

Références sciences

Mécanique des milieux continus

Cours et exercices corrigés

Luc Dormieux
Éric Lemarchand
Djimédo Kondo



Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



ISBN 9782340-019782
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2017
32, rue Bague 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage propose une présentation de la mécanique des milieux continus destinée aux élèves des écoles d'ingénieurs et des formations universitaires (L3 et M1). Chaque chapitre comporte un exposé synthétique des concepts qui est ensuite illustré et complété sous forme d'exercices corrigés. Pour la plupart d'entre eux, ils sont issus des contrôles de connaissances posés dans le cadre de l'enseignement de la mécanique en première année à l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

Il importe d'aborder les objets de la modélisation mécanique dans leur nature tridimensionnelle et ce propos requiert un bagage mathématique approprié. C'est le sens de l'introduction au calcul tensoriel et aux opérateurs différentiels qui occupe les premières pages de cet ouvrage. Les outils mathématiques en question sont mis en œuvre aussitôt dans l'étude géométrique de la transformation, qui est déclinée selon les deux points de vue lagrangien et eulérien. Sans arrière-pensée solide ou fluide, on s'efforce au contraire d'en montrer la généralité et de souligner leur connexion.

Le formalisme tensoriel s'impose dans la description géométrique de la transformation pour des raisons purement mathématiques, liées au calcul différentiel. En revanche, c'est dans les lois de Newton que la nature tensorielle des efforts intérieurs trouve son origine. Elle se décline, elle aussi, en modes lagrangien et eulérien, selon que le changement de configuration du système doit être pris en compte explicitement ou non.

En conformité avec la chronologie de l'histoire de la mécanique, une brève initiation au calcul à la rupture précède dans cet ouvrage les chapitres consacrés à la théorie de l'élasticité. Il importe en effet de savoir si un chargement est supportable avant d'en prévoir les effets en termes de transformation géométrique.

La thermodynamique constitue la deuxième composante indispensable du socle de physique sur lequel la mécanique des milieux continus est élaborée. Dans cet ouvrage, elle entre en scène à l'occasion de la formulation de la loi de comportement thermoélastique. Pour l'essentiel, les applications proposées s'inscrivent dans le contexte de l'élasticité linéaire, mais le lecteur trouvera également l'occasion de s'initier à la question de l'élasticité en transformation finie.

Bien qu'elles ne puissent être appliquées qu'à un nombre limité de situations, les méthodes de résolution directe permettent de constituer une bibliothèque de

solutions de référence à partir desquelles se développe l'intuition du mécanicien. Les techniques basées sur des potentiels en déplacement ou en contrainte méritent qu'on leur fasse une place car elles élargissent significativement le panorama des problèmes qui peuvent être résolus analytiquement. C'est dans le même esprit que le formalisme des fonctions de la variable complexe pour l'élasticité plane a été exposé.

Les méthodes variationnelles permettent de sortir des situations académiques en fournissant des estimations de la solution. On pense naturellement à la méthode des éléments finis à laquelle plusieurs exercices sont consacrés. Cependant, d'autres sujets offrent la possibilité de valoriser la faculté d'obtenir des estimations analytiques au moyen du calcul des variations et celle d'encadrer l'énergie de la solution.

La partie consacrée à la mécanique de fluides se développe à partir des concepts de cinématique eulérienne et de la représentation des efforts intérieurs mis en place au début de l'ouvrage. L'attention est dirigée principalement vers l'étude des écoulements potentiels. Celle-ci est complétée par une brève introduction à la notion de couche limite en raison de l'interconnexion de ces deux modélisations.

Le livre s'achève par un chapitre consacré aux milieux curvilignes élastiques. Il aurait certes eu sa place à la suite de l'étude du solide élastique tridimensionnel tant les liens entre les théories sont étroits. Le lecteur devinera peut-être dans l'option qui a été retenue la volonté des auteurs de ne pas séparer le monde de la mécanique des milieux continus selon une ligne de partage entre solides et fluides...

