Références sciences

Mécanique des milieux continus

Cours et exercices corrigés

Luc Dormieux
Éric Lemarchand
Djimédo Kondo

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye

paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-019782

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage propose une présentation de la mécanique des milieux continus destinée aux élèves des écoles d'ingénieurs et des formations universitaires (L3 et M1). Chaque chapitre comporte un exposé synthétique des concepts qui est ensuite illustré et complété sous forme d'exercices corrigés. Pour la plupart d'entre eux, ils sont issus des contrôles de connaissances posés dans le cadre de l'enseignement de la mécanique en première année à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Il importe d'aborder les objets de la modélisation mécanique dans leur nature tridimensionnelle et ce propos requiert un bagage mathématique approprié. C'est le sens de l'introduction au calcul tensoriel et aux opérateurs différentiels qui occupe les premières pages de cet ouvrage. Les outils mathématiques en question sont mis en œuvre aussitôt dans l'étude géométrique de la transformation, qui est déclinée selon les deux points de vue lagrangien et eulérien. Sans arrière-pensée solide ou fluide, on s'efforce au contraire d'en montrer la généralité et de souligner leur connexion.

Le formalisme tensoriel s'impose dans la description géométrique de la transformation pour des raisons purement mathématiques, liées au calcul différentiel. En revanche, c'est dans les lois de Newton que la nature tensorielle des efforts intérieurs trouve son origine. Elle se décline, elle aussi, en modes lagrangien et eulérien, selon que le changement de configuration du système doit être pris en compte explicitement ou non.

En conformité avec la chronologie de l'histoire de la mécanique, une brève initiation au calcul à la rupture précède dans cet ouvrage les chapitres consacrés à la théorie de l'élasticité. Il importe en effet de savoir si un chargement est supportable avant d'en prévoir les effets en termes de transformation géométrique.

La thermodynamique constitue la deuxième composante indispensable du socle de physique sur lequel la mécanique des milieux continus est élaborée. Dans cet ouvrage, elle entre en scène à l'occasion de la formulation de la loi de comportement thermoélastique. Pour l'essentiel, les applications proposées s'inscrivent dans le contexte de l'élasticité linéaire, mais le lecteur trouvera également l'occasion de s'initier à la question de l'élasticité en transformation finie.

Bien qu'elles ne puissent être appliquées qu'à un nombre limité de situations, les méthodes de résolution directe permettent de constituer une bibliothèque de solutions de référence à partir desquelles se développe l'intuition du mécanicien. Les techniques basées sur des potentiels en déplacement ou en contrainte méritent qu'on leur fasse une place car elles élargissent significativement le panorama des problèmes qui peuvent être résolus analytiquement. C'est dans le même esprit que le formalisme des fonctions de la variable complexe pour l'élasticité plane a été exposé.

Les méthodes variationnelles permettent de sortir des situations académiques en fournissant des estimations de la solution. On pense naturellement à la méthode des éléments finis à laquelle plusieurs exercices sont consacrés. Cependant, d'autres sujets offrent la possibilité de valoriser la faculté d'obtenir des estimations analytiques au moyen du calcul des variations et celle d'encadrer l'énergie de la solution.

La partie consacrée à la mécanique de fluides se développe à partir des concepts de cinématique eulérienne et de la représentation des efforts intérieurs mis en place au début de l'ouvrage. L'attention est dirigée principalement vers l'étude des écoulements potentiels. Celle-ci est complétée par une brève introduction à la notion de couche limite en raison de l'interconnexion de ces deux modélisations.

Le livre s'achève par un chapitre consacré aux milieux curvilignes élastiques. Il aurait certes eu sa place à la suite de l'étude du solide élastique tridimensionnel tant les liens entre les théories sont étroits. Le lecteur devinera peut-être dans l'option qui a été retenue la volonté des auteurs de ne pas séparer le monde de la mécanique des milieux continus selon une ligne de partage entre solides et fluides...

Table des matières

Chapitre 1

Eléments de calcul tensoriel

On se limite ici à une présentation succinte des notions de calcul tensoriel nécessaires pour l'étude du solide élastique tridimensionnel.

Convention d'Einstein :
On munit un espace vectoriel euclidien de dimension finie E d'une base orthonormée $(\underline{e}_i)$ $(1 \leq i \leq p)$ et l'on note u_i la i-ième composante du vecteur $\underline{u}$. Sauf mention explicite du contraire, on adopte la convention de sommation sur les indices répétés, dite convention d'Einstein : si un même indice figure 2 fois dans une expression, il y a sommation sur cet indice.
exemples :
Le vecteur $\underline{u}$ peut s'écrire $u_i\underline{e}_i$.
Le produit scalaire $\underline{a} \cdot \underline{b}$ peut s'écrire $a_i b_i$.
Le produit de matrices $AX = Y$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ a pour terme général $Y_i = A_{ij}X_j$. On dit parfois que i est un indice libre (ou franc) et j est un indice muet.

