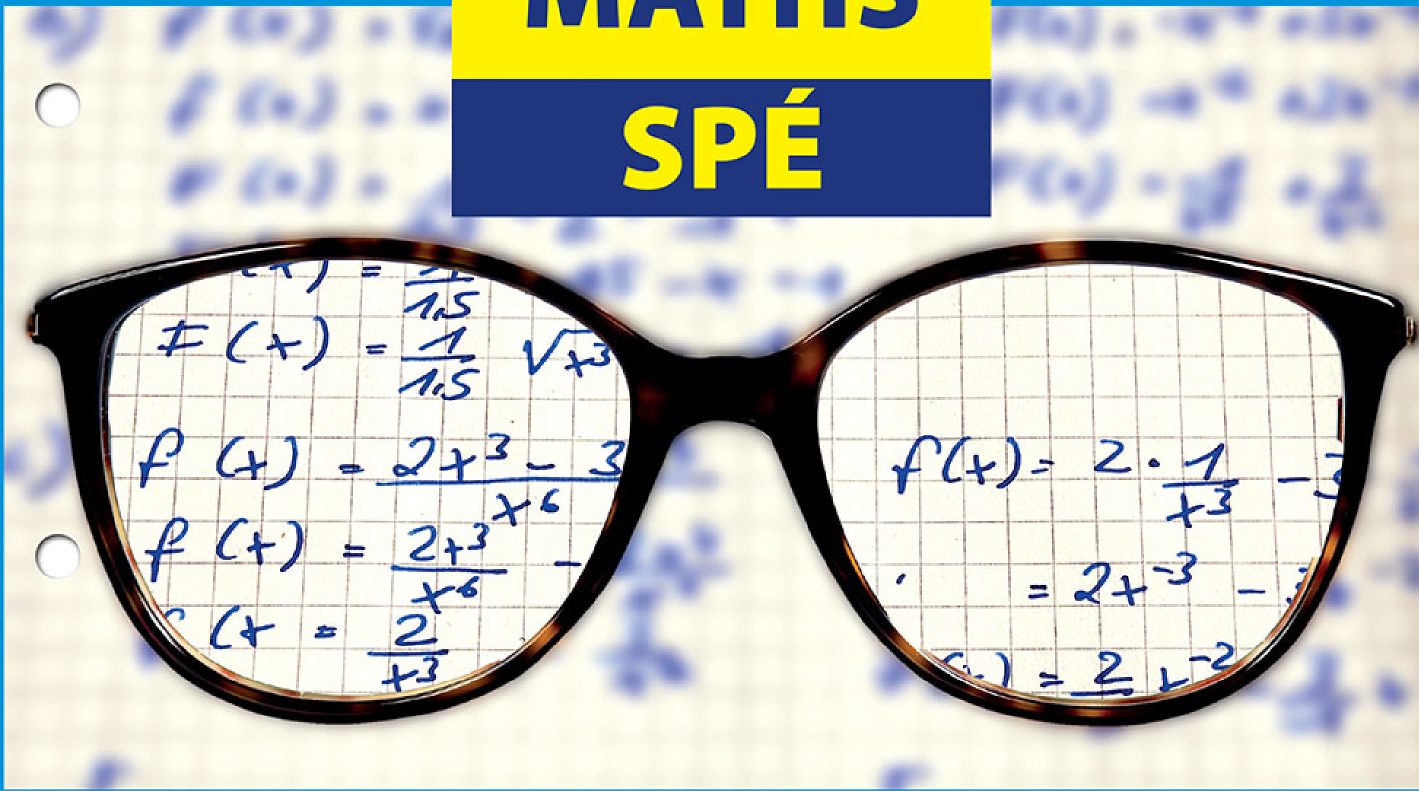
MATHS SPÉ



Sophie Dupuy-Touzet

12 FICHES TECHNIQUES ET EXERCICES DE BASE

MP-PC-PSI-PT

ellipses

MATHS

SPÉ

12 FICHES TECHNIQUES
ET EXERCICES DE BASE

MP – PC – PSI – PT

Sophie Dupuy-Touzet

ellipses

Du même auteur, chez le même éditeur

Maths Sup - 20 fiches techniques et exercices de base - MPSI, PCSI et PTSI, 396 pages, 2018

Maths - Prérequis pour la prépa - fiches de mise à niveau sur les techniques de calculs et exercices d'entraînement, 144 pages, 2018

Formaté typographiquement par DESK (53) :
02 43 01 22 11 – desk@desk53.com.fr

ISBN 9782340052055

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Chère lectrice, cher lecteur,

Plus encore que le programme de première année, le programme de deuxième année de classe préparatoire laisse très peu de temps à la pratique d'exercices techniques.