Table des matières

1	Éléments de calcul tensoriel	13
1.1	Définitions générales	13
1.1.1	Tenseurs d'ordre 1	13
1.1.2	Produit tensoriel	14
1.1.3	Contraction d'un tenseur selon un couple d'indices	14
1.2	Tenseurs d'ordre 2	14
1.2.1	Matrice d'un tenseur d'ordre 2	14
1.2.2	Endomorphisme associé à un tenseur d'ordre 2	15
1.2.3	Contractions d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur	16
1.2.4	Contractions de deux tenseurs d'ordre 2	17
1.2.5	Double contraction de deux tenseurs d'ordre 2	17
1.2.6	Dérivée d'une fonction par rapport à un tenseur	18
1.3	Contractions d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2	18
1.4	Calcul différentiel sur les tenseurs	19
1.4.1	Gradient d'un champ de tenseurs	19
1.4.2	Divergence d'un champ de tenseurs	20
1.4.3	Théorème de la divergence	21
1.5	Formulaire de calcul différentiel sur les tenseurs	21
1.5.1	Coordonnées cartésiennes orthonormées	21
1.5.2	Coordonnées cylindriques	23
1.5.3	Coordonnées sphériques	24
1.6	Exercices	25
1.6.1	<i>Caractère intrinsèque de la contraction d'un tenseur sur un couple d'indices</i>	25
1.6.2	<i>Etude algébrique de la double contraction</i>	26
1.6.3	<i>Le produit tensoriel \otimes</i>	27
1.6.4	<i>L'algèbre des tenseurs isotropes d'ordre 4</i>	30
1.6.5	<i>Identités tensorielles remarquables</i>	32
1.6.6	<i>Etude du tenseur d'inertie</i>	33
1.6.7	<i>Théorème de Gauss (électrostatique, gravitationnel)</i>	35
1.6.8	<i>Calcul différentiel sur les tenseurs</i>	37

1.6.9	<i>Tenseur de Green du matériau isotrope</i>	40
1.6.10	<i>Rotationnel d'un champ de vecteurs</i>	42
2	Etude de la transformation géométrique d'un milieu continu	45
2.1	Transformation géométrique	45
2.2	Tenseurs de déformation	47
2.2.1	Transport des vecteurs matériels	47
2.2.2	Déformation de Green-Lagrange	48
2.2.3	Composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange	49
2.2.4	Transformation infinitésimale et tenseur de déformation linéarisé	51
2.2.5	Choix de la configuration de référence	52
2.2.6	Condition de compatibilité géométrique	53
2.2.7	Forme générale des solutions en déplacement	55
2.3	Description du mouvement par les vitesses	57
2.3.1	Vitesse lagrangienne et vitesse eulérienne	57
2.3.2	Taux de déformation volumique	57
2.3.3	Tenseur taux de déformation	58
2.3.4	Dérivées particulières d'un champ	59
2.3.5	Dérivées particulières d'une intégrale de volume	61
2.4	Exercices	63
2.4.1	<i>Etude d'une rotation infinitésimale</i>	63
2.4.2	<i>Direction invariante dans une transformation homogène</i>	65
2.4.3	<i>Expression d'une translation en coordonnées cylindriques</i>	67
2.4.4	<i>Etude d'une transformation géométrique</i>	67
2.4.5	<i>Dérivée temporelle de l'énergie cinétique</i>	69
2.4.6	<i>Extensions simples géométriquement compatibles</i>	70
2.4.7	<i>Compatibilité géométrique d'un champ de déformation constant par blocs</i>	71
2.4.8	<i>Compatibilité géométrique en déformations planes</i>	76
2.4.9	<i>Compatibilité géométrique d'un champ anisotrope</i>	77
2.4.10	<i>Conditions aux limites uniformes de Hashin : formulation en déformation</i>	79
2.4.11	<i>Déformations planes polynomiales</i>	82
2.4.12	<i>Compatibilité géométrique : A propos des solutions multivaluées</i>	83
2.4.13	<i>Champ de déplacement discontinu C^1 par morceaux : approche par la théorie des distributions</i>	85
2.4.14	<i>Description eulérienne des mouvements de corps rigides</i>	88
2.4.15	<i>Taux de déformation lagrangien et eulérien</i>	89
2.4.16	<i>Formulations eulérienne et lagrangienne de la liaison d'incompressibilité</i>	89
2.4.17	<i>Transport convectif d'un élément d'aire</i>	90

