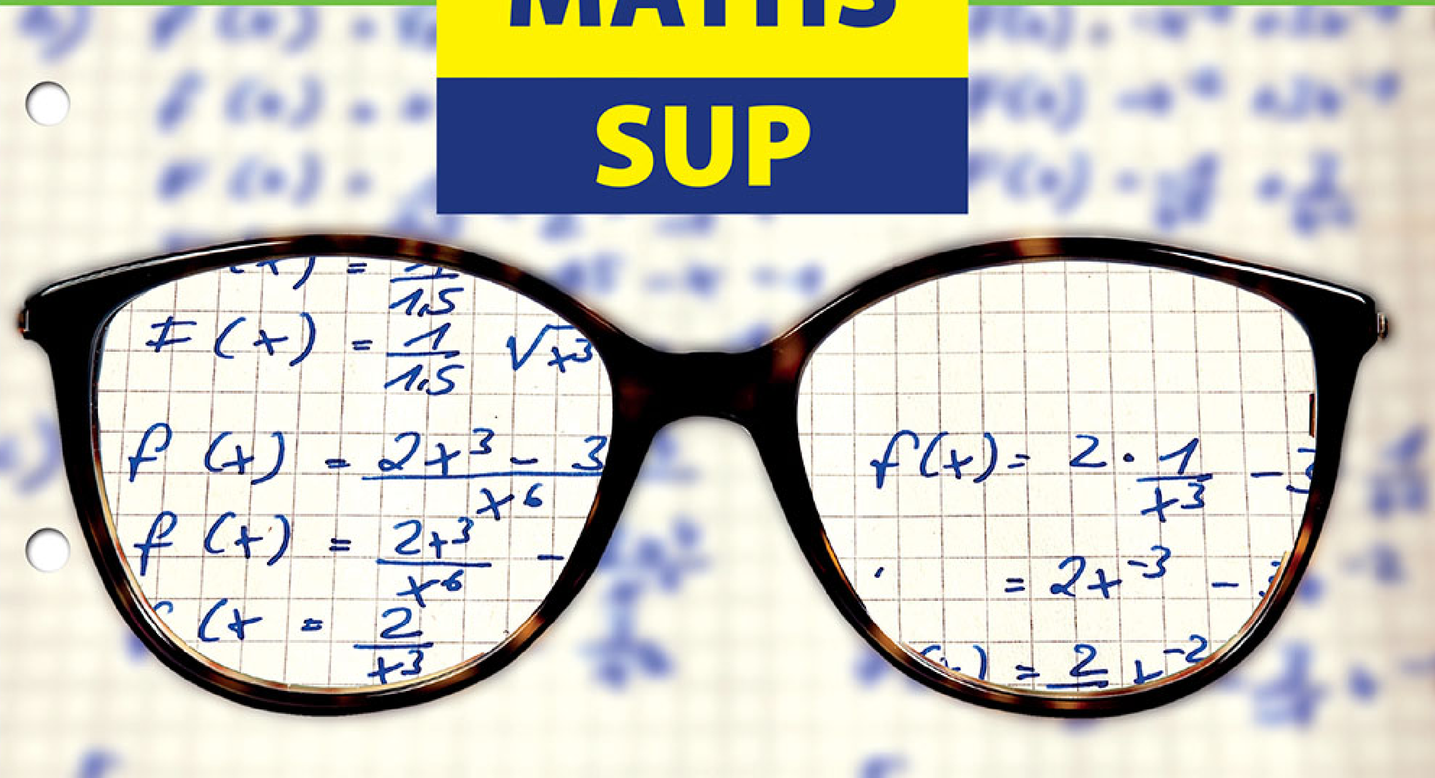
MATHS SUP



Sophie Dupuy-Touzet

20 FICHES TECHNIQUES ET EXERCICES DE BASE

MPSI-PCSI-PTSI

ellipses

20 FICHES TECHNIQUES
ET EXERCICES DE BASE

MPSI – PCSI – PTSI

MATHS
SUP

20 FICHES TECHNIQUES
ET EXERCICES DE BASE

MPSI – PCSI – PTSI

Sophie Dupuy-Touzet

ellipses

Du même auteur, chez le même éditeur

Maths Spé - 12 fiches techniques et exercices de base - MP, PC, PSI et PT, 296 pages, 2018

Maths - Prérequis pour la prépa - fiches de mise à niveau sur les techniques de calculs et exercices d'entraînement, 144 pages, 2018

Formaté typographiquement par DESK (53) :
02 43 01 22 11 – desk@desk53.com.fr

ISBN 9782340052062

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Chère lectrice, cher lecteur,

Depuis quelques années, la maîtrise des techniques n'est plus un attendu du secondaire.