Dans ce domaine, **l'accumulation des lacunes peut très rapidement devenir un frein considérable** dans la résolution de problèmes de concours.

Heureusement, il n'est jamais trop tard pour agir !

Comme dans le livre de première année, je propose dans ce livre des fiches thématiques sur **les techniques et les connaissances de base**, pour travailler en autonomie, en amont d'exercices qui couvrent un champ plus large. Si vos difficultés remontent au programme de première année, voire aux années antérieures, je vous invite à commencer à travailler sur mon livre de première année.

Chaque fiche se décline en 3 temps :

- **Le temps de l'appropriation des méthodes**

  La partie « je vous montre comment » présente les méthodes travaillées dans la fiche, chacune étant illustrée par un exemple détaillé. Cette partie n'est évidemment pas exhaustive, et **elle fait délibérément l'impasse sur toutes les méthodes anecdotiques** qui ne servent que dans l'exemple qui les illustre ou dans de rares exercices !

- **Le temps de la pratique**

  La partie « À vous ! » propose d'enchaîner des exercices avec une **difficulté croissante**, sans sortir du cadre technique imposé par le thème. Ici encore, pas de singularité ou de problème qui nécessite une astuce. L'objectif est la **maîtrise des bases**, par la répétition. Le nécessaire, rien que le nécessaire !

- **Le temps de la correction**

  Chaque exercice qui a été donné est **corrigé en détail**. L'objectif n'est pas seulement de comprendre la correction, mais de parvenir à refaire seul les exercices. Alors, en cas d'erreur, même si vous comprenez la correction, refaites l'exercice !

Même si la charge de travail peut paraître considérable en deuxième année, il faut avoir conscience que l'on ne peut pas faire l'impasse de la maîtrise technique.

Bien au contraire, lorsque le calcul n'est plus un obstacle, l'apprentissage est plus rapide, et de meilleure qualité.

Avec ce livre, je vous propose d'acquérir les techniques de base, qui vous permettront de progresser rapidement, tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques.

Pour conclure, je tiens à remercier Corinne Baud, des éditions Ellipses, pour la confiance qu'elle m'a accordée, ainsi que Gilles Desclaux pour sa relecture.

Je dédie ce livre à Florent, pour sa patience et ses encouragements.

Table des matières

Réduction d'endomorphismes

Réduire un endomorphisme d'un espace vectoriel E consiste à déterminer une base de E dans laquelle l'expression de l'endomorphisme est plus simple.
La réduction d'endomorphismes trouve de nombreuses applications, tant en algèbre qu'en géométrie et en analyse (comme par exemple l'étude de suites récurrentes, la résolution de systèmes différentiels…).
Cette fiche aborde quelques cas en dimension infinie pour fixer la notion d'éléments propres, mais son principal objectif est la maîtrise de la réduction d'endomorphismes en dimension finie, c'est-à-dire la diagonalisation et la trigonalisation d'une matrice en dimension 2 et 3.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{K})$.

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et u un endomorphisme de E.

Notations :

On note χ_A le polynôme caractéristique de A, c'est-à-dire $\boxed{\chi_A = \det(X I_n - A)}$.
Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on note $m(\lambda)$ la multiplicité de la valeur propre λ, et $E_\lambda(A)$ l'espace propre associé à la valeur propre λ.

On utilise les mêmes notations pour les éléments propres d'un endomorphisme.

Je vous montre comment

■ Rechercher les éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Remarque : Il existe de nombreuses façons de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme. Nous nous contenterons ici des méthodes incontournables.

- En utilisant la définition :

Exemple 1

Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $u : P \mapsto P'$.