1.1 Définitions générales

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie. On appelle tenseur d'ordre n une forme n-linéaire sur E, c'est-à-dire une application de E^n dans $\mathbb{R}$ qui est linéaire par rapport à chacun de ses n arguments.

1.1.1 Tenseurs d'ordre 1

Etant de dimension finie, E est isomorphe à son dual E*. Ainsi, au vecteur $\underline{a}$, il est possible d'associer la forme linéaire $a^\star$ telle que $(\forall \underline{u})\, a^\star(\underline{u}) = \underline{a} \cdot \underline{u}$. Grâce à cet isomorphisme, on convient d'identifier le vecteur $\underline{a}$ et la forme linéaire $a^\star$, de sorte que les vecteurs peuvent être considérés comme des tenseurs d'ordre 1.

C'est pourquoi on adopte la convention de les noter de la même façon, par une lettre soulignée une fois [1]. Dans le même esprit, on pourra souligner [2] n fois la lettre désignant un tenseur d'ordre n.

1.1.2 Produit tensoriel

Etant donnés deux tenseurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ d'ordres respectifs p et q, on appelle produit tensoriel de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ et l'on note $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'$ le tenseur d'ordre $p+q$ défini par :

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_p, \underline{u}_{p+1}, \ldots, \underline{u}_{p+q}) = \mathcal{T}(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_p)\mathcal{T}'(\underline{u}_{p+1}, \ldots, \underline{u}_{p+q}) \tag{1.1}$$

L'extension au produit tensoriel de n tenseurs est immédiate. Ainsi, on appelle produit tensoriel des n vecteurs $\underline{a}_i$ le tenseur d'ordre n suivant :

$$\underline{a}_1 \otimes \cdots \otimes \underline{a}_n(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n) = (\underline{a}_1 \cdot \underline{u}_1) \times \cdots \times (\underline{a}_n \cdot \underline{u}_n) \tag{1.2}$$

1.1.3 Contraction d'un tenseur selon un couple d'indices

Soit $\mathcal{T}$ un tenseur d'ordre p. On appelle contraction de $\mathcal{T}$ selon ses deux derniers indices le tenseur $\mathcal{T}^c$ d'ordre $p-2$ défini de la façon suivante :

$$\mathcal{T}^c(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_{p-2}) = \mathcal{T}(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_{p-2}, \underline{e}_i, \underline{e}_i) \tag{1.3}$$

On vérifie sans peine (exercice 1.6.1) que cette définition est indépendante du choix de la base $(\underline{e}_i)$. En modifiant la place des $\underline{e}_i$ dans le p-uplet, il est évidemment possible de contracter $\mathcal{T}$ selon un couple arbitraire d'indices.
A titre d'exemple, la contraction du produit tensoriel $\underline{a} \otimes \underline{b}$ selon ses deux indices n'est autre que le produit scalaire de ces vecteurs :

$$\underline{a} \otimes \underline{b}(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = a_i b_i = \underline{a} \cdot \underline{b} \tag{1.4}$$

1.2 Tenseurs d'ordre 2

1.2.1 Matrice d'un tenseur d'ordre 2

Les tenseurs d'ordre 2 sont les formes bilinéaires sur E. On convient de souligner 2 fois la lettre désignant un tenseur d'ordre 2. La matrice du tenseur $\underline{\underline{T}}$ dans la base $(\underline{e}_i)$ est une matrice carrée de terme général

$$T_{ij} = \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j) \tag{1.5}$$

1. Cette convention remplace la notation des vecteurs par une lettre surmontée d'une flèche.
2. Cette convention peut évidemment alourdir l'écriture. On ne l'utilisera ici que pour $n \leq 2$.

où $\underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$ est le scalaire obtenu en appliquant la forme bilinéaire $\underline{\underline{T}}$ au couple de vecteurs $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$. En vertu de la linéarité de $\underline{\underline{T}}$ par rapport à chacun de ses arguments, on note que

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(u_i \underline{e}_i, v_j \underline{e}_j) = T_{ij} u_i v_j \tag{1.6}$$

On note $\underline{\underline{\delta}}$ le tenseur dont la matrice a pour terme d'indice ij le symbole de Kronecker δ_{ij}. D'après (1.6), le tenseur $\underline{\underline{\delta}}$ n'est autre que le produit scalaire :

$$\underline{\underline{\delta}}(\underline{u}, \underline{v}) = \delta_{ij} u_i v_j = \underline{u} \cdot \underline{v} \tag{1.7}$$

${}^t\underline{\underline{T}}$ désigne le transposé du tenseur $\underline{\underline{T}}$ défini de la façon suivante :

$${}^t\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u}) \tag{1.8}$$

D'après (1.5), on observe que les matrices de $\underline{\underline{T}}$ et ${}^t\underline{\underline{T}}$ sont transposées l'une de l'autre. Un tenseur d'ordre 2 est dit symétrique (resp. antisymétrique) s'il vérifie $\underline{\underline{T}} = {}^t\underline{\underline{T}}$ (resp. $\underline{\underline{T}} = -{}^t\underline{\underline{T}}$).