3	Contraintes dans un milieu continu tridimensionnel	93
3.1	Modélisation des efforts extérieurs	94
3.2	Lemme du tétraèdre	95
3.3	Tenseur des contraintes de Cauchy	97
3.3.1	Définition et interprétation physique	97
3.3.2	Equation de la dynamique - Equation d'équilibre	98
3.3.3	Symétrie du tenseur des contraintes	99
3.3.4	Cercles de Mohr	100
3.3.5	Discontinuités du champ de contraintes	102
3.4	Dualisation de l'équation de la dynamique	103
3.4.1	Théorème des puissances virtuelles	103
3.4.2	Théorème des travaux virtuels	104
3.4.3	Puissance et travail des efforts extérieurs dans le mouvement réel en condition quasistatique	104
3.5	Exercices	105
3.5.1	<i>Cercles de Mohr</i>	105
3.5.2	<i>Représentation lagrangienne des contraintes : tenseur de Piola-Kirchhoff</i>	108
3.5.3	<i>Représentation semi-lagrangienne des contraintes : tenseur de Boussinesq</i>	110
3.5.4	<i>Champ de contrainte constant par blocs</i>	113
3.5.5	<i>Conditions aux limites uniformes de Hashin ; formulation en contraintes</i>	115
3.5.6	<i>Discontinuité de contrainte</i>	118
3.5.7	<i>Régularité des contraintes : approche par la théorie des distributions</i>	120
3.5.8	<i>Théorème des travaux virtuels pour un champ de déplacement discontinu C^1 par morceaux</i>	122
3.5.9	<i>Forces à distance dépendant du sous-système</i>	123
4	Introduction au calcul à la rupture	127
4.1	Problématique du calcul à la rupture	127
4.2	Approche directe dans le cas tridimensionnel	129
4.3	Formulation de conditions nécessaires de stabilité	131
4.3.1	Matériau de von Mises	131
4.3.2	Généralisation à d'autres matériaux	133
4.3.3	Généralisation à des champs de déplacements discontinus C^1 par morceaux	134
4.4	Exercices	135
4.4.1	<i>Critère de Tresca</i>	135
4.4.2	<i>Mise en rotation d'un arbre cylindrique rigide encastré</i>	136
4.4.3	<i>Stabilité d'un talus vertical - 1</i>	139

4.4.4	<i>Fonction d'appui du matériau de von Mises</i>	141
4.4.5	<i>Fonction d'appui du matériau de Tresca</i>	142
4.4.6	<i>Stabilité d'un talus vertical - 2</i>	144
4.4.7	<i>Stabilité d'un talus vertical - 3</i>	147
4.4.8	<i>Fonction d'appui du critère de Green</i>	150
4.4.9	<i>Effondrement d'un corps sphérique sous poids propre</i>	151
4.4.10	<i>Poutre en flexion</i>	159
5	Comportement élastique du solide tridimensionnel	163
5.1	Comportement élastique en condition isotherme	164
5.2	Comportement thermoélastique	166
5.3	Inversion de la loi de comportement	167
5.4	Comportement thermoélastique linéaire	169
5.4.1	Développement limité quadratique de l'énergie libre	169
5.4.2	Inversion de la loi de comportement dans le cas linéaire	171
5.5	Comportement thermoélastique linéaire isotrope	172
5.5.1	Isotropie dans l'état initial naturel	172
5.5.2	Etat initial précontraint	176
5.6	Exercices	177
5.6.1	<i>Prise en compte d'effets inertiels dans la formulation de la loi de comportement élastique</i>	177
5.6.2	<i>Calcul tensoriel et élasticité linéaire isotrope</i>	178
5.6.3	<i>Tenseurs d'élasticité isotropes</i>	180
5.6.4	<i>Matériau élastique incompressible</i>	185
5.6.5	<i>Quelques résultats de convexité</i>	186
5.6.6	<i>Elasticité isotherme et élasticité adiabatique</i>	188
5.6.7	<i>Élasticité et linéarité</i>	189
5.6.8	<i>Loi de comportement élastique en transformation finie</i>	191
6	Problèmes d'élasticité tridimensionnelle	193
6.1	Définition du chargement	193
6.2	Définition de la solution d'un problème d'élasticité	195
6.3	Méthodes de résolution directes	196
6.3.1	Méthode de résolution par les contraintes	197
6.3.2	Méthode de résolution par les déplacements	198
6.4	Expérience de traction simple	200
6.4.1	Détermination de la solution	200
6.4.2	Interprétation de E et ν	202
6.5	Exercices	202
6.5.1	<i>Cavité circulaire dans un milieu infini sous cisaillement</i>	202
6.5.2	<i>Elastodynamique : vitesses de propagation dans un milieu élastique infini</i>	205

