Sujet Agro-Véto (1) 2017

MATHÉMATIQUES
Méthodes de calcul et raisonnement
Durée : 2 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et, éventuellement, remplacera le sujet.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice A.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^2 et A^3.
3. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
   (a) Soit α, β et γ trois réels et $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}$.
   (b) Réciproquement, considérons a, b, c, d, e, f, g, h et i des réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Déterminer, en fonction des coefficients de M, trois réels α, β et γ tels que $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$.
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour appartenir à $\mathcal{S}$.

4. On considère $\mathcal{S}'$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$.
   (a) Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $M = PAP^{-1}$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.
   Dans la suite, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ sera assimilé à une matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de sorte que, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, le produit matriciel MX soit correctement défini.
   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
      i. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.
      On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique, c'est-à-dire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X \mapsto MX$.
      ii. Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que M^2X soit non nul.
      iii. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (X, MX, M^2X)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
      iv. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
      v. En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.
   (c) On cherche à généraliser ce qui a été montré dans la question précédente. Pour cela on considère $M \in \mathcal{S}'$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique.
      i. Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que M^2X soit non nul.
      ii. En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.
   (d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour appartenir à $\mathcal{S}'$.

Problème :

I. Préliminaires :
Soit n un entier non nul et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\} = [\![1, n]\!]$.

1. Donner, sans justifications, l'espérance de X.
2. Prouver par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. En déduire la variance de X.

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher.
On pose $N = N_1 + N_2$.
On répète l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne et l'on replace dedans deux boules de la couleur obtenue.
À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N + 1$ boules et l'on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N + 2$ boules et l'on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.

9782340-023888_001_552.indd 10 12/07/2019 13:16

Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k^{e} expérience. Pour tout k non nul, on note B_k l'évènement « la boule tirée lors de la k^{e} expérience est blanche ».

II. Étude d'un cas particulier :
On suppose ici que $N_1 = N_2 = 1$.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que X_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.
On pourra faire une récurrence et utiliser le système complet $((X_n = k))_{1 \leq k \leq n+1}$ *pour déterminer la loi de* X_{n+1}.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de B_{n+1}.
On pourra utiliser la question précédente et la formule des probabilités totales.
5. Pour tout entier n non nul, on considère la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{X_n - 1}{n}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de Y_n.
   (b) On considère F la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$. Rappeler, pour tout réel x, la valeur de $F(x)$.
   (c) Soit $x \in [0, 1]$.
   Prouver que, pour tout entier n, on a $P(Y_n \leq x) = \dfrac{1}{n+1} \lfloor nx + 1 \rfloor$, où l'on note $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière.
   (d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n.
   Déduire de ce qui précède, que pour tout réel x, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = F(x)$.

III. Retour au cas général :

1. Déterminer la probabilité des évènements B_1 et B_2.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1} = k) = (N + n - 1)P(B_n)$.
   (b) Soit $k \in [\![N_1, N_1 + n - 1]\!]$.
   Déterminer la probabilité de B_{n+1} sachant $B_n \cap (X_{n-1} = k)$ puis la probabilité de B_{n+1} sachant $\overline{B_n} \cap (X_{n-1} = k)$.
   (c) En déduire que $P(B_{n+1}) = P(B_n)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente la probabilité de B_n et l'espérance de X_n.

Indications Agro-Véto (1) 2017

Exercice.

Questions	**Indications**	**Sup' ?**
1.	La matrice est triangulaire inférieure ! Quelle est la dimension de $\mathrm{E}_0(A)$?	✗
2.		✓
3.(a)	Il suffit de vérifier que $AM = MA$.	✓
3.(b)	Utiliser le fait que $AM = MA$ et identifier les coefficients.	✓
3.(c)	Utiliser 3.(a) et 3.(b).	✓
4.(a)	Calculer M^2 et M^3.	✓
4.(b)i.	Calculer M^2 et M^3.	✓
4.(b)ii.	Il suffit de donner un exemple concret.	✓
4.(b)iii.	La famille contient trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3 !	✓
4.(b)iv.	Calculer les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ par l'application f.	✓
4.(b)v.	Les matrices M et A représentent la même application linéaire dans des bases différentes.	✗
4.(c)i.	On peut par exemple raisonner par l'absurde.	✓
4.(c)ii.	Reprendre les raisonnements des questions 4.(b)iii., 4.(b)iv. et 4.(b)v. dans ce cadre général.	✓
4.(d)	Utiliser les questions 4.(a) et 4.(c)ii. pour obtenir la condition nécessaire et suffisante.	✓

Problème

I. Préliminaires :

Questions	Indications	Sup' ?
1.	C'est une question de cours.	✓
2.		✓
3.	Utiliser la formule de Kœnig-Huygens et le théorème de transfert pour déterminer le moment d'ordre 2 de X.	✓

