Rightarrow$ *non* P est vraie. En pratique, on suppose donc que *non* Q est vraie et on montre que *non* P est vraie.

Exemple : soit n un entier naturel. Montrer que, si n^2 est pair, alors n est pair.

La proposition à démontrer s'écrit : « n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair ». Nous allons raisonner par contraposition en démontrant la proposition (équivalente) : « n n'est pas pair $\Rightarrow$ n^2 n'est pas pair », c'est-à-dire « n est impair $\Rightarrow$ n^2 est impair ». Considérons un entier impair n : il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. On a alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, ce qui s'écrit aussi $n^2 = 2p+1$, où $p = 2k^2+2k$. Par conséquent, n^2 est un entier impair, ce qui démontre l'implication : si n est impair, alors n^2 est impair. Par contraposition, nous avons donc montré l'implication : si n^2 est pair, alors n est pair.

Exemple : montrer l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Nous allons de nouveau utiliser la contraposée en démontrant l'implication « $1+x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ ».
Soit x un réel tel que $1 + x \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $x = (1 + x) - 1$. Or $1 + x$ est un nombre rationnel (hypothèse), et 1 aussi. Par conséquent, $(1 + x) - 1$ est un nombre rationnel, ce qui montre que $x \in \mathbb{Q}$. Par contraposition, on a démontré l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Mise en œuvre : exercice 1.8

> ❏ **Méthode 1.6.— Comment démontrer une implication par l'absurde**
> L'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition *non* P *ou* Q, sa négation est donc P *et non* Q.
> Pour démontrer par l'absurde l'implication $P \Rightarrow Q$:
>
> - on suppose que P est vraie et que Q est fausse ;
> - on montre que cela aboutit à une contradiction.

Exemple : soit $x, y \in \mathbb{R}^+$. En raisonnant par l'absurde, montrer que, si $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$, alors $x = y$.
On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$ **et** $x \neq y$ (P est vraie, Q est fausse). Il en résulte que $x(1+x) = y(1+y)$, d'où l'on tire $x^2 - y^2 = y - x$, soit $(x-y)(x+y) = y - x$, d'où $(x-y)(x+y+1) = 0$. Comme $x \neq y$, on en déduit que $x + y + 1 = 0$, donc $x + y = -1$. Absurde vu que x et y sont positifs ! leur somme ne saurait être négative. D'où le résultat.

■ Démontrer une équivalence

> ❑ **Méthode 1.7.— Comment démontrer une équivalence par double implication**
> Par définition, l'équivalence « $P \Leftrightarrow Q$ » est la proposition « $P \Rightarrow Q$ *et* $Q \Rightarrow P$ ». Démontrer par double implication l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, c'est démontrer que les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. En pratique, pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$ par double implication :
>
> - on démontre $P \Rightarrow Q$;
> - puis on démontre $Q \Rightarrow P$.
>
> Dans ce cas, il y a donc deux démonstrations à faire pour obtenir l'équivalence.

Exemple : on pose $f(x) = mx + 1$. Montrer que f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$. Nous allons prouver cette équivalence en raisonnant par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $m = 0$, f est constante et égale à 1, elle garde donc un signe constant (positif) sur $\mathbb{R}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, montrons que, si f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, alors $m = 0$. Pour cela, on raisonne par contraposée en supposant que $m \neq 0$. On a alors :

$$f(x) = m\big(x + \frac{1}{m}\big),$$

et f change de signe en $-\frac{1}{m}$ (du signe de m pour $x > -\frac{1}{m}$, du signe de $-m$ pour $x < -\frac{1}{m}$). Ainsi, si $m \neq 0$, f change de signe sur $\mathbb{R}$.
Nous avons montré les deux implications. Ainsi, f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = \sqrt{x^2+1}$.
On va raisonner par double implication.
• Si x est solution de l'équation, alors $(2x)^2 = x^2 + 1$, soit $4x^2 = x^2 + 1$, d'où $3x^2 = 1$. On obtient donc $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
• Réciproquement, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ sont-ils solutions de l'équation ? Si x est égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{4/3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Par conséquent, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est solution mais $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne l'est pas.
Finalement, l'unique solution de l'équation est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

> ❑ **Méthode 1.8.— Comment démontrer une équivalence par raisonnement direct**
> Pour démontrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut également enchaîner les équivalences. On passe de P à Q par une succession d'équivalences en s'assurant, à chaque étape du raisonnement, que l'équivalence est bien conservée.