6.5.3	<i>Un problème d'élasticité linéaire incompressible</i>	207
6.5.4	<i>Contraintes gravitationnelles à l'échelle d'un astre : méthode directe par les contraintes</i>	208
6.5.5	<i>Contraintes gravitationnelles à l'échelle d'un astre : méthode directe par les déplacements</i>	211
6.5.6	<i>Milieu continu élastique infini soumis à une force ponctuelle</i>	214
6.5.7	<i>Variation spatiale de la fonction de Green</i>	215
6.5.8	<i>Déformation d'origine électrostatique</i>	217
6.5.9	<i>Contraintes au voisinage de la pointe d'une fissure</i>	223
6.5.10	<i>Traction uniaxiale en transformation finie</i>	229
6.5.11	<i>Contraintes thermiques</i>	231
6.5.12	<i>Potentiels de Neuber-Papkovich</i>	234
7	Approches variationnelles en élasticité linéaire	239
7.1	Principe de minimum de l'énergie potentielle	239
7.2	Intêret pratique du principe de minimum de l'énergie potentielle	242
7.3	Principe de minimum de l'énergie complémentaire	243
7.4	Conjonction des deux principes	245
7.4.1	Le cas général	245
7.4.2	Évolution isotherme à partir de l'état initial naturel	246
7.5	Exercices	247
7.5.1	<i>Calcul variationnel de l'énergie potentielle d'un milieu fissuré</i>	247
7.5.2	<i>Approche variationnelle de la compressibilité d'un solide comportant une cavité</i>	252
7.5.3	<i>Translation d'un arbre cylindrique dans un milieu élastique</i>	258
7.5.4	<i>La méthode des éléments finis dans un contexte unidimensionnel</i>	262
7.5.5	<i>Un problème d'astrophysique : La limite de Roche</i>	271
7.5.6	<i>Un théorème de l'énergie mécanique</i>	275
7.5.7	<i>Aplatissement de la Terre - le géoïde de référence</i>	277
7.5.8	<i>Bornes de Voigt et Reuss</i>	281
8	Problèmes d'élasticité en déformations planes	285
8.1	Notion de fonction d'Airy	285
8.2	Représentation de la fonction d'Airy par des potentiels complexes	287
8.2.1	Expression des contraintes	288
8.2.2	Expression des déplacements	290
8.3	Singularités de contraintes en fond de fissure	291
8.4	Annexe : Rappels sur les fonctions de la variable complexe	296
8.5	Exercices	297
8.5.1	<i>Calcul de la fonction $f(z)$ de (8.24) pour une pression uniforme</i>	297
8.5.2	<i>A propos de la question de l'unicité du potentiel $\phi(z)$</i>	297
8.5.3	<i>Cavité circulaire sous pression</i>	298

8.5.4	<i>Cavité circulaire avec traction uniaxiale à l'infini</i>	300
8.5.5	<i>Etude d'un cisaillement : approche par fonction d'Airy et approche variationnelle en contraintes</i>	301
8.5.6	<i>Propagation d'une fissure dans une plaque</i>	306
8.5.7	<i>Propagation d'une fissure dans une pièce en extension</i>	312
9	Introduction à la mécanique des fluides	317
9.1	Généralités	317
9.1.1	Modèle de fluide parfait	317
9.1.2	Modèle de fluide visqueux newtonien	319
9.1.3	Le nombre de Reynolds de l'écoulement	320
9.2	Écoulement irrotationnel de fluide incompressible	322
9.2.1	Théorème de Bernoulli	322
9.2.2	Potentiel et fonction de courant	323
9.2.3	Potentiel complexe de l'écoulement	324
9.3	Exemples d'écoulements potentiels	325
9.3.1	Puits et source	325
9.3.2	Tourbillon ponctuel	326
9.3.3	Écoulement entre deux plans	327
9.3.4	Écoulement sans circulation autour d'un cylindre	328
9.3.5	Écoulement avec circulation autour d'un cylindre	329
9.4	Formule de Blasius pour le calcul de la résultante des efforts sur un obstacle	332
9.4.1	Le cas général	332
9.4.2	Application à l'écoulement autour d'un cylindre circulaire	333
9.5	Utilisation des transformations conformes	333
9.5.1	Définition	333
9.5.2	La transformation de Joukovski	334
9.5.3	Écoulement autour d'un cylindre de section quelconque	335
9.5.4	Point singulier d'un écoulement - Hypothèse de Kutta-Joukovski.	338
9.6	Annexe : expression de l'accélération	339
9.7	Introduction à la théorie de la couche limite	340
9.7.1	Motivation	340
9.7.2	Equations de la couche limite : forme adimensionnelle	341
9.7.3	Equations de la couche limite en variables dimensionnées	342
9.7.4	Solution autosemblable de Blasius	343
9.8	Exercices	346
9.8.1	<i>Fluide parfait barotrope</i>	346
9.8.2	<i>Trajectoires et lignes de courant</i>	347
9.8.3	<i>Etude d'une source jaillissant dans un bassin</i>	348
9.8.4	<i>Écoulement dans un coin à angle droit</i>	350

