

# 24 JOURS

pour préparer l'oral du concours

# CCINP (ex CCP) MATHÉMATIQUES

2<sup>e</sup> ÉDITION  
ACTUALISÉE

Walter DAMIN



Filière  
**PC**

- Un **planning optimisé** pour réviser l'ensemble du programme
- Une **sélection d'exercices** les plus représentatifs du concours
- Les **sujets décryptés** afin d'évaluer les points critiques
- Des **corrigés détaillés** avec des extraits des rapports du jury
- Les **méthodes et formules** à retenir





**CCINP (ex CCP)**  
**MATHÉMATIQUES**  
Filière **PC**

2<sup>e</sup> ÉDITION ACTUALISÉE



24 JOURS

pour préparer l'oral du concours

*collection dirigée par Karine Beurpère*

**CCINP (ex CCP)**  
**MATHÉMATIQUES**  
**Filière PC**

2<sup>e</sup> ÉDITION ACTUALISÉE

Walter DAMIN

*Professeur au lycée Pierre-Paul Riquet  
à Saint-Orens-de-Gameville*



Dans la collection **24 jours pour préparer l'oral**

*dirigée par* Karine Beurpère

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits  
sur [www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)



ISBN 9782340-051652

©Ellipses Édition Marketing S.A., 2018  
32, rue Bague 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

[www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)

# Présentation de la collection

Réussir ses oraux aux concours des Grandes Écoles nécessite une bonne organisation. Mais il existe une période pendant laquelle les étudiants sont parfois un peu désorientés : le mois généralement accordé entre le passage des écrits et celui des oraux.

En effet, durant cette période, les étudiants doivent souvent faire face aux deux grandes interrogations suivantes :

- quels exercices travailler pour être sûr d'avoir revu l'intégralité du programme ?
- quelle méthode efficace utiliser pour bien travailler ces différents exercices ?

Il est à noter que la première question relève d'une double problématique, à la fois qualitative mais aussi quantitative.

J'ai donc conçu cette collection pour répondre à ces deux questions en construisant bien évidemment chaque ouvrage autour d'une matière donnée pour un concours bien précis d'une certaine filière.

Tout d'abord, chaque ouvrage de la collection donne naissance à l'étude de 24 sujets, et **24 sujets seulement**, qui correspondent tous à des épreuves orales posées ces dernières années. Les auteurs de la collection, tous professionnels de la préparation aux concours, ont **méticuleusement sélectionné** ces 24 sujets afin de **garantir des révisions efficaces de l'ensemble d'un programme donné**. De plus, pour optimiser encore davantage la qualité des révisions, les auteurs ont agencé ces 24 sujets de façon très réfléchie, de sorte qu'un même thème soit revu plusieurs fois à des moments bien différents.

Ensuite, chaque ouvrage propose la même **approche très méthodique**. On se base sur 24 séances de travail réparties sur 4 semaines de 6 jours. Durant chaque séance, le candidat doit chercher, comme au concours, un sujet complet puis il consacre la fin de cette séance à une analyse minutieuse de tout l'ensemble du corrigé.

Les **24 sujets** sont toujours organisés de la façon suivante :

- une première **présentation du sujet** sous une forme identique à celle du concours ;
- une deuxième présentation de chaque exercice avec une **analyse stratégique de l'énoncé** ;
- un **corrigé très détaillé**, de telle sorte que la solution soit comprise de tous les étudiants ;
- des **techniques à mémoriser** ;
- un **formulaire** lié à l'exercice ;
- des **extraits pertinents des rapports de jurys**.

Travailler méthodiquement avec les ouvrages de cette collection, à la fois avant les oraux mais aussi plus régulièrement tout au long de l'année (en utilisant notamment les nombreux tableaux récapitulatifs des exercices), est donc l'assurance de se préparer efficacement aux oraux.

Alors, bon vent vers la réussite !