Remarque : Cette méthode est particulièrement adaptée à la résolution d'équations ou d'inéquations. Notons qu'il n'est pas toujours possible d'appliquer cette méthode directe pour démontrer une équivalence. Il est parfois nécessaire de procéder par double implication (**méthode 1.7**).

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = \sqrt{x^2+1}$.
Pour $x < 0$, l'équation n'a pas de solution (un nombre strictement négatif ne peut pas être égal à une racine carrée). Pour $x \geqslant 0$, on a :

$$2x = \sqrt{x^2+1} \iff (2x)^2 = (\sqrt{x^2+1})^2 \iff 4x^2 = x^2+1 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ainsi, l'unique solution de l'équation est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mise en œuvre : exercice 1.7.

■ Utiliser un contre-exemple

> **❑ Méthode 1.9.— Comment utiliser un contre-exemple**
> La négation de la proposition «$\forall x \in E, P(x)$» est «$\exists x \in E, \textit{non } P(x)$».
> Si l'on souhaite démontrer qu'une proposition du type «$\forall x \in E, P(x)$» est fausse, il suffit de trouver une valeur de x de E pour laquelle la proposition $P(x)$ est fausse. On parle alors de **contre-exemple**.

Exemple : la fonction sinus n'est pas paire. Par exemple, $\sin(\frac{\pi}{2}) \neq \sin(-\frac{\pi}{2})$.

Exemple : la proposition « tout entier naturel est somme de trois carrés » est-elle vraie ?
On peut facilement vérifier que cette proposition est vraie pour tout entier $n \in \{0, \cdots, 6\}$. Par exemple, $0 = 0^2+0^2+0^2$ et $5 = 2^2+1^2+0^2$. En revanche, la proposition est fausse pour $n = 7$. Sinon, on pourrait écrire $7 = a^2+b^2+c^7$, avec nécessairement $a, b, c \in \{0, \cdots, 2\}$ (puisque $3^2 = 9$). Mais, avec trois des carrés 0^2, 1^2 et 2^2, il est impossible de former 7. Ainsi, 7 constitue un contre-exemple et la proposition énoncée est donc fausse.

Mise en œuvre : voir le Vrai/Faux.

■ Raisonner par analyse-synthèse

> **❑ Méthode 1.10.— Comment raisonner par analyse-synthèse**
> Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode qui permet de déterminer les solutions d'un problème. Ce raisonnement se déroule en deux étapes.
>
> - Phase d'**analyse** : on suppose le problème résolu et on en déduit des conditions nécessaires.
> - Phase de **synthèse** : on montre que ces conditions obtenues sont suffisantes et on résout le problème.
>
> En pratique, on démontre que, si x est solution du problème, il ne peut prendre que certaines valeurs (phase d'analyse) ; on vérifie ensuite si ces valeurs sont effectivement solutions (phase de synthèse).

Exemple : montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous allons raisonner par analyse-synthèse. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Analyse. On suppose le problème résolu, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec g paire et h impaire telles que $f = g + h$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$$

Comme g est paire et h impaire, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(x) - h(x)$$

En sommant les deux égalités précédentes, on en déduit que $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.
De même, en retranchant ces deux égalités, il vient $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
Ainsi, s'il existe deux fonctions solutions du problème, alors ce sont nécessairement les fonctions g et h ci-dessus.
Synthèse. Nous allons vérifier que g et h sont bien solutions du problème.
• La fonction g est paire puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x).$$

• La fonction h est paire puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x).$$

• Enfin, on a $f = g + h$. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Par conséquent, nous avons démontré par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (g, h), avec g paire et h impaire tel que $f = g + h$.

Mise en œuvre : exercice 1.10 et exercice 1.11.

■ Raisonner par récurrence

❑ Méthode 1.11.— Comment appliquer une récurrence simple

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **simple**, qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:

- **Initialisation :** on vérifie que la proposition est vraie au rang initial n_0 ;
- **Hérédité :** on suppose que la proposition est vraie à un certain rang $n \geqslant n_0$ fixé (« on suppose que la proposition est vraie au rang n ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n + 1$;
- **Conclusion :** « par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ ».