Pour autant, le programme du supérieur laisse peu de temps à la pratique d'exercices techniques. Celle-ci relève d'un travail implicite, dont on ne mesure pas toujours l'ampleur. Dans l'ensemble des livres de classes préparatoires, la place faite aux exercices techniques est infime. Or s'il est une évidence, c'est que la compétence technique ne s'acquiert qu'avec la pratique.

Je propose dans ce livre des fiches thématiques sur les techniques et les connaissances de base, pour travailler en autonomie, en amont d'exercices qui couvrent un champ plus large, comme l'on peut trouver dans les livres de CPGE ou sur les sites d'annales de concours.

Chaque fiche se décline en 3 temps :

- **Le temps de l'appropriation des méthodes**

  La partie « Je vous montre comment » présente les méthodes travaillées dans la fiche, chacune étant illustrée par un exemple détaillé. Cette partie n'est évidemment pas exhaustive, et **elle fait délibérément l'impasse sur toutes les méthodes anecdotiques** qui ne servent que dans l'exemple qui les illustre ou dans de rares exercices !

- **Le temps de la pratique**

  La partie « À vous ! » propose d'enchaîner des exercices avec une **difficulté croissante**, sans sortir du cadre technique imposé par le thème. Ici encore, pas de singularité ou de problème qui nécessite une astuce. L'objectif est la **maîtrise des bases**, par la répétition. Le nécessaire, rien que le nécessaire !

- **Le temps de la correction**

  Chaque exercice qui a été donné est **corrigé en détail**. L'objectif n'est pas seulement de comprendre la correction, mais de parvenir à refaire seul les exercices. Alors, en cas d'erreur, même si vous comprenez la correction, refaites l'exercice !

Chacun sait qu'en mathématiques une grande partie de l'apprentissage relève de la pratique. C'est particulièrement vrai en ce qui concerne la technique. Avec ce livre, je vous propose un nombre important d'exercices pour **acquérir et**

consolider les notions de base, et vous mettre en situation de réussite tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. La maîtrise des exercices que je vous propose sera le ciment des connaissances que vous acquerrez par ailleurs. **Construisez sur du solide, vous n'en serez que plus efficace !**

Pour conclure, je tiens à remercier Corinne Baud, des éditions Ellipses, pour la confiance qu'elle m'a accordée, ainsi que mes amis relecteurs Sylvie, Gilles et Joachim.

Je dédie ce livre à mes trois filles, pour leur soutien inconditionnel.

Table des matières

Fiches

Formulaires

Logique

Certaines notions de logique sont utilisées intuitivement dès les premiers apprentissages en mathématiques. Cette discipline n'est toutefois spécifiquement étudiée que dans le supérieur.
L'objet de cette fiche est de travailler les règles de logique qui servent dans les démonstrations, ainsi que de se familiariser avec le langage formel, omniprésent par la suite.

Une **assertion** est une affirmation à laquelle on peut attacher une valeur de vérité : soit vraie soit fausse.

Je vous montre comment

■ Démontrer qu'une propriété dépendant de plusieurs assertions est vraie

▸ À l'aide d'une table de vérité :

On envisage tous les cas pour les assertions (vraie ou fausse !), et on utilise les règles sur les opérateurs logiques.

Les **opérateurs logiques** permettent de combiner des assertions pour en obtenir de nouvelles :

- *Négation* : la négation d'une propriété P est notée $\rceil P$
- *Conjonction* : ' et ' notée $\wedge$
- *Disjonction inclusive* : ' ou ' notée $\vee$
- *Implication* : notée $\Rightarrow$
- *Équivalence* : notée $\Leftrightarrow$

…/…

…/…

Ils sont définis par la table de vérité :

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Selon le **principe de non contradiction**, $(P \wedge \neg P)$ est une assertion toujours fausse ; selon le **principe du tiers exclu**, $(P \vee \neg P)$ est une assertion toujours vraie (appelée **tautologie**).

Exemple 1

P et Q désignent deux assertions. Montrer que : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Réponse

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

On voit que les assertions $(P \Rightarrow Q)$ et $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ sont simultanément vraies et simultanément fausses. Elles sont donc bien équivalentes.