Karine Beurpère

# Sommaire

<b>Présentation du manuel</b> .....	<b>7</b>
<b>Conseils</b> .....	<b>11</b>
<b>Tableaux récapitulatifs des exercices</b> .....	<b>15</b>
<b>Jour n°1</b> .....	<b>17</b>
Énoncé de l'exercice 1.1 .....	18
Énoncé de l'exercice 1.2 .....	24
<b>Jour n°2</b> .....	<b>27</b>
Énoncé de l'exercice 2.1 .....	28
Énoncé de l'exercice 2.2 .....	33
<b>Jour n°3</b> .....	<b>39</b>
Énoncé de l'exercice 3.1 .....	40
Énoncé de l'exercice 3.2 .....	46
<b>Jour n°4</b> .....	<b>49</b>
Énoncé de l'exercice 4.1 .....	50
Énoncé de l'exercice 4.2 .....	56
<b>Jour n°5</b> .....	<b>59</b>
Énoncé de l'exercice 5.1 .....	60
Énoncé de l'exercice 5.2 .....	69
<b>Jour n°6</b> .....	<b>73</b>
Énoncé de l'exercice 6.1 .....	74
Énoncé de l'exercice 6.2 .....	79
<b>Jour n°7</b> .....	<b>81</b>
Énoncé de l'exercice 7.1 .....	82
Énoncé de l'exercice 7.2 .....	87
<b>Jour n°8</b> .....	<b>91</b>
Énoncé de l'exercice 8.1 .....	92
Énoncé de l'exercice 8.2 .....	96
<b>Jour n°9</b> .....	<b>99</b>
Énoncé de l'exercice 9.1 .....	100
Énoncé de l'exercice 9.2 .....	107
<b>Jour n°10</b> .....	<b>109</b>
Énoncé de l'exercice 10.1 .....	110
Énoncé de l'exercice 10.2 .....	114
<b>Jour n°11</b> .....	<b>119</b>
Énoncé de l'exercice 11.1 .....	120
Énoncé de l'exercice 11.2 .....	125

<b>Jour n°12</b> . . . . .	<b>129</b>
Énoncé de l'exercice 12.1 . . . . .	130
Énoncé de l'exercice 12.2 . . . . .	135
<b>Jour n°13</b> . . . . .	<b>137</b>
Énoncé de l'exercice 13.1 . . . . .	138
Énoncé de l'exercice 13.2 . . . . .	146
<b>Jour n°14</b> . . . . .	<b>149</b>
Énoncé de l'exercice 14.1 . . . . .	150
Énoncé de l'exercice 14.2 . . . . .	158
<b>Jour n°15</b> . . . . .	<b>161</b>
Énoncé de l'exercice 15.1 . . . . .	162
Énoncé de l'exercice 15.2 . . . . .	167
<b>Jour n°16</b> . . . . .	<b>173</b>
Énoncé de l'exercice 16.1 . . . . .	174
Énoncé de l'exercice 16.2 . . . . .	181
<b>Jour n°17</b> . . . . .	<b>183</b>
Énoncé de l'exercice 17.1 . . . . .	184
Énoncé de l'exercice 17.2 . . . . .	188
<b>Jour n°18</b> . . . . .	<b>193</b>
Énoncé de l'exercice 18.1 . . . . .	194
Énoncé de l'exercice 18.2 . . . . .	200
<b>Jour n°19</b> . . . . .	<b>203</b>
Énoncé de l'exercice 19.1 . . . . .	205
Énoncé de l'exercice 19.2 . . . . .	213
<b>Jour n°20</b> . . . . .	<b>215</b>
Énoncé de l'exercice 20.1 . . . . .	216
Énoncé de l'exercice 20.2 . . . . .	228
<b>Jour n°21</b> . . . . .	<b>233</b>
Énoncé de l'exercice 21.1 . . . . .	234
Énoncé de l'exercice 21.2 . . . . .	238
<b>Jour n°22</b> . . . . .	<b>241</b>
Énoncé de l'exercice 22.1 . . . . .	242
Énoncé de l'exercice 22.2 . . . . .	248
<b>Jour n°23</b> . . . . .	<b>251</b>
Énoncé de l'exercice 23.1 . . . . .	252
Énoncé de l'exercice 23.2 . . . . .	257
<b>Jour n°24</b> . . . . .	<b>261</b>
Énoncé de l'exercice 24.1 . . . . .	262
Énoncé de l'exercice 24.2 . . . . .	267
<b>Formulaire à compléter et derniers extraits de rapports</b> . . . . .	<b>271</b>

# Présentation du manuel

Ce manuel a pour but de vous préparer efficacement aux oraux de mathématiques du Concours Commun INP (ex CCP) option PC.

Pour commencer, rappelons le déroulement des oraux de mathématiques au CCINP (ex CCP), comme le stipule le rapport du concours 2017 :

## Rapport du jury 2017

L'épreuve orale de mathématiques comporte deux exercices.

L'énoncé du premier exercice est remis au candidat lors de son entrée dans la salle d'interrogation. Pour le résoudre, le candidat dispose d'environ trente minutes de préparation écrite et de vingt minutes d'exposé oral. Ce temps écoulé, un second exercice est donné au candidat qui dispose alors pour sa résolution d'environ dix minutes d'exposé oral.