9.8.5	<i>Écoulement potentiel défini par une distribution continue de tourbillons ponctuels</i>	352
9.8.6	<i>Longueur caractéristique de la perturbation d'un écoulement par un obstacle</i>	355
9.8.7	<i>Moment des forces appliquées par un écoulement potentiel sur un obstacle - 1</i>	357
9.8.8	<i>Moment des forces appliquées par un écoulement potentiel sur un obstacle - 2</i>	358
9.8.9	<i>Étude d'un profil de Joukovski</i>	360
9.8.10	<i>Transformations conformes d'un cercle</i>	365
9.8.11	<i>Vitesse au bord de fuite d'un profil de Joukovski</i>	369
10	Milieux curvilignes	373
10.1	Transformation géométrique	373
10.1.1	Transformation géométrique d'un arc	373
10.1.2	Description du mouvement d'un arc par les vitesses	377
10.1.3	Transformation géométrique d'une structure	380
10.2	Efforts extérieurs et intérieurs	383
10.2.1	Efforts extérieurs et intérieurs dans un arc	383
10.2.2	Dualisation des équations de la statique; théorème des puissances virtuelles	387
10.2.3	Efforts extérieurs et intérieurs dans une structure	388
10.2.4	Hypothèse des petits déplacements et applications	391
10.2.5	Structure plane chargée dans son plan	395
10.3	Structures élastiques	396
10.3.1	Cadre de l'étude	397
10.3.2	Formulation du comportement élastique	398
10.3.3	Calcul des structures élastiques	400
10.4	Annexes	410
10.4.1	Rotation infinitésimale	410
10.4.2	Courbure d'un arc plan	411
10.5	Exercices	411
10.5.1	<i>Statique des poutres</i>	411
10.5.2	<i>Compatibilité des déformations d'un système de barres articulées</i>	413
10.5.3	<i>Étude d'un système hyperstatique</i>	414
10.5.4	<i>Illustration du théorème de Castigliano</i>	416
10.5.5	<i>Poutre élastique périodique</i>	419
10.5.6	<i>Elasticité des poutres</i>	421
10.5.7	<i>Poutre inclinée soumise à une compression</i>	424
10.5.8	<i>Application du calcul à la rupture à une poutre en flexion</i>	426
10.5.9	<i>Éléments finis en flexion</i>	427
10.5.10	<i>Une tentative de modélisation simplifiée du « longbow »</i>	431

Chapitre 1

Eléments de calcul tensoriel

On se limite ici à une présentation succincte des notions de calcul tensoriel nécessaires pour l'étude du solide élastique tridimensionnel.

Convention d'Einstein :

On munit un espace vectoriel euclidien de dimension finie E d'une base orthonormée (\underline{e}_i) ($1 \leq i \leq p$) et l'on note u_i la i -ième composante du vecteur \underline{u} . Sauf mention explicite du contraire, on adopte la convention de sommation sur les indices répétés, dite convention d'Einstein : si un même indice figure 2 fois dans une expression, il y a sommation sur cet indice.

exemples :

Le vecteur \underline{u} peut s'écrire $u_i \underline{e}_i$.

Le produit scalaire $\underline{a} \cdot \underline{b}$ peut s'écrire $a_i b_i$.

Le produit de matrices $AX = Y$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ a pour terme général $Y_i = A_{ij} X_j$. On dit parfois que i est un indice libre (ou franc) et j est un indice muet.

1.1 Définitions générales

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie. On appelle tenseur d'ordre n une forme n -linéaire sur E , c'est-à-dire une application de E^n dans \mathbb{R} qui est linéaire par rapport à chacun de ses n arguments.