Remarque : On dit que l'assertion $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ est la **contraposée** de l'assertion $(P \Rightarrow Q)$.

- En utilisant les **lois de Morgan** :

1. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
2. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
3. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
4. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Exemple 2

P et Q désignent deux assertions. Montrer que l'on a : $\big((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)\big) \Leftrightarrow P$.

Remarque : Parfois, comme ici, un résultat a l'air « évident ». Bien sûr, quand on demande de démontrer un résultat de logique, on attend une argumentation basée sur les théorèmes du cours, pas la réponse : « c'est logique » !

Réponse

$$\left(\left(P\wedge \urcorner Q\right)\vee\left(P\wedge Q\right)\right)\underbrace{\Leftrightarrow}_{3^e\text{ loi de Morgan}}\left(P\wedge\underbrace{\left(Q\vee \urcorner Q\right)}_{\text{assertion toujours vraie}}\right)\Leftrightarrow P$$

■ Nier une phrase quantifiée

Concernant des éléments d'un ensemble, on définit trois opérateurs, appelés **quantificateurs** :

- $\forall$: se lit « *quel que soit* » ou « *pour tout* ».
- $\exists$: se lit « *il existe au moins un* ».
- $\exists\,!$: se lit « *il existe un unique* ».
- Si P désigne une propriété dépendant des éléments x d'un ensemble E, alors :
- $\left(\forall x\in E, P\right)$ signifie « *la propriété P est vérifiée pour tous les éléments de E* ».
- $\left(\exists x\in E, P\right)$ signifie « *la propriété P est vérifiée au moins pour un élément de E* ».
- $\left(\exists ! x\in E, P\right)$ signifie « *la propriété P est vérifiée pour un seul élément de E* ».

⚠ On peut permuter deux quantificateurs identiques, mais on ne peut pas permuter deux quantificateurs de nature différente.

Par exemple : $\left(\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R}, y=x^2\right)$ est une assertion vraie (tout réel a un carré), par contre $\left(\exists y\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}, y=x^2\right)$ est une assertion fausse (tous les carrés de réels ne sont pas égaux).

▶ En utilisant les résultats suivants :

Si P désigne une propriété dépendant d'un élément x d'un ensemble E, alors :

- $\urcorner\left(\forall x\in E, P\right)\Leftrightarrow\left(\exists x\in E, \urcorner P\right)$
- $\urcorner\left(\exists x\in E, P\right)\Leftrightarrow\left(\forall x\in E, \urcorner P\right)$

Exemple 3

Nier l'assertion : $\left(\forall x\in E,\exists y\in E, x.y=1\right)$.

Remarque : Cette assertion est fausse pour $E=\mathbb{R}$, et vraie pour $E=\mathbb{R}^*$, mais ce n'est pas la question !

Réponse

$$\urcorner\left(\forall x\in E,\exists y\in E, x.y=1\right)\Leftrightarrow\left(\exists x\in E, \urcorner\left(\exists y\in E, x.y=1\right)\right)\Leftrightarrow\left(\exists x\in E,\forall y\in E, x.y\neq 1\right).$$

■ Nier une implication

- En utilisant l'assertion : $\boxed{\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)}$

Exemple 4

Nier l'assertion : $(\forall\, x \in E, (x \in A \Rightarrow\ x \notin B))$.

Réponse

$$\neg(\forall\, x \in E, (x \in A \Rightarrow\ x \notin B)) \Leftrightarrow \left(\exists\, x \in E, \neg(x \in A \Rightarrow\ x \notin B)\right)$$
$$\Leftrightarrow (\exists\, x \in E, (x \in A \wedge\ x \in B)) \Leftrightarrow (\exists\, x \in E, x \in A \cap B).$$

> **Remarque :** On a aussi : $(\exists\, x \in E, x \in A \cap B) \Leftrightarrow (A \cap B \neq \varnothing)$.

■ Traduire simplement une phrase quantifiée

Pour bien comprendre une phrase quantifiée, il ne suffit pas de la traduire littéralement, mais il faut être capable de l'exprimer simplement « en français ».

Exemple 5

Écrire littéralement l'assertion suivante, puis la traduire par une phrase concise : $(\forall x \in A, x \neq 0)$.

Réponse

L'expression littérale de cette phrase quantifiée est : « quel que soit *x* élément de *A*, *x* n'est pas nul ».