Le premier exercice, que nous appellerons l'exercice majeur, est noté sur 14 points. Il est issu d'une banque d'exercices et est posé au même moment, par tous les examinateurs, à tous les candidats ayant le même horaire de passage. Pour ce qui est de cet exercice majeur, l'objectif est de produire des énoncés progressifs, comportant plusieurs questions, en évitant celles qui sont bloquantes. Le but est clairement de permettre à un candidat correctement préparé d'utiliser efficacement le temps de préparation écrite qui lui est alloué. La banque d'exercices est bien sûr modifiée chaque année et les exercices qui la constituent abordent toutes les parties du programme de première année et de seconde année.

Le second exercice, quant à lui, est noté sur 6 points. Comme l'exercice majeur, il est issu d'une banque d'exercices. Contrairement à l'exercice majeur qui est choisi par le coordonnateur de l'épreuve, le choix de ce second exercice est laissé à l'examineur. Des candidats ayant le même horaire de passage ont donc le même exercice majeur mais pas nécessairement le deuxième exercice. Ce second exercice ne bénéficie pas d'un temps de préparation écrite. Il porte sur des thèmes distincts de ceux abordés dans l'exercice majeur, ce qui permet une évaluation des compétences du candidat sur un spectre suffisamment large.

L'originalité de ce manuel provient de la préparation méthodique à réaliser durant le mois généralement accordé entre les écrits et les oraux du Concours Commun INP (ex CCP).

Le principe est le suivant.

On se base sur 4 semaines de révision, à raison de 6 jours de travail par semaine et d'une heure par jour de travail, en plus bien évidemment du travail à réaliser au lycée pendant cette période. Durant cette heure, vous devrez travailler, comme au concours, un sujet composé de 2 exercices. Il est évident que l'on doit vous fournir ici les deux exercices car vous n'allez pas inventer le second vous-même, les deux exercices que l'on vous propose dans chaque planche ont été généralement réellement couplés. Ainsi pendant une première durée de 30 minutes, vous allez chercher la solution du premier exercice puis vous consacrerez environ 20 minutes à une analyse

minutieuse du corrigé du premier exercice puis les 10 minutes restantes à la recherche de la solution du second exercice et à l'étude de son corrigé si nécessaire.

Concrètement, cela signifie que vous devrez suivre, jour après jour, le planning qui vous est proposé ici. Le premier jour de révision, vous vous attaquerez au « Jour n°1 », etc. jusqu'au « Jour n°24 ». Vous aurez alors traité 24 sujets, c'est-à-dire 48 exercices.

Ces sujets sont tous des sujets tombés aux oraux du Concours Commun INP (ex CCP) entre les années 2007 et 2016. Ils sont tous conformes au programme officiel en vigueur depuis 2014 en Mathématiques dans la filière PC. Attention, même si dans le rapport on ne le dit pas mais un grand nombre de ces sujets sont reposés pratiquement dans l'état d'une année sur l'autre.

Ici, on ne vous présente qu'une sélection de sujets. Il est clair que l'on ne peut pas donner tous les sujets posés une année, ni même s'en approcher. De toute façon, cela ne serait pas très productif. Il fallait donc faire un choix. D'autant que vous devez préparer plusieurs oraux (de différentes matières) dans un temps assez court. Soulignons donc que la sélection des sujets proposés ici résulte d'un travail réfléchi vous permettant d'optimiser votre préparation aux oraux. En effet, ces sujets ont été choisis de telle sorte que vos révisions vous permettent d'aborder tous les thèmes du programme ainsi que les situations les plus classiques auxquelles vous pouvez être confronté à l'oral.

Je tiens aussi à souligner que l'ordre choisi pour ces 24 sujets, fruit d'une mûre réflexion, vous permet de revoir en permanence les thèmes majeurs du programme. Le but est ici d'éviter de travailler ces thèmes les uns après les autres. Cette approche pourrait en effet s'avérer négative puisqu'à la fin des 4 semaines de révision, le premier thème révisé serait déjà bien loin.

Chaque jour de révision est construit de la façon suivante.

Une première page comporte les deux sujets à travailler : dans sa forme, cette page est similaire à celle que vous aurez le jour de l'oral au détail près que ce jour-là, vous n'aurez que le sujet de l'exercice majeur (le premier). Ici, par nécessité, on vous fournit le premier énoncé et le second et à vous de jouer le jeu !

Les pages suivantes vont vous permettre d'entrer plus dans le détail.