Réponse

$\left(\lambda \in \operatorname{Sp}(u)\right) \Leftrightarrow \left(\exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, P' = \lambda P\right)$.

En considérant les degrés des polynômes, il vient $\operatorname{Sp}(u) = \{0\}$, puis $E_0(u) = \operatorname{Vect}\left\{X^0\right\}$.

- À l'aide du polynôme caractéristique :

Exemple 2

Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse

- Déterminons le spectre de A :

$$\chi_A = \det(X I_2 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - 1 = (X-2)X .$$

On a donc : $\operatorname{Sp}(A) = \{0,2\}$.

> **Remarque :** La matrice A est clairement de rang 1, il est normal de trouver 0 comme valeur propre car A n'est pas inversible, donc $\det(A) = 0$.

- Déterminons les espaces propres :

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_0(A)\right) \Leftrightarrow (x+y=0) \text{ ; donc } E_0(A) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2x \\ x+y=2y \end{cases} \Leftrightarrow (x=y) \text{ ; donc } E_2(A) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

> **Remarque :** On peut également raisonner sur les matrices :

$$A - 0.I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } E_0(A) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\text{et } A - 2.I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } E_2(A) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

■ Diagonaliser une matrice *A*

1. On détermine le polynôme caractéristique de la matrice A (en simplifiant au maximum le calcul du déterminant pour pouvoir facilement factoriser le polynôme).
   - → Si le polynôme caractéristique n'est pas scindé, la matrice n'est pas diagonalisable.

→ Sinon, on obtient les valeurs propres de A (qui sont ses racines), ainsi que leurs multiplicités.

2. On détermine les espaces propres associés à chaque valeur propre λ, en résolvant des systèmes d'équations linéaires obtenus en écrivant $AX=\lambda X$ ou $\left(A-\lambda.\mathrm{I}_n\right)X=0$.

→ Si un espace propre n'a pas pour dimension la multiplicité de la valeur propre associée (si $\mathrm{rg}\left(A-\lambda.\mathrm{I}_n\right)>n-m(\lambda)$), la matrice n'est pas diagonalisable.

→ Sinon, $A=PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale ayant pour éléments diagonaux les valeurs propres écrites au nombre de leur multiplicité, et la matrice de passage P a pour vecteurs colonnes les vecteurs propres formant les bases des espaces propres, écrits dans le même ordre que les valeurs propres associées dans D.

Remarque : Si la matrice a une unique valeur propre λ et si elle est diagonalisable, elle s'écrit $P\left(\lambda I_n\right)P^{-1}$, c'est donc λI_n elle-même.
Sinon, si A est diagonalisable, il n'y a pas unicité de la matrice diagonale semblable à A, l'ordre d'écriture des valeurs propres étant quelconque !

Exemple 3

Diagonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$.

Réponse

• Déterminons le spectre de A :

$$\chi_A=\det\left(X\mathrm{I}_2-A\right)=\begin{vmatrix}X-1 & 1\\ 3 & X-3\end{vmatrix}=X(X-4).$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, A est donc diagonalisable.

• Déterminons les espaces propres :

$$\left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in E_0(A)\right)\Leftrightarrow(x-y=0)\ ;\text{donc } E_0(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in E_4(A)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=4x\\ -3x+3y=4y\end{cases}\Leftrightarrow(y=-3x)\ ;\text{donc } E_4(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}\right\}.$$

Finalement, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4\end{pmatrix}$.

Remarque : La matrice inverse de la matrice de passage n'est généralement pas demandée. Je la donne à titre indicatif, sans détailler son calcul qui n'est pas un objectif de cette fiche.

Exemple 4

Diagonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}$.

Réponse

Remarque : La troisième colonne est proportionnelle à la deuxième, le rang de la matrice est donc 2 et l'on va trouver 0 comme valeur propre. Le polynôme caractéristique va se factoriser simplement, on peut donc développer le déterminant directement (par exemple avec la méthode de Sarrus). On peut aussi chercher à le simplifier quand même !