On peut la traduire simplement en disant : « *A* ne contient pas 0 ».

> **Remarque :** Il existe bien sûr d'autres formulations, comme « 0 n'est pas un élément de *A* », ou « aucun des éléments de *A* n'est nul »… L'essentiel est de comprendre le sens de l'assertion, en se détachant du vocabulaire formel.

On s'échauffe

Dans les exercices, f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. P, Q et R désignent des assertions. Montrer que les équivalences suivantes sont vraies :

a. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ (à l'aide d'une table de vérité)

b. $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ (à l'aide d'une table de vérité)

c. $\big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)\big) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R)$ (à l'aide d'une table de vérité)

d. $\big(P \wedge \neg(Q \vee R)\big) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

e. $\big((P \wedge \neg Q) \wedge \neg(R \wedge \neg Q)\big) \Leftrightarrow \big(P \wedge \neg(Q \vee R)\big)$

2. Traduire les assertions suivantes à l'aide d'une phrase concise (comme dans **l'exemple 5**) :

a. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

c. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

d. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$.

e. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$.

3. Traduire à l'aide de phrases quantifiées les assertions suivantes :

a. f ne prend que des valeurs entières.

b. f prend toutes les valeurs entières.

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

d. f est strictement décroissante.

e. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

4. Donner la négation des assertions suivantes :

a. $\exists a > 0, \exists b \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, na \leq b$.

b. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a > 0, b \geq 0) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, na > b)$.

c. $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in [0;1], f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

d. $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2, (x.y=x)\Rightarrow (y=1)$.

e. $\left(\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)\times f(y)\right)\Rightarrow (\forall x\in \mathbb{R}, f(x)\geq 0)$.

5. Parce que l'on peut s'amuser avec la logique :
On considère la tautologie (assertion toujours vraie) A suivante : « Quand je suis en cours, mon téléphone portable est éteint ».
On note C l'assertion « je suis en cours », et P l'assertion « mon téléphone portable est allumé ».

a. Donner un équivalent de A à l'aide de C, P et des opérateurs logiques.

b. On considère l'assertion S : « Mon téléphone portable sonne ». Si S est vraie, écrire des assertions vraies à l'aide de P et C (hormis les tautologies $P\vee \neg P$ et $C\vee \neg C$).

c. Exprimer à l'aide de P et C une assertion qui illustre : « Je suis mis à la porte, car mon téléphone a sonné ». Que peut-on en penser ?

d. Donner la contraposée de l'assertion A.

e. Donner la réciproque de l'assertion A.

On accélère

6. Traduire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

a. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

b. La fonction f n'est pas strictement décroissante.

c. La fonction f n'est pas de signe constant.

d. La fonction f n'admet pas d'extremum.

e. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

7. Après en avoir donné la signification, donner la négation des assertions suivantes :

a. $\exists M\in \mathbb{R}, \forall n\in \mathbb{N}, u_n\geq M$.

b. $\exists N\in \mathbb{N}, \forall n\in \mathbb{N}, (n\geq N)\Rightarrow (u_n>0)$.

c. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \geq a) \Rightarrow \big(f(x)f(a) > 0\big)$.

d. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \big(f(x) = f(y)\big) \Rightarrow (x = y)$.

e. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \Rightarrow \big(|u_n| < \varepsilon\big)$.

On finit au top

8. Après en avoir donné la signification, donner la négation des assertions suivantes :

a. $\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \geq A) \Rightarrow \big(|f(x) - L| < \varepsilon\big)$.

b. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ \big(|x - a| < r\big) \Rightarrow \big(|f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)$.

9. Traduire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

a. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

b. La fonction *f* n'est pas monotone.

c. Les fonctions *f* et *g* s'annulent simultanément.

d. Les fonctions *f* et *g* ont les mêmes variations.