Je tiens de suite à insister sur le fait qu'un corrigé seul ne sert à pas grand chose. Il est effectivement inutile à l'étudiant qui sait faire l'exercice mais il est tout aussi inutile à l'étudiant qui ne sait pas le faire puisque c'est l'analyse du problème qui est avant tout essentielle. C'est ce qui explique les différentes parties qui vont être exposées ci-après.

Voici donc le schéma adopté pour chacun des deux exercices :

On commence par donner l'année à laquelle l'exercice est tombé ainsi que le niveau de l'exercice. Le codage du niveau est le suivant :

- ♣ exercice facile qu'il faut savoir traiter rapidement ;
- ♣ ♣ exercice de niveau moyen pouvant comporter des questions un peu délicates ;
- ♣ ♣ ♣ exercice comportant des questions particulièrement difficiles.

La suite se découpe selon les 5 parties suivantes.

### Énoncé

L'énoncé de l'exercice est redonné afin de faciliter la compréhension de l'analyse à venir. Cela évite en effet de revenir en arrière pour relire l'énoncé.

### Analyse stratégique de l'énoncé

Cette partie commence par présenter l'objet de l'exercice.

Puis l'analyse de l'énoncé se fait question par question. Il s'agit alors de comprendre la question posée et de voir comment démarrer efficacement sur cette question.

On pourra trouver ici des extraits de rapports de jurys. Ces extraits sont extrêmement importants car ils mettent en avant ce qui est véritablement attendu au concours.

Il est bon de commencer par lire cette partie avant de lire le corrigé « technique » qui va suivre afin de bien analyser les processus conduisant à la solution à venir.

↔ Une conclusion vient ensuite mettre en avant l'essentiel de cette question.

### Corrigé

Cette partie correspond bien évidemment au corrigé de l'exercice. Ce corrigé est très détaillé afin de permettre une compréhension rapide. Il est aussi agrémenté de nombreux commentaires provenant des rapports de jurys.

Attention! Le corrigé donné ici n'est pas une planche optimisée. En effet, toutes les preuves sont volontairement très (trop!) détaillées afin qu'il n'y ait pas de point laissé dans l'obscurité mais à l'oral, prenez l'initiative d'aller plus vite sur certaines questions. Au pire, l'examinateur vous demandera des précisions qu'il vous sera alors toujours possible de donner à ce moment-là.

### Techniques à mémoriser

Puisque ce qu'il faut retenir d'un exercice, ce sont avant tout les techniques qui ont été utilisées au cours de cet exercice, une partie complète liste l'ensemble des techniques à mémoriser issues de l'exercice étudié.

C'est pourquoi cette partie est construite avec une succession de phrases commençant par :

♥ Il faut se souvenir...

### Formulaire

Une dernière partie consiste à lister les formules majeures utilisées dans l'exercice.

Si vous suivez ce planning, vous aurez revu efficacement l'intégralité des thèmes du programme en ayant travaillé sur des sujets récents. C'est donc l'assurance d'une préparation aux oraux réussie.

Bien évidemment, l'oral ne se prépare pas qu'en fin d'année. C'est pourquoi vous pouvez travailler vos oraux tout au long de l'année en vous reportant aux tableaux récapitulatifs des exercices donnés en début d'ouvrage. Vous y trouverez alors les 48 exercices, classés par thèmes, que vous pourrez travailler tout au long de l'année. Les numéros des exercices sont fabriqués comme suit : le premier numéro renvoie au jour de préparation où se trouve l'exercice et le deuxième numéro renvoie à la place de cet exercice dans le couplage considéré. Par exemple, tout ce qui concerne l'exercice 3.2 se trouve en deuxième partie du « Jour n°3 ».

Vous trouverez aussi en fin d'ouvrage un formulaire pré-rempli, qu'il faudra compléter au fur et à mesure de votre travail. Ce formulaire est volontairement à remplir afin que vous le fassiez vivre. Un formulaire déjà complètement rédigé est souvent inutile car il est lu passivement sans réelle implication de la part de celui qui le lit, ce qui n'est pas le cas de celui qui rédige son propre formulaire.

Je tiens aussi à préciser que le formulaire final ne correspond pas à la réunion des 48 formulaires issus des exercices car le formulaire final se veut complet et exhaustif.

Enfin, le formulaire est agrémenté de quelques extraits de rapports afin que la rédaction de ce formulaire puisse se faire en ayant bien en tête les attentes du jury.

# Conseils

## Quelques conseils pour bien utiliser ce livre

L'idéal est de faire 2 études de ce livre.