• Déterminons le spectre de A :

$$\chi_A=\det(XI_3-A)=\begin{vmatrix}X-1 & -2 & 1\\ -3 & X+2 & -1\\ 0 & -4 & X+2\end{vmatrix}\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}X-2 & -2 & 1\\ X-2 & X+2 & -1\\ X-2 & -4 & X+2\end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=}(X-2)\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & X+4 & -2\\ 0 & -2 & X+1\end{vmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{on développe}\\ \text{suivant la première}\\ \text{colonne}}}(X-2)\begin{vmatrix}X+4 & -2\\ -2 & X+1\end{vmatrix}=(X-2)\left(X^2+5X\right)=(X-2)X(X+5).$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, la matrice est donc diagonalisable.

• Déterminons les espaces propres :

$$\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_2(A)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-z=2x\\ 3x-2y+z=2y\\ 4y-2z=2z\end{cases}\Leftrightarrow(x=y=z)\text{ ; donc }E_2(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_0(A)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-z=0\\ 3x-2y+z=0\\ 4y-2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ z=2y\end{cases}\text{ ; donc }E_0(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_{-5}(A)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-z=-5x\\ 3x-2y+z=-5y\\ 4y-2z=-5z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{12}z\\ y=-\dfrac{3}{4}z\end{cases}\text{ ; donc }E_{-5}(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}5\\ -9\\ 12\end{pmatrix}\right\}.$$

Remarque : Pour simplifier la forme de la matrice de passage, je prends un vecteur directeur de $E_{-5}(A)$ avec des coordonnées entières, mais ce n'est pas une obligation !

Finalement, $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 12 \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = \dfrac{1}{35}\begin{pmatrix} 30 & 10 & -5 \\ -21 & 7 & 14 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

■ Trigonaliser une matrice *A* dans $M_2(\mathbb{K})$

On suppose que $A \in M_2(\mathbb{K})$ est trigonalisable, mais non diagonalisable (c'est-à-dire $\chi_A = (X - \lambda)^2$ avec $\dim(E_\lambda) = 1$).

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

Soient $e_1 \in \mathbb{R}^2$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ (on a donc $u(e_1) = \lambda e_1$), et e_2 un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, non colinéaire à e_1.

En notant $u(e_2) = \alpha e_1 + \beta e_2$, on a : $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

La trace étant un invariant de similitude, on a $\mathrm{tr}(A) = 2\lambda = \lambda + \beta$, donc $\beta = \lambda$.

On détermine α en écrivant $u(e_2) - \lambda e_2 = \alpha e_1$.

Remarque : $\alpha \neq 0$ car A n'est pas diagonalisable, donc en prenant $e_1' = \alpha e_1 \in E_\lambda$, on a $\mathrm{Mat}_{(e_1',e_2)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$… C'est plus joli !

Exemple 5

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Réponse

- Déterminons le spectre de A :

$\chi_A = (X+1)^2$. A admet donc -1 pour unique valeur propre.

Le polynôme caractéristique est scindé, donc la matrice est trigonalisable.

Remarque : La matrice ne possédant qu'une seule valeur propre, elle ne peut pas être diagonalisable sinon elle serait de la forme λI_2.

- Déterminons l'espace propre :

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)\right) \Leftrightarrow (x=-y) \text{ ; donc } E_{-1}(A)=\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Remarque : $\dim\left(E_{-1}(A)\right) < m(-1)$, ce qui confirme que la matrice n'est pas diagonalisable.

Avec les notations précédentes, on prend : $e_1=(1,-1), e_2=(1,0)$.

On a : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\alpha=1$.

Finalement, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

■ Trigonaliser une matrice *A* dans $M_3(\mathbb{K})$

On suppose que *A* est trigonalisable, mais non diagonalisable (c'est-à-dire que son polynôme caractéristique est scindé, mais les espaces propres n'ont pas tous pour dimension la multiplicité de la valeur propre associée). On note *u* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à *A*.

▶ Si *u* a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, avec $m(\lambda_2)=2$:

On détermine $E_{\lambda_1}=\text{Vect}\{e_1\}$ et $E_{\lambda_2}=\text{Vect}\{e_2\}$ ($\dim\left(E_{\lambda_2}\right)=1$, sinon *A* serait diagonalisable).