1.1.1 Tenseurs d'ordre 1

Etant de dimension finie, E est isomorphe à son dual E^* . Ainsi, au vecteur \underline{a} , il est possible d'associer la forme linéaire a^* telle que $(\forall \underline{u}) a^*(\underline{u}) = \underline{a} \cdot \underline{u}$. Grâce à cet isomorphisme, on convient d'identifier le vecteur \underline{a} et la forme linéaire a^* , de sorte que les vecteurs peuvent être considérés comme des tenseurs d'ordre 1.

C'est pourquoi on adopte la convention de les noter de la même façon, par une lettre soulignée une fois¹. Dans le même esprit, on pourra souligner² n fois la lettre désignant un tenseur d'ordre n .

1.1.2 Produit tensoriel

Etant donnés deux tenseurs \mathcal{T} et \mathcal{T}' d'ordres respectifs p et q , on appelle produit tensoriel de \mathcal{T} et \mathcal{T}' et l'on note $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'$ le tenseur d'ordre $p + q$ défini par :

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p, \underline{u}_{p+1}, \dots, \underline{u}_{p+q}) = \mathcal{T}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p) \mathcal{T}'(\underline{u}_{p+1}, \dots, \underline{u}_{p+q}) \quad (1.1)$$

L'extension au produit tensoriel de n tenseurs est immédiate. Ainsi, on appelle produit tensoriel des n vecteurs \underline{a}_i le tenseur d'ordre n suivant :

$$\underline{a}_1 \otimes \dots \otimes \underline{a}_n(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n) = (\underline{a}_1 \cdot \underline{u}_1) \times \dots \times (\underline{a}_n \cdot \underline{u}_n) \quad (1.2)$$

1.1.3 Contraction d'un tenseur selon un couple d'indices

Soit \mathcal{T} un tenseur d'ordre p . On appelle contraction de \mathcal{T} selon ses deux derniers indices le tenseur \mathcal{T}^c d'ordre $p - 2$ défini de la façon suivante :

$$\mathcal{T}^c(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{p-2}) = \mathcal{T}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{p-2}, \underline{e}_i, \underline{e}_i) \quad (1.3)$$

On vérifie sans peine (exercice 1.6.1) que cette définition est indépendante du choix de la base (\underline{e}_i) . En modifiant la place des \underline{e}_i dans le p -uplet, il est évidemment possible de contracter \mathcal{T} selon un couple arbitraire d'indices.

A titre d'exemple, la contraction du produit tensoriel $\underline{a} \otimes \underline{b}$ selon ses deux indices n'est autre que le produit scalaire de ces vecteurs :

$$\underline{a} \otimes \underline{b}(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = a_i b_i = \underline{a} \cdot \underline{b} \quad (1.4)$$

1.2 Tenseurs d'ordre 2

1.2.1 Matrice d'un tenseur d'ordre 2

Les tenseurs d'ordre 2 sont les formes bilinéaires sur E . On convient de souligner 2 fois la lettre désignant un tenseur d'ordre 2. La matrice du tenseur $\underline{\underline{T}}$ dans la base (\underline{e}_i) est une matrice carrée de terme général

$$T_{ij} = \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j) \quad (1.5)$$

1. Cette convention remplace la notation des vecteurs par une lettre surmontée d'une flèche.
2. Cette convention peut évidemment alourdir l'écriture. On ne l'utilisera ici que pour $n \leq 2$.

où $\underline{T}(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$ est le scalaire obtenu en appliquant la forme bilinéaire \underline{T} au couple de vecteurs $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$. En vertu de la linéarité de \underline{T} par rapport à chacun de ses arguments, on note que

$$\underline{T}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{T}(u_i \underline{e}_i, v_j \underline{e}_j) = T_{ij} u_i v_j \quad (1.6)$$

On note $\underline{\delta}$ le tenseur dont la matrice a pour terme d'indice ij le symbole de Kronecker δ_{ij} . D'après (1.6), le tenseur $\underline{\delta}$ n'est autre que le produit scalaire :

$$\underline{\delta}(\underline{u}, \underline{v}) = \delta_{ij} u_i v_j = \underline{u} \cdot \underline{v} \quad (1.7)$$

${}^t \underline{T}$ désigne le transposé du tenseur \underline{T} défini de la façon suivante :

$${}^t \underline{T}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{T}(\underline{v}, \underline{u}) \quad (1.8)$$

D'après (1.5), on observe que les matrices de \underline{T} et ${}^t \underline{T}$ sont transposées l'une de l'autre. Un tenseur d'ordre 2 est dit symétrique (resp. antisymétrique) s'il vérifie $\underline{T} = {}^t \underline{T}$ (resp. $\underline{T} = -{}^t \underline{T}$).