La première étude est une étude de fond, qui commence dès le début de votre année scolaire. Dès qu'un chapitre se termine, travaillez minutieusement les exercices liés au chapitre en question : vous trouverez facilement les exercices de ce chapitre à partir des tableaux récapitulatifs. N'hésitez pas à faire vivre le livre en l'annotant. Toutefois, n'annotez pas les pages de couplages où figurent les 2 énoncés d'exercices d'un jour donné. Ces pages doivent en effet rester vierges pour être retravaillées plus tard, de façon tout à fait neutre.

La deuxième étude est une étude plus intense dans le temps, puisqu'il s'agit, pendant vos 24 jours de révision avant les oraux, de travailler attentivement les deux exercices du jour.

Le fait de travailler deux fois un même exercice n'est pas gênant et ces deux passages sur un même exercice peuvent même s'avérer très fructueux. Je m'explique.

La raison majeure qui pourrait être avancée pour ne faire qu'un seul passage est la suivante. Au deuxième passage, n'est-ce pas avant tout la mémoire qui va jouer ? La réponse est non, dans une large mesure, puisque les deux passages sont suffisamment éloignés dans le temps. Mais, même si la mémoire se met à jouer, cela signifie que l'on a retenu un principe important sur lequel on avait peut-être eu des difficultés la première fois. Bref, le travail fourni la première fois se consolide encore davantage la seconde fois.

Vous l'aurez sans doute remarqué, je suis adepte des passages multiples sur les mêmes notions. Pour la plupart d'entre vous, plusieurs passages sur un même concept sont effectivement nécessaires avant l'assimilation complète de ce concept. C'est pourquoi ce livre comporte plusieurs fois les mêmes commentaires de jurys, les mêmes techniques à retenir, les mêmes formules... Plus on pratique, plus on est à l'aise face à toutes les situations.

## Quelques conseils pour bien réussir son oral

Rappelez-vous qu'un oral est un échange avec l'examineur à l'issue duquel l'examineur va vous attribuer une note. Par ailleurs, il faut donner la meilleure image de soi lors de cette prestation.

### Rapport du jury 2016

Au niveau de l'exposé oral, il ne faut pas perdre de temps à reproduire lentement des calculs déjà effectués lors du temps de préparation écrite. L'intérêt du candidat est de présenter de manière précise, concise et rapide tout le travail effectué lors de la préparation écrite et de disposer ainsi d'un maximum de temps pour aborder des questions non traitées avec une aide éventuelle de l'examineur. Rappelons d'autre part que s'agissant d'un oral, il est inutile de recopier au tableau tout ce qui est dit. Il faut aussi insister sur l'importance qu'il y a à faire preuve d'énergie et de volontarisme. Même si la phase de préparation écrite ne s'est pas bien déroulée, tout est encore possible.

Plusieurs éléments entrent en ligne de compte dans l'appréciation de l'examineur.

Non seulement celui-ci évalue vos compétences mathématiques mais il va inconsciemment ou non apprécier d'autres qualités, et ce, dès le début de la planche. Voici, par ordre d'entrée en scène, les points essentiels, indépendants des mathématiques, que l'examineur va pouvoir apprécier :

- votre apparence extérieure (apportez un soin particulier à votre tenue vestimentaire) ;
- votre expression orale (veillez notamment à votre vocabulaire) ;
- votre capacité d'organisation (organisation du tableau, organisation du temps) ;
- votre capacité à prendre des initiatives ;
- votre enthousiasme, notamment votre volonté de présenter un maximum de résultats (n'hésitez pas à passer sur des questions si vous avez des choses à dire sur la fin d'un exercice) ;
- votre bon sens (signalez tout résultat aberrant sans attendre que l'examineur vous le fasse remarquer : par exemple, si vous trouvez une valeur négative à une intégrale qui ne peut être que positive, mentionnez que vous avez nécessairement fait une erreur et n'attendez pas que l'examineur vous le demande) ;
- votre capacité de dialogue avec l'examineur, notamment votre capacité à assimiler les indications fournies par l'examineur.

### Rapport du jury 2010

Quant à la forme, nous rappelons que la prestation orale est également évaluée ; il est donc conseillé de s'exprimer clairement, à haute et intelligible voix, à l'adresse de l'examineur.

Vous devez sortir de votre planche en vous disant que vous avez fait le maximum. Pensez bien qu'un tout petit plus par rapport à d'autres candidats peut s'avérer très payant !