On complète $\{e_1,e_2\}$ à l'aide d'un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour obtenir une base (e_1,e_2,e_3) ; on a alors : $\text{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

La trace étant un invariant de similitude, on a $\text{tr}(A)=\lambda_1+2\lambda_2=\lambda_1+\lambda_2+\gamma$, donc $\gamma=\lambda_2$.

On détermine α et β en résolvant : $u(e_3)-\lambda_2 e_3=\alpha e_1+\beta e_2$.

Remarque : En notant E_3 le vecteur des coordonnées de e_3 dans la base canonique, si on a déterminé P^{-1}, la formule de changement de base donne :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=P^{-1}AE_3.$$

Exemple 6

Trigonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Réponse

- Déterminons le spectre de A :

$$\chi_A=\begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ 0 & X-2 & -2 \\ 1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ X-2 & X-2 & -2 \\ 0 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{=} (X-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & X-3 & -1 \\ 0 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{on développe}\\ \text{suivant la}\\ \text{première colonne}}} (X-2)\begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix}=(X-2)^2(X-4).$$

Le polynôme caractéristique est scindé, donc A est trigonalisable.

- Déterminons les espaces propres :

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in E_4(A)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y+z=4x \\ 2y+2z=4y \\ -x+y+3z=4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=y \end{cases} \text{; donc } E_4(A)=\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in E_2(A)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y+z=2x \\ 2y+2z=2y \\ -x+y+3z=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases} \text{; donc } E_2(A)=\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

$\dim(E_2(A))\neq m(2)$, donc A n'est pas diagonalisable.

- Avec les notations précédentes, on prend : $e_1=(0,1,1)$, $e_2=(1,1,0)$, et $e_3=(1,0,0)$.

$$\det(e_1,e_2,e_3)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{\text{on développe}\\ \text{suivant la}\\ 3^{e}\text{ colonne}}} -1\neq 0 \text{, donc } (e_1,e_2,e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

On a : $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u)=\begin{pmatrix}4&0&\alpha\\0&2&\beta\\0&0&2\end{pmatrix}$, avec : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,

donc $\alpha=-1$ et $\beta=1$.

Finalement : $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&-1\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

- Si u a une seule valeur propre triple λ, avec $\dim(E_\lambda)=2$:

Le procédé est le même que précédemment, avec $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$.

Exemple 7

Trigonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-2&0\\-4&-4&-1\end{pmatrix}$.

Réponse

• Déterminons le spectre de A :

$$\chi_A=\begin{vmatrix}X&-1&0\\1&X+2&0\\4&4&X+1\end{vmatrix}\underset{\substack{\text{on développe}\\\text{suivant la}\\\text{dernière colonne}}}{=}(X+1)\begin{vmatrix}X&-1\\1&X+2\end{vmatrix}=(X+1)(X(X+2)+1)=(X+1)^3.$$

Le polynôme caractéristique est scindé, donc A est trigonalisable.

Remarque : A ne peut pas être diagonalisable, sinon elle serait semblable à $-I_3$, elle serait donc $-I_3$.

• Déterminons l'espace propre :

$$\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-1}(A)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\-x-2y=-y\\-4x-4y-z=-z\end{cases}\Leftrightarrow(y=-x)\ ;$$

donc $E_{-1}(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Remarque : $\dim(E_{-1}(A))\neq m(-1)$ ce qui confirme que A n'est pas diagonalisable !

- Avec les notations précédentes, on prend : $e_1=(1,-1,0)$ $e_2=(0,0,1)$ et $e_3=(1,0,0)$.

$\det(e_1,e_2,e_3)=\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$, donc (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a : $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u)=\begin{pmatrix}-1&0&\alpha\\0&-1&\beta\\0&0&-1\end{pmatrix}$, avec : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

donc $\alpha=1$ et $\beta=-4$.

Finalement : $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-4\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

- Si u a une seule valeur propre triple λ, avec $\dim(E_\lambda)=1$:

On détermine $E_\lambda=\mathrm{Vect}\{e_1\}$. On complète $\{e_1\}$ à l'aide de deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour obtenir une base (e_1,e_2,e_3) ; on a alors :
$B=\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u)=\begin{pmatrix}\lambda&N\\0_{M_{2,1}(\mathbb{K})}&M\end{pmatrix}$, avec $N\in M_{1,2}(\mathbb{K}),M\in M_2(\mathbb{K})$.