Le produit tensoriel des deux vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$, noté $\underline{a} \otimes \underline{b}$, constitue un exemple important de tenseur d'ordre 2. Conformément à la définition (1.2), on a :

$$(\forall \underline{u})(\forall \underline{v}) \quad \underline{a} \otimes \underline{b}(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{a} \cdot \underline{u})(\underline{b} \cdot \underline{v}) \tag{1.9}$$

Il résulte immédiatement de (1.5) que le terme général de la matrice de $\underline{a} \otimes \underline{b}$ est égal à $a_i b_j$. En particulier, le terme d'indice ij de la matrice de $\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta$ est le scalaire $\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}$.

Partant de (1.6) et compte tenu de (1.9), nous obtenons :

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = T_{ij} u_i v_j = \left(T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j\right)(\underline{u}, \underline{v}) \tag{1.10}$$

La famille des produits tensoriels $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ constitue donc une base [1] de l'espace des tenseurs d'ordre 2 :

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \tag{1.11}$$

1.2.2 Endomorphisme associé à un tenseur d'ordre 2

Au tenseur $\underline{\underline{T}}$, on associe l'endomorphisme T de même matrice. On a donc :

$$T(\underline{e}_j) = T_{ij} \underline{e}_i \tag{1.12}$$

On vérifie alors sans peine que

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}.T(\underline{v}) \tag{1.13}$$

1. D'après (1.10), la famille en question est manifestement génératrice. On vérifiera sans peine qu'elle est libre.

On définit par ce procédé un isomorphisme de l'espace des tenseurs d'ordre 2 sur l'espace des endomorphismes de l'espace vectoriel E. Cet isomorphisme permet d'étendre aux tenseurs certains concepts propres aux endomorphismes, tels que l'inverse, le déterminant, la trace ...
Lorsque T est inversible, on appelle inverse du tenseur $\underline{\underline{T}}$, et l'on note $\underline{\underline{T}}^{-1}$, le tenseur associé à l'endomorphisme T^{-1}.
On appelle déterminant (resp. trace) du tenseur $\underline{\underline{T}}$, et l'on note $\det \underline{\underline{T}}$ (resp. $\operatorname{tr} \underline{\underline{T}}$) le déterminant (resp. la trace) de l'endomorphisme associé :

$$\det \underline{\underline{T}} = \det T \quad ; \quad \operatorname{tr} \underline{\underline{T}} = \operatorname{tr} T \tag{1.14}$$

On remarque que l'endomorphisme associé au tenseur $\underline{\underline{\delta}}$ (voir (1.7)) n'est autre que l'identité de l'espace vectoriel.

1.2.3 Contractions d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur

On appelle produit contracté de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{v}$ et l'on note $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}$ le vecteur [1] obtenu en contractant $\underline{\underline{T}} \otimes \underline{v}$ selon les deux derniers indices. En utilisant l'équivalence vecteur-tenseur d'ordre 1 et la définition (1.3), on obtient :

$$(\forall \underline{u}) \ \ \underline{u} \cdot \big(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}\big) = (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v})(\underline{u}) = \underline{\underline{T}} \otimes \underline{v}(\underline{u}, \underline{e}_j, \underline{e}_j) = \\ \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{e}_j)\underline{v} \cdot \underline{e}_j = u_i T_{ij} v_j = \underline{u} \cdot T(\underline{v}) \tag{1.15}$$

Il en résulte que

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = T(\underline{v}) \tag{1.16}$$

En comparant (1.13) et (1.15), on observe en outre que

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) \tag{1.17}$$

Par exemple, dans le cas particulier $\underline{\underline{T}} = \underline{a} \otimes \underline{b}$, (1.17) s'écrit [2]

$$(\underline{a} \cdot \underline{u})(\underline{b} \cdot \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v}) \tag{1.18}$$

On en déduit que

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v} = \underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{v}) \tag{1.19}$$

On appelle produit contracté de $\underline{v}$ et de $\underline{\underline{T}}$ et l'on note $\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}}$ le vecteur obtenu en contractant $\underline{v} \otimes \underline{\underline{T}}$ selon les deux premiers indices :

$$(\forall \underline{u}) \ \ \big(\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}}\big) \cdot \underline{u} = \underline{v} \otimes \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_i, \underline{u}) = v_i \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{u}) = v_i T_{ij} u_j = \underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u}) = {}^t\, \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) \tag{1.20}$$

1. Respectivement le tenseur d'ordre 1.
2. Dans la notation $\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v}$ du produit contracté de $\underline{a} \otimes \underline{b}$ et $\underline{v}$, il n'y a pas d'ambiguité étant donné que le produit tensoriel lie les vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$.