Exemple : montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ici $n_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$.
• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé, c'est-à-dire que $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. On déduit de cette hypothèse de récurrence que :

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+n+1 &= (1+2+\cdots+n)+n+1 = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$.
• **Conclusion :** Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exemple : montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$.

Ici $n_0 = 1$. Pour $n \geqslant 1$, on introduit la proposition

$$\mathcal{P}(n) : « 1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1 ».$$

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 \times 1! = 1$, $(1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ et $1 = 1$.
• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé, c'est-à-dire que :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1.$$

D'après cette hypothèse de récurrence, on a alors :

$$\begin{aligned} 1 \times 1! + \cdots + (n+1) \times (n+1)! &= 1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)![1+n+1] - 1 \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Cela démontre $\mathcal{P}(n+1)$.
• **Conclusion :** Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Mise en œuvre : exercice 1.13, exercice 1.14, exercice 1.19, exercice 1.20.

❑ **Méthode 1.12.— Comment appliquer une récurrence double**

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **double**, qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:

- **Initialisation :** on vérifie que la proposition est vraie aux deux rangs initiaux n_0 et $n_0 + 1$;
- **Hérédité :** on suppose que la proposition est vraie aux rangs n et $n+1$, où n est un entier fixé supérieur ou égal à n_0 (« on suppose que la proposition est vraie aux rangs n et $n+1$ ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n+2$;
- **Conclusion :** « Par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ ».

Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n$.
On effectue une récurrence double en introduisant, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$\mathcal{P}(n) \ : \ «u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n».$$

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $u_0 = 1$ et $4 \times 2^{0+1} - 7 \times 3^0 = 8 - 7 = 1.$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $u_1 = -5$ et $4 \times 2^{1+1} - 7 \times 3^1 = 16 - 21 = -5$.

• **Hérédité :** On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, où $n \in \mathbb{N}$ est fixé, c'est-à-dire :

$$u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+1}.$$

En utilisant l'égalité donnant u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n, on en déduit que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n = 5(4 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+1}) - 6(4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n) \\ &= 20 \times 2^{n+2} - 35 \times 3^{n+1} - 24 \times 2^{n+1} + 42 \times 3^n \\ &= 2^{n+1}(2 \times 20 - 24) + 3^n(42 - 35 \times 3) = 16 \times 2^{n+1} - 63 \times 3^n \\ &= 4 \times 2^2 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^2 \times 3^n = 4 \times 2^{n+3} - 7 \times 3^{n+2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• **Conclusion :** Par récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre : exercice 1.15, exercice 1.16.

❑ Méthode 1.13.— Comment appliquer une récurrence forte

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **forte**, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:

- **Initialisation :** on vérifie que la propriété est vraie au rang initial n_0 ;
- **Hérédité :**on suppose que la propriété est vraie du rang n_0 **jusqu'à** un certain rang $n \geqslant n_0$ fixé (« on suppose que la propriété est vraie aux rangs $n_0, n_0 + 1, \cdots, n$ ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n + 1$;
- **Conslusion :** « Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ ».

Exemple : montrer que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « n s'écrit comme un produit de nombres premiers ».
Ici le rang initial n_0 est égal à 2.

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(2)$ est vraie puisque $2 = 2$ et 2 est un nombre premier !

• **Hérédité :** Soit n un entier supérieur ou égal à 2 fixé. On suppose que $\mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \cdots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, c'est-à-dire que tout entier $k \in [\![2, n]\!]$ peut se décomposer en produit de nombres premiers. On veut montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ($n+1$ se décompose en un produit de nombres premiers). Il y a deux cas :

- ▸ si $n + 1$ est premier, il n'y a rien à faire ($n + 1 = n + 1$ et $n + 1$ est un nombre premier !)
- ▸ si $n + 1$ n'est pas un nombre premier, on peut écrire $n + 1 = pq$, où p et q sont des entiers compris entre 2 et n. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à p et q (p et q appartiennent à $[\![2, n]\!]$ donc $\mathcal{P}(p)$ et $\mathcal{P}(q)$ sont vraies) : p et q se décomposent en produit de nombres premiers. Il en est alors de même pour leur produit $pq = n + 1$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion :** On vient de démontrer, par récurrence forte, que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Mise en œuvre : exercice 1.17.