Le polynôme caractéristique étant un invariant de similitude :
$\chi_B=(X-\lambda)\chi_M=(X-\lambda)^3$, d'où $\chi_M=(X-\lambda)^2$.

M a un polynôme caractéristique scindé, elle est donc trigonalisable et il existe $T_M\in M_2(\mathbb{K})$, triangulaire supérieure, et $P_M\in GL_2(\mathbb{K})$ telles que $M=P_MT_MP_M{}^{-1}$.

On a alors : $\begin{pmatrix}1&0_{M_{1,2}(\mathbb{K})}\\0_{M_{2,1}(\mathbb{K})}&P_M\end{pmatrix}^{-1}B\begin{pmatrix}1&0_{M_{1,2}(\mathbb{K})}\\0_{M_{2,1}(\mathbb{K})}&P_M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&R\\0_{M_{2,1}(\mathbb{K})}&T_M\end{pmatrix}$ qui est triangulaire supérieure, semblable à A.

Exemple 8

Trigonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix}5&1&-1\\1&4&-1\\1&1&3\end{pmatrix}$.

Réponse

- Déterminons le spectre de A :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-5 & -1 & 1 \\ -1 & X-4 & 1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-4 & -1 & 1 \\ 0 & X-4 & 1 \\ X-4 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} X-4 & -1 & 1 \\ 0 & X-4 & 1 \\ 0 & 0 & X-4 \end{vmatrix} = (X-4)^3.$$

Le polynôme caractéristique est scindé, donc A est trigonalisable.

- Déterminons l'espace propre :

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4(A)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - z = 4x \\ x + 4y - z = 4y \\ x + y + 3z = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \text{; donc } E_4(A) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- On prend : $e_1 = (1,0,1), e_2 = (1,0,0), e_3 = (0,1,0)$.

$\det(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a : $\text{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 4 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$, avec $u(e_2) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, ce qui équivaut à : $\begin{cases} 5 = a_1 + a_2 \\ 1 = a_3 \\ 1 = a_1 \end{cases}$, et $u(e_3) = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$, ce qui équivaut à : $\begin{cases} 1 = b_1 + b_2 \\ 4 = b_3 \\ 1 = b_1 \end{cases}$; d'où $B = \text{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Considérons $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ qui est triangulaire inférieure.

Pour trouver une matrice triangulaire supérieure qui lui est semblable, on intervertit l'ordre des vecteurs de la base, on a donc : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : On peut aussi procéder comme dans l'**exemple 5** !

On a : $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}}\end{pmatrix}^{-1}$ ...

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} B \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

, donc finalement

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} B \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

À vous !

On s'échauffe

1. Déterminer les éléments propres des matrices suivantes et les diagonaliser (on ne calculera pas les inverses des matrices de passage) :

a. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

f. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

g. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On accélère

2. Déterminer les éléments propres des matrices suivantes, et les trigonaliser (on ne calculera pas les inverses des matrices de passage) :

a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -7 & 6 \\ 0 & -9 & 7 \end{pmatrix}$

f. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

g. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

h. $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

3. Déterminer les éléments propres des endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ dans les cas suivants :

a. $E = C^{\infty}(\mathbb{R}), u : f \mapsto f'$.

b. $E = C^{\infty}(\mathbb{R}), u : f \mapsto f''$.

c. $E = C^{0}(\mathbb{R}), u : f \mapsto F$ avec $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

d. $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, u : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

e. $E = \mathbb{K}[X], u : P \mapsto XP'$.

f. $E = \mathbb{K}[X], u : P \mapsto 2X^3P' - (6X^2 - 1)P$.

g. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\begin{cases} b_0 = a_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \end{cases}$.

h. *E* est un espace vectoriel de dimension finie ; *F* et *G* sont des sous-espaces supplémentaires de *E* (différents de {0}), *u* est la projection sur *F* parallèlement à *G*.