L'application de (1.17) à ${}^t\underline{\underline{T}}$ donne

$$ {}^t\underline{\underline{T}}(\underline{u},\underline{v}) = \underline{u}\cdot\left({}^t\underline{\underline{T}}\cdot\underline{v}\right) \tag{1.21}$$

En utilisant ce résultat dans (1.20), on a finalement :

$$\underline{v}\cdot\underline{\underline{T}} = {}^t\,\underline{\underline{T}}\cdot\underline{v} \tag{1.22}$$

On déduit au passage de (1.19) et de (1.22) que

$$\underline{v}\cdot\underline{a}\otimes\underline{b} = (\underline{v}\cdot\underline{a})\underline{b} \tag{1.23}$$

En rapprochant (1.17) et (1.22), on observe que l'on a :

$$\underline{u}\cdot(\underline{\underline{T}}\cdot\underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{u},\underline{v}) = {}^t\,\underline{\underline{T}}(\underline{v},\underline{u}) = \underline{v}\cdot({}^t\underline{\underline{T}}\cdot\underline{u}) = (\underline{u}\cdot\underline{\underline{T}})\cdot\underline{v} \tag{1.24}$$

En définitive, l'ordre des parenthèses étant indifférent, on choisit de noter $\underline{u}\cdot\underline{\underline{T}}\cdot\underline{v}$ le scalaire $\underline{\underline{T}}(\underline{u},\underline{v})$:

$$\underline{u}\cdot\underline{\underline{T}}\cdot\underline{v} = \underline{\underline{T}}(\underline{u},\underline{v}) = \underline{u}\cdot(\underline{\underline{T}}\cdot\underline{v}) = (\underline{u}\cdot\underline{\underline{T}})\cdot\underline{v} \tag{1.25}$$

1.2.4 Contractions de deux tenseurs d'ordre 2

Soient $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}}'$ deux tenseurs d'ordre 2 associés respectivement aux endomorphismes T et T'. On appelle produit contracté de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}}'$ et l'on note $\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}'$ le tenseur d'ordre 2 obtenu en contractant $\underline{\underline{T}}\otimes\underline{\underline{T}}'$ selon les indices 2 et 3. On a donc

$$\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}'(\underline{e}_i,\underline{e}_j) = \underline{\underline{T}}\otimes\underline{\underline{T}}'(\underline{e}_i,\underline{e}_k,\underline{e}_k,\underline{e}_j) = T_{ik}T'_{kj} \tag{1.26}$$

La matrice de $\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}'$ ayant pour terme d'indice ij le scalaire $T_{ik}T'_{kj}$, $\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}'$ est donc le tenseur associé à l'endomorphisme $T\circ T'$. En particulier, étant associé à l'endomorphisme identité de l'espace vectoriel, le produit $\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1}$ n'est autre que le produit scalaire :

$$\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{\delta}} \tag{1.27}$$

$\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}}^{-1}$ sont donc inverses pour le produit contracté des tenseurs d'ordre 2.
À titre d'exemple, considérons le produit contracté des tenseurs $\underline{a}\otimes\underline{b}$ (terme général a_ib_j) et $\underline{c}\otimes\underline{d}$ (terme général c_id_j). D'après (1.26), le terme d'indice ij de la matrice de $\underline{a}\otimes\underline{b}\cdot\underline{c}\otimes\underline{d}$ est $a_ib_kc_kd_j$, soit $(\underline{b}\cdot\underline{c})a_id_j$. On a donc :

$$\underline{a}\otimes\underline{b}\cdot\underline{c}\otimes\underline{d} = (\underline{b}\cdot\underline{c})\,\underline{a}\otimes\underline{d} \tag{1.28}$$

1.2.5 Double contraction de deux tenseurs d'ordre 2

On appelle produit doublement contracté de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}}'$ et l'on note $\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}'$ le scalaire obtenu en contractant $\underline{\underline{T}}\otimes\underline{\underline{T}}'$ selon les couples d'indices (2,3) et (1,4) :

$$\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{T}}\otimes\underline{\underline{T}}'(\underline{e}_i,\underline{e}_j,\underline{e}_j,\underline{e}_i) = T_{ij}T'_{ji} \tag{1.29}$$

On observe que $\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}'$ n'est autre que la trace du produit contracté $\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}'$. La double contraction des tenseurs d'ordre 2 est donc une opération commutative :

$$\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}' = \operatorname{tr}\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{T}}':\underline{\underline{T}} \tag{1.30}$$