Pour conclure, je vous invite à lire les introductions des différents rapports de jurys que l'on trouve sur le site du concours. Vous comprendrez alors ce que l'on attend de vous et vous assimilerez ainsi comment facilement faire de votre oral un véritable atout ! Un conseil : regardez aussi les rapports de jury des autres filières (en particulier MP et PSI). En effet, ces rapports sont très détaillés. Ils mettent en particulier en lumière les principaux domaines où les candidats ont le plus de difficulté et donnent

une liste assez longue et non exhaustive des âneries rencontrées.

De plus, la plupart des exercices posés dans ces deux filières peuvent l'être aussi au concours, en filière PC.

Je termine par un extrait très représentatif des rapports de jurys qui met en lumière l'importance d'une préparation à l'oral qui soit la plus complète possible.

#### Rapport du jury 2017

La stratégie qui consiste à faire des impasses lourdes sur certaines parties du programme n'est pas objectivement payante pour les candidats. Il est en effet important de rappeler que tous les exercices, qu'ils soient majeurs (sur 14 points) ou secondaires (sur 6 points), abordent **toutes** les parties du programme (première année et deuxième année).

Il y a donc des exercices (majeurs ou secondaires) traitant des fonctions de plusieurs variables, de géométrie différentielle, de polynômes, ou encore de nombres complexes. Ces exercices sont souvent volontairement plus faciles que les autres et un candidat qui maîtrise les définitions de base peut s'octroyer un nombre appréciable de points. Il y a aussi des exercices (majeurs ou secondaires) portant principalement sur le programme de **première année**. Il est donc très utile pour un candidat de consolider ses acquis antérieurs.

Juste un dernier mot pour adresser un message à ma femme, Isabelle, et mes deux fils, Guillaume et Gauthier, qui font toujours preuve de patience quant à mes longues périodes de rédactions de livres aux Éditions Ellipses et enfin aussi aux étudiants d'abord du lycée Déodat de Séverac puis maintenant du lycée Pierre-Paul Riquet qui ont testé ou testent certains de mes exercices ou problèmes.



# Tableaux récapitulatifs des exercices

Tableau récapitulatif des exercices d'Analyse

Numéros des exercices	Suites	Étude locale des fonctions	Intégrales définies ou généralisées	Équations différentielles linéaires
Exercice 1.2	•		•	
Exercice 3.1		•	•	
Exercice 4.2		•		
Exercice 5.1				•
Exercice 6.2	•		•	
Exercice 8.2				•
Exercice 9.1		•		
Exercice 10.2			•	
Exercice 11.1	•		•	
Exercice 12.2			•	
Exercice 17.2	•			
Exercice 19.1				•
Exercice 20.1	•	•	•	
Exercice 21.2	•	•	•	
Exercice 23.1	•	•		
Exercice 23.2				•
Exercice 24.1	•	•		

Numéros des exercices	Normes	Séries numériques	Suites et séries de fonctions	Fonctions de $\mathbb{R}^n$
Exercice 1.2			•	
Exercice 2.2			•	
Exercice 3.1			•	
Exercice 5.1			•	
Exercice 6.1				•
Exercice 7.2		•		
Exercice 11.1		•		
Exercice 14.2		•		
Exercice 15.2				•
Exercice 16.1	•			•
Exercice 17.2			•	
Exercice 18.1			•	•
Exercice 19.1			•	
Exercice 20.1		•	•	
Exercice 20.2			•	
Exercice 22.1			•	
Exercice 23.1			•	

### Tableau récapitulatif des exercices de Probabilités

Numéros des exercices	Dénombrements	Probabilités	V.A.R
Exercice 5.1	•	•	•
Exercice 11.2		•	•
Exercice 13.1	•	•	•
Exercice 18.2		•	
Exercice 19.2	•		
Exercice 20.2		•	•

### Tableau récapitulatif des exercices d'Algèbre

Numéros des exercices	Espaces vectoriels sans réduction	Espaces vectoriels avec réduction	Polynômes et complexes	Espaces euclidiens
Exercice 1.1	•			•
Exercice 2.1		•		
Exercice 3.2		•		
Exercice 4.1	•			
Exercice 5.2		•	•	
Exercice 6.1		•	•	•
Exercice 6.2			•	
Exercice 7.1	•		•	
Exercice 8.1		•	•	
Exercice 9.2	•			
Exercice 10.1		•		•
Exercice 12.1		•		•
Exercice 13.1		•		•
Exercice 13.2	•	•		
Exercice 14.1		•		•
Exercice 15.1	•			
Exercice 15.2				•
Exercice 16.1			•	
Exercice 16.2	•			
Exercice 17.1	•			
Exercice 18.2	•			
Exercice 21.1		•		
Exercice 22.2			•	
Exercice 23.2		•	•	
Exercice 24.2		•		

# Jour n°1

## Exercice 1.1

---

Soit  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et l'application :

$$\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (M, N) \mapsto \text{Tr}(t(M)N),$$

où  $\text{Tr}(M)$  désigne la trace de  $M$  et  $t(M)$  désigne la transposée de  $M$ .