4. Soit $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$. Montrer que :

$$A=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R}) \text{ est diagonalisable.}$$

On finit au top

5. Dans les cas suivants donner une condition nécessaire et suffisante sur $a\in\mathbb{R}$ pour que la matrice *M*(*a*) soit diagonalisable :

a. $M(a)=\begin{pmatrix}2-a & a-5 & a\\ a & 2-a & -a\\ 5 & -5 & -3\end{pmatrix}$

b. $M(a)=\begin{pmatrix}a-4 & -3 & 3\\ -1 & 1 & 1\\ a-6 & -3 & 5\end{pmatrix}$

c. Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ a & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, avec $a\in\mathbb{K}$.

6. *a*, *b* et *c* étant des réels non nuls, déterminer les éléments propres de $A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}$, et la diagonaliser (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) (on ne calculera pas les inverses des matrices de passage).

1. On notera systématiquement A la matrice à diagonaliser.

> **Remarque :** Je ne détaillerai pas la recherche des espaces propres, la résolution des systèmes n'étant pas un objectif de cette fiche. Si votre résultat est faux, il faut refaire les calculs jusqu'à ce qu'il soit juste… et reprendre la fiche sur la résolution de systèmes linéaires du livre de première année !

a. $\chi_A = \begin{vmatrix} X-4 & 1 \\ 2 & X-5 \end{vmatrix} = (X-6)(X-3)$.

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
La recherche des espaces propres donne :

$E_3 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, et $E_6 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

On en déduit que $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$.

b. $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -i \\ i & X-1 \end{vmatrix} = X(X-2)$.

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

La recherche des espaces propres donne : $E_0 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\}$, et $E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\right\}$.

On en déduit que $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

c. $\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ -3 & X+1 & -4 \\ 0 & 0 & X-3 \end{vmatrix}$

$\underbrace{=}_{\text{on développe suivant la première ligne}} (X-2)\begin{vmatrix} X+1 & -4 \\ 0 & X-3 \end{vmatrix} = (X-2)(X+1)(X-3)$.

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

La recherche des espaces propres donne :

$$E_{-1}(A)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\},\ E_2(A)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\},\text{ et } E_3(A)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

On en déduit que $A=PDP^{-1}$, avec $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

d. $$\chi_A=\begin{vmatrix}X+1&4&-3\\3&X+2&-3\\2&4&X-4\end{vmatrix}\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}X+2&4&-3\\X+2&X+2&-3\\X+2&4&X-4\end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=}(X+2)\begin{vmatrix}1&4&-3\\0&X-2&0\\0&0&X-1\end{vmatrix}=(X+2)(X-2)(X-1).$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

La recherche des espaces propres donne :

$$E_{-2}(A)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},\ E_1(A)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\},\text{ et } E_2(A)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

On en déduit que $A=PDP^{-1}$, avec $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

e. $$\chi_A=\begin{vmatrix}X+4&-6&3\\1&X-3&1\\-4&4&X-3\end{vmatrix}\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2}{=}\begin{vmatrix}X-2&-6&3\\X-2&X-3&1\\0&4&X-3\end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{=}(X-2)\begin{vmatrix}1&-6&3\\0&X+3&-2\\0&4&X-3\end{vmatrix}$$

$$=(X-2)\begin{vmatrix}X+3&-2\\4&X-3\end{vmatrix}=(X-2)(X-1)(X+1).$$

MATHS
SPÉ

Si vous lisez cette quatrième de couverture, c'est que vous vous apprêtez à entrer en deuxième année de classe préparatoire. Nous vous en félicitons !

Si vous ne connaissez pas le premier livre de cette série, nous vous le recommandons. Les notions qu'il travaille sont accessibles dès la première année, **mais sont indispensables aux deux années de classe préparatoire**.

Comme son prédécesseur, ce livre a pour objectif la **maîtrise des techniques et exercices de base**.

Même si le programme de deuxième année vise à approfondir et élargir les connaissances en vue de la résolution de problèmes de concours, la technique est toujours présente, et d'autant plus laissée au travail autonome que le programme est dense.

Du même auteur

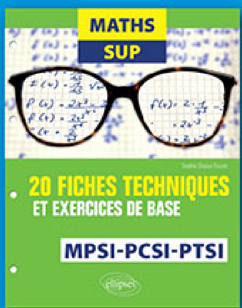


Illustration de couverture : © miss_mafalda - Fotolia.com

9 782340 024137

www.editions-ellipses.fr