Le produit tensoriel des deux vecteurs \underline{a} et \underline{b} , noté $\underline{a} \otimes \underline{b}$, constitue un exemple important de tenseur d'ordre 2. Conformément à la définition (1.2), on a :

$$(\forall \underline{u})(\forall \underline{v}) \quad \underline{a} \otimes \underline{b}(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{a} \cdot \underline{u})(\underline{b} \cdot \underline{v}) \quad (1.9)$$

Il résulte immédiatement de (1.5) que le terme général de la matrice de $\underline{a} \otimes \underline{b}$ est égal à $a_i b_j$. En particulier, le terme d'indice ij de la matrice de $\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta$ est le scalaire $\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta}$.

Partant de (1.6) et compte tenu de (1.9), nous obtenons :

$$\underline{T}(\underline{u}, \underline{v}) = T_{ij} u_i v_j = (T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)(\underline{u}, \underline{v}) \quad (1.10)$$

La famille des produits tensoriels $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ constitue donc une base¹ de l'espace des tenseurs d'ordre 2 :

$$\underline{T} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.11)$$

1.2.2 Endomorphisme associé à un tenseur d'ordre 2

Au tenseur \underline{T} , on associe l'endomorphisme T de même matrice. On a donc :

$$T(\underline{e}_j) = T_{ij} \underline{e}_i \quad (1.12)$$

On vérifie alors sans peine que

$$\underline{T}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot T(\underline{v}) \quad (1.13)$$

1. D'après (1.10), la famille en question est manifestement génératrice. On vérifiera sans peine qu'elle est libre.

On définit par ce procédé un isomorphisme de l'espace des tenseurs d'ordre 2 sur l'espace des endomorphismes de l'espace vectoriel E . Cet isomorphisme permet d'étendre aux tenseurs certains concepts propres aux endomorphismes, tels que l'inverse, le déterminant, la trace ...

Lorsque T est inversible, on appelle inverse du tenseur $\underline{\underline{T}}$, et l'on note $\underline{\underline{T}}^{-1}$, le tenseur associé à l'endomorphisme T^{-1} .

On appelle déterminant (resp. trace) du tenseur $\underline{\underline{T}}$, et l'on note $\det \underline{\underline{T}}$ (resp. $\text{tr} \underline{\underline{T}}$) le déterminant (resp. la trace) de l'endomorphisme associé :

$$\det \underline{\underline{T}} = \det T \quad ; \quad \text{tr} \underline{\underline{T}} = \text{tr} T \quad (1.14)$$

On remarque que l'endomorphisme associé au tenseur $\underline{\underline{\delta}}$ (voir (1.7)) n'est autre que l'identité de l'espace vectoriel.

1.2.3 Contractions d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur

On appelle produit contracté de $\underline{\underline{T}}$ et \underline{v} et l'on note $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}$ le vecteur¹ obtenu en contractant $\underline{\underline{T}} \otimes \underline{v}$ selon les deux derniers indices. En utilisant l'équivalence vecteur-tenseur d'ordre 1 et la définition (1.3), on obtient :

$$\begin{aligned} (\forall \underline{u}) \quad \underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) &= (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v})(\underline{u}) = \underline{\underline{T}} \otimes \underline{v}(\underline{u}, \underline{e}_j, \underline{e}_j) = \\ &= \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{e}_j) \underline{v} \cdot \underline{e}_j = u_i T_{ij} v_j = \underline{u} \cdot T(\underline{v}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Il en résulte que

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = T(\underline{v}) \quad (1.16)$$

En comparant (1.13) et (1.15), on observe en outre que

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) \quad (1.17)$$

Par exemple, dans le cas particulier $\underline{\underline{T}} = \underline{a} \otimes \underline{b}$, (1.17) s'écrit²

$$(\underline{a} \cdot \underline{u})(\underline{b} \cdot \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v}) \quad (1.18)$$