- 1) Montrer que  $\phi$  est un produit scalaire.
- 2) a) Soit le sous-ensemble de  $E$  :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

b) Déterminer une base orthonormée de  $F^\perp$ .

c) Calculer la projection de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $F^\perp$ .

## Exercice 1.2

---

Démontrer l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

Énoncé

Soit  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et l'application :

$$\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (M, N) \mapsto \text{Tr}(t(M)N),$$

où  $\text{Tr}(M)$  désigne la trace de  $M$  et  $t(M)$  désigne la transposée de  $M$ .

- 1) Montrer que  $\phi$  est un produit scalaire.
- 2) a) Soit le sous-ensemble de  $E$  :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

b) Déterminer une base orthonormée de  $F^\perp$ .

c) Calculer la projection de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $F^\perp$ .

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice sur un produit scalaire un peu particulier qui fait intervenir trace et transposée de matrice mais c'est un produit scalaire qui revient très souvent dans les oraux. Ici, on vous simplifie les choses car  $n = 2$  mais il faut avoir conscience que vous pourriez avoir à traiter le cas général dans un autre sujet d'oral. Plus précisément, il s'agit dans cette planche de commencer par vérifier qu'on a bien affaire à un produit scalaire puis on étudie l'orthogonalité et plus particulièrement les projections orthogonales pour un tel produit scalaire. Ici attention, les vecteurs sont des matrices ce qui peut dérouter le novice.

1) Pour montrer que  $\phi$  est un produit scalaire, il faudra bien entendu montrer tous les points de la définition. Comme  $n = 2$ , on peut expliciter directement  $\phi(M, N)$  en fonction des coefficients de  $M$  et de  $N$  (c'est de toute façon utile pour montrer que  $\phi$  est une forme définie positive) mais pour montrer que  $\phi$  est bilinéaire symétrique, on peut utiliser des résultats sur la trace et la transposée de matrices (ce qui plaira à l'examineur). Rappelons pour cela au passage quelques résultats utiles du genre :

$$\forall (M, N) \in (M(\mathbb{R}))^2, \text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM) \text{ et } t(MN) = t(N)t(M).$$

Dans le corrigé, nous développerons d'ailleurs cette voie.

Rapport du jury 2009

La liste complète des propriétés définissant la notion de produit scalaire est parfois difficile à obtenir.

↔ Bien énumérer devant l'examineur toutes les propositions qui font de  $\phi$  un produit scalaire.

2) a) La seconde question ne pose aucune difficulté. Il y a deux méthodes : l'une, c'est la caractérisation d'un sous-espace vectoriel et l'autre, c'est ici d'explicitement deux matrices qui engendrent  $F$ .

↔ Si on applique la première méthode, ne pas oublier de commencer par vérifier que  $F$  est non vide ! Le principal conseil à donner, c'est de faire cette question avec soin ! Il faut gagner des points. Ce n'est pas parce que c'est facile qu'il faut oublier d'être rigoureux et précis.

b) Ici c'est plus délicat, on peut partir de la définition de l'orthogonal d'un sous-espace et utiliser une base de  $F$ . Attention, le procédé d'orthonormalisation de Schmidt n'est pas nécessairement obligatoire mais si vous l'utilisez, sachez la maîtriser.

Rapport du jury 2010

Nous rappelons cependant que les candidats sont interrogés sur l'ensemble du programme. Nous avons pu remarquer que certains points sont parfois mal maîtrisés, et par exemple, on peut citer l'utilisation de la méthode de Schmidt.

c) On écrit que pour toute matrice  $M$ , sa projection orthogonale sur  $F^\perp$  est donnée par :

$$p(M) = \phi(M, A_1)A_1 + \phi(M, A_2)A_2,$$

où  $\{A_1, A_2\}$  est une base orthonormale de  $F^\perp$ .

↔ Le lien entre les questions est souvent une aide, comme on a déterminé juste avant une base orthonormale de  $F^\perp$ , on se dit que cela doit servir et on pense alors à la formule que l'on vient de rappeler.

### Corrigé

1) Ici  $n = 2$  mais laissons  $n$  entier quelconque non nul dans le développement de la première question pour rendre l'exercice un peu plus général. Nous devons établir que  $\phi$  est un produit scalaire c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique dont la forme quadratique associée  $\Phi$  est définie positive. On peut expliciter directement  $\phi(M, N)$  en fonction des coefficients de  $M$  et de  $N$  mais nous ne le ferons volontairement qu'à l'étape  $\gamma$ ).