II. Étude d'un cas particulier :

Questions	Indications	Sup' ?
1.	Il s'agit d'une loi usuelle !	✓
2.	Expliciter les événements élémentaires liés à X_2 à l'aide des événements B_k ($k \in \mathbb{N}^*$) de l'énoncé.	✓
3.	Utiliser un raisonnement par récurrence en traitant séparément les valeurs extrêmes dans l'hérédité.	✓
4.	Utiliser la formule des probabilités totales.	✓
5.(a)	Tout s'obtient à l'aide de la loi de X_n.	✓
5.(b)	C'est du cours.	✗
5.(c)	Se ramener à une probabilité liée à X_n.	✓
5.(d)	Distinguer trois cas suivant les valeurs de x. Dans le cas où $x \in [0, 1]$, utiliser la question 5.(c) et encadrer la partie entière.	✗

III. Retour au cas général :

Questions	Indications	Sup' ?
1.	Pour B_2, utiliser la formule des probabilités totales.	✓
2.(a)	Utiliser la formule des probabilités totales avec le bon système complet d'événements.	✓
2.(b)	Bien interpréter les probabilités conditionnelles à calculer.	✓
2.(c)	Utiliser la formule des probabilités totales avec le bon système complet d'événements.	✓
3.	Utiliser la question 2.(c) pour $\mathrm{P}(B_n)$ puis la question 2.(a) pour l'espérance de X_n.	✓

9782340-023888_001_552.indd 14 12/07/2019 13:16

Corrigé Agro-Véto (1) 2017

Exercice :

1. La matrice A est triangulaire inférieure : ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi,

$$\boxed{A \text{ admet } 0 \text{ pour unique valeur propre}}$$

Notons $\mathrm{E}_0(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0 et déterminons une base de celui-ci. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x = y = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En posant $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la famille (V_1) est une famille génératrice de $\mathrm{E}_0(A)$ et comme elle est constituée d'un seul vecteur non nul, cette famille est libre. Il s'agit donc d'une base de $\mathrm{E}_0(A)$. Finalement,

$$\boxed{\text{une base de } \mathrm{E}_0(A) \text{ est } (V_1) \text{ où } V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

La matrice A est une matrice carrée d'ordre 3 et son unique sous-espace propre est de dimension 1 (donc la somme des dimensions des sous-espaces propres de A n'est pas égale à 3). Ainsi,

$$\boxed{\text{A n'est pas diagonalisable}}$$

9782340-023888_001_552.indd 15 12/07/2019 13:16

Commentaire

▷ Il est important ici de remarquer que la matrice est triangulaire pour obtenir directement ses valeurs propres. Pour une matrice triangulaire inférieure ou supérieure, les valeurs propres de la matrice sont les coefficients diagonaux.

▷ Lorsqu'une famille génératrice d'un espace vectoriel est composée d'un seul vecteur, il est essentiel de dire que ce vecteur est non nul pour justifier la liberté de la famille. Si la famille est composée de deux vecteurs, on regarde si les vecteurs sont colinéaires.

▷ Le rapport du Jury signale des confusions entre la notion de matrice inversible et celle de matrice diagonalisable. Le fait que 0 soit valeur propre de A indique que A n'est pas inversible (et cela n'a aucun lien avec la diagonalisabilité de A).

2. Par simple calcul, on a :

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \text{ est la matrice carrée nulle d'ordre 3}}$$

Commentaire

Ce type de question (calculatoire) est très facile.

3.(a) Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. En utilisant la distributivité de la multiplication matricielle par rapport à l'addition, on a d'une part :

$$\begin{aligned} MA &= (\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2)A \\ &= \alpha I_3 A + \beta AA + \gamma A^2 A \\ &= \alpha A + \beta A^2 + \gamma A^3 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} AM &= A(\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2) \\ &= \alpha A I_3 + \beta AA + \gamma AA^2 \\ &= \alpha A + \beta A^2 + \gamma A^3 \end{aligned}$$

On a bien l'égalité $AM = MA$, ce qui signifie que M appartient à $\mathcal{S}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \text{ si } M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 \text{ alors } M \in \mathcal{S}}$$

9782340-023888_001_552.indd 16 12/07/2019 13:16

Commentaire

Les matrices A et M commutent car M est un polynôme en la matrice A. On rappelle que le produit matriciel n'est pas commutatif (en général).

3.(b) Soient $(a,b,c,d,e,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^9$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Alors :

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

et :

$$MA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $M \in \mathcal{S}$, on a $AM = MA$ c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne, en identifiant les coefficients :

$$b = c = f = 0, \qquad a = e = i \qquad \text{et} \qquad d = h$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= aI_3 + dA + gA^2 \end{aligned}$$

d'après la question 2. Finalement,

$$\boxed{\text{en posant } \alpha = a,\ \beta = d \text{ et } \gamma = g, \text{ on a } M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2}$$

Commentaire

▷ La décomposition repose essentiellement sur une identification de coefficients de matrices. De plus, il n'est pas utile ici de raisonner par équivalences, des implications suffisent.

▷ Le rapport du Jury signale que la grande majorité des candidats partent de l'hypothèse que la matrice M s'exprime comme combinaison linéaire des matrices I_3, A et A^2 alors qu'il s'agit de l'objectif à atteindre. Il s'agit d'une grave erreur de logique.

9782340-023888_001_552.indd 17 12/07/2019 13:16