On en déduit que

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v} = \underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{v}) \quad (1.19)$$

On appelle produit contracté de \underline{v} et de $\underline{\underline{T}}$ et l'on note $\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}}$ le vecteur obtenu en contractant $\underline{v} \otimes \underline{\underline{T}}$ selon les deux premiers indices :

$$(\forall \underline{u}) \quad (\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \underline{u} = \underline{v} \otimes \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_i, \underline{u}) = v_i \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{u}) = v_i T_{ij} u_j = \underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u}) = {}^t \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) \quad (1.20)$$

1. Respectivement le tenseur d'ordre 1.

2. Dans la notation $\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v}$ du produit contracté de $\underline{a} \otimes \underline{b}$ et \underline{v} , il n'y a pas d'ambiguïté étant donné que le produit tensoriel lie les vecteurs \underline{a} et \underline{b} .

L'application de (1.17) à ${}^t\underline{\underline{T}}$ donne

$${}^t\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot ({}^t\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) \quad (1.21)$$

En utilisant ce résultat dans (1.20), on a finalement :

$$\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}} = {}^t\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} \quad (1.22)$$

On déduit au passage de (1.19) et de (1.22) que

$$\underline{v} \cdot \underline{a} \otimes \underline{b} = (\underline{v} \cdot \underline{a})\underline{b} \quad (1.23)$$

En rapprochant (1.17) et (1.22), on observe que l'on a :

$$\underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = {}^t\underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u}) = \underline{v} \cdot ({}^t\underline{\underline{T}} \cdot \underline{u}) = (\underline{u} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \underline{v} \quad (1.24)$$

En définitive, l'ordre des parenthèses étant indifférent, on choisit de noter $\underline{u} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}$ le scalaire $\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v})$:

$$\underline{u} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) = (\underline{u} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \underline{v} \quad (1.25)$$

1.2.4 Contractions de deux tenseurs d'ordre 2

Soient $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}'}$ deux tenseurs d'ordre 2 associés respectivement aux endomorphismes T et T' . On appelle produit contracté de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}'}$ et l'on note $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}'}$ le tenseur d'ordre 2 obtenu en contractant $\underline{\underline{T}} \otimes \underline{\underline{T}'}$ selon les indices 2 et 3. On a donc

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}'}(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \underline{\underline{T}} \otimes \underline{\underline{T}'}(\underline{e}_i, \underline{e}_k, \underline{e}_k, \underline{e}_j) = T_{ik}T'_{kj} \quad (1.26)$$

La matrice de $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}'}$ ayant pour terme d'indice ij le scalaire $T_{ik}T'_{kj}$, $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}'}$ est donc le tenseur associé à l'endomorphisme $T \circ T'$. En particulier, étant associé à l'endomorphisme identité de l'espace vectoriel, le produit $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1}$ n'est autre que le produit scalaire :

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{\delta}} \quad (1.27)$$

$\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}}^{-1}$ sont donc inverses pour le produit contracté des tenseurs d'ordre 2.

À titre d'exemple, considérons le produit contracté des tenseurs $\underline{a} \otimes \underline{b}$ (terme général $a_i b_j$) et $\underline{c} \otimes \underline{d}$ (terme général $c_i d_j$). D'après (1.26), le terme d'indice ij de la matrice de $\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{c} \otimes \underline{d}$ est $a_i b_k c_k d_j$, soit $(\underline{b} \cdot \underline{c})a_i d_j$. On a donc :

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{c} \otimes \underline{d} = (\underline{b} \cdot \underline{c}) \underline{a} \otimes \underline{d} \quad (1.28)$$

1.2.5 Double contraction de deux tenseurs d'ordre 2

On appelle produit doublement contracté de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}'}$ et l'on note $\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}'}$ le scalaire obtenu en contractant $\underline{\underline{T}} \otimes \underline{\underline{T}'}$ selon les couples d'indices (2,3) et (1,4) :

$$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}'} = \underline{\underline{T}} \otimes \underline{\underline{T}'}(\underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_j, \underline{e}_i) = T_{ij}T'_{ji} \quad (1.29)$$

On observe que $\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}'}$ n'est autre que la trace du produit contracté $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}'}$. La double contraction des tenseurs d'ordre 2 est donc une opération commutative :

$$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}'} = \text{tr} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}'} = \underline{\underline{T}'} : \underline{\underline{T}} \quad (1.30)$$