$\alpha$ ) Symétrie

Pour tout couple de matrices  $(M, N)$  carrées d'ordre  $n$ ,  $\phi(M, N)$

$$\begin{aligned} &= \text{Tr}[t(M)N] \\ &= \text{Tr}[Nt(M)] \text{ car } \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA), \forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2 \\ &= \text{Tr}[t(Nt(M))] \text{ car } \text{Tr}(t(A)) = \text{Tr}(A), \forall A \in M_n(\mathbb{R}) \\ &= \text{Tr}[Mt(N)] \text{ car } t(AB) = t(B)t(A), \forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2 \\ &= \text{Tr}[t(N)M] \text{ car } \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA), \forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2 \\ &= \phi(N, M). \end{aligned}$$

$\beta$ ) Linéarité

$\forall (M, N, P) \in (M_n(\mathbb{R}))^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \phi(\alpha M + P, N)$

$$\begin{aligned} &= \text{Tr}[t(\alpha M + P)N] \\ &= \alpha \text{Tr}[t(M)N] + \text{Tr}(t(P)N) \text{ car } \text{Tr}(\alpha A + B) = \alpha \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \\ &= \alpha \phi(M, N) + \phi(P, N). \end{aligned}$$

L'égalité :

$$\phi(M, \alpha P + N) = \alpha \phi(M, P) + \phi(M, N)$$

découle de la symétrie et de la première linéarité qu'on vient de démontrer.

$\gamma$ ) Forme quadratique définie positive

Ici les propriétés de la trace et de la transposée ne suffisent plus pour s'en sortir. Nous posons  $M = (m_{i,j})$  et  $N = (n_{i,j})$  deux matrices carrées d'ordre  $n$  alors la matrice  $t(M)N = (\alpha_{i,j})$  avec :

$$\forall (i, j) \in ([1, n])^2, \alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{k,i} n_{k,j}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\forall i \in [1, n], \alpha_{i,i} = \sum_{j=1}^n m_{j,i} n_{j,i}$$

et finalement :

$$\phi(M, N) = Tr[t(M)N] = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{j,i} n_{j,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{i,j} n_{i,j}.$$

Il reste à faire  $M = N$  et :

$$\Psi(M) = \phi(M, M) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{i,j}^2.$$

Nous en déduisons que  $\Psi(M) \geq 0$  et donc  $\Psi$  est une forme positive puis :

$$\Psi(M) = 0 \Leftrightarrow [m_{i,j}^2 = 0, \forall (i, j) \in ([1, n])^2]$$

c'est-à-dire :

$$\Psi(M) = 0 \Leftrightarrow [m_{i,j} = 0, \forall (i, j) \in ([1, n])^2] \Leftrightarrow M = O_{n,n},$$

où  $O_{n,n}$  est la matrice nulle carrée d'ordre  $n$ . Finalement :

$$\phi \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

**2) a)** Nous commençons par la première méthode.

Première étape

$F$  (qui est évidemment inclus dans  $E$ ) est non vide car par exemple la matrice nulle est dans  $F$  (prendre  $a = b = 0$ ).

Deuxième étape

Soit un réel  $\lambda$  et deux matrices  $M$  et  $M'$  de  $F$ . Il existe alors  $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$  tel que :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}.$$

Il reste à expliciter :

$$\lambda M + M' = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ -\lambda b - b' & \lambda a + a' \end{pmatrix}$$

et cette dernière matrice est bien dans  $F$ .

Attaquons la deuxième méthode. Si l'on pose :

La collection « 24 jours pour préparer l'oral » vous assurera des révisions solides entre les écrits et les oraux grâce au planning de travail fourni par les auteurs expérimentés, enseignants de classes préparatoires. Ce planning est fondé sur 24 séances de travail réparties sur 4 semaines de 6 jours. Durant chaque séance, vous pourrez vous exercer sur un sujet de type concours puis vous consacrer à une analyse minutieuse de tout l'ensemble du corrigé (analyse de l'énoncé, corrigé détaillé, techniques à mémoriser, formulaire et nombreux extraits des rapports de jurys).

Ces ouvrages vous permettront aussi, dès le début de la deuxième année de Prépas, de consolider les pratiques vues en classe.

## Pour une préparation efficace aux concours d'entrée dans les Grandes Écoles



9 782340 022805



www.editions-ellipses.fr