10. Soient *E* un ensemble, *A* et *B* deux assertions dépendant des éléments *x* de E. Compléter par le symbole $\Rightarrow$, ou $\Leftarrow$ et justifier qu'il n'y a pas d'équivalence :

a. $(\exists x \in E, A \wedge B) \cdots \big((\exists x \in E, A) \wedge (\exists x \in E, B)\big)$

b. $(\forall x \in E, A \vee B) \cdots \big((\forall x \in E, A) \vee (\forall x \in E, A)\big)$

1. a.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	*V*	F	*V*
V	F	*F*	F	*F*
F	V	*V*	V	*V*
F	F	*V*	V	*V*

b.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$
V	V	V	*F*	F	*F*
V	F	F	*V*	V	*V*
F	V	V	*F*	F	*F*
F	F	V	*F*	V	*F*

c. L'assertion $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$ est vraie si, et seulement si *P*, *Q* et *R* sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$R \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)$
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F
F	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*

d. $$\left(P \wedge \neg(Q \vee R)\right) \underbrace{\Leftrightarrow}_{2^e \text{ loi de Morgan}} \left(P \wedge \left(\neg Q \wedge \neg R\right)\right) \Leftrightarrow \left(P \wedge \neg Q \wedge \neg R\right).$$

e. $$\left(\left(P \wedge \neg Q\right) \wedge \neg\left(R \wedge \neg Q\right)\right) \underbrace{\Leftrightarrow}_{1^{re} \text{ loi de Morgan}} \left(\left(P \wedge \neg Q\right) \wedge \left(\neg R \vee Q\right)\right)$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{3^e \text{ loi de Morgan}} \left(\left(P \wedge \neg Q \wedge \neg R\right) \vee \underbrace{\left(P \wedge \neg Q \wedge Q\right)}_{\text{assertion fausse}}\right) \underbrace{\Leftrightarrow}_{2^e \text{ loi de Morgan}} \left(P \wedge \neg(Q \vee R)\right).$$

2. a. La fonction *f* est nulle. (Cela sous-entend « partout ».)

b. La fonction *f* ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction *f* s'annule sur $\mathbb{R}$. (Cela sous-entend « au moins une fois ».)

d. La fonction *f* admet un minimum.

e. La fonction *f* n'admet pas de maximum.

3. **a.** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{Z}$.

b. $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = n$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

d. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x < y) \Rightarrow (f(x) > f(y))$.

e. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

4. **a.** $\forall a > 0, \forall b \geq 0, \exists n \in \mathbb{N}, na > b$.

b. $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a > 0, b \geq 0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, na \leq b)$.
Avez-vous remarqué que les deux assertions précédentes sont la négation l'une de l'autre ?!

c. $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda \in [0;1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

d. $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x.y = x) \wedge (y \neq 1)$.

e. $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) \times f(y)\right) \wedge \left(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0\right)$.

⚠ Il s'agit ici de nier une implication. Contrairement au cas précédent, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ figure dans la première assertion, qui demeure la même dans la négation.

5. **a.** $A \Leftrightarrow (C \Rightarrow \neg P)$.

b. $S \Rightarrow P$; $S \Rightarrow \neg C$; $S \Rightarrow P \wedge \neg C$; $S \Rightarrow P \vee \neg C$; $S \Rightarrow C \vee P$.

c. $C \wedge P$; l'assertion *A* étant une tautologie, l'assertion $C \wedge P$ est fausse.

d. $P \Rightarrow \neg C$: quand mon portable est allumé, je ne suis pas en cours.

e. $\neg P \Rightarrow C$: quand mon portable est éteint, je suis en cours.

6. **a.** $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$.

b. ⚠ La négation de la décroissance n'est pas la croissance !!!
Il s'agit ici de nier la stricte décroissance (vue dans l'exercice **3.d**) :
$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x < y) \wedge (f(x) \leq f(y))$.

c. $\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x)f(y)<0$.

C'est la façon la plus concise de l'écrire, mais on peut aussi séparer *x* et *y* : $\left(\exists x\in\mathbb{R}, f(x)>0\right)\wedge\left(\exists y\in\mathbb{R}, f(y)<0\right)$.

d. $\forall a\in\mathbb{R},\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x)<f(a)<f(y)$.

e. $\forall M\in\mathbb{R},\exists N_0\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},(n\geq N_0)\Rightarrow(u_n\geq M)$.

7. a. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

Sa négation : $\forall M\in\mathbb{R},\exists n\in\mathbb{N}, u_n<M$.

b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

Sa négation : $\forall N\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{N},(n\geq N)\wedge(u_n\leq 0)$.

c. La fonction *f* est de signe constant et ne s'annule pas au-delà d'un certain réel (on peut aussi dire : $f(x)$ est non nul et de signe constant pour *x* suffisamment grand).

Sa négation : $\forall a\in\mathbb{R},\exists x\in\mathbb{R},(x\geq a)\wedge\left(f(x)f(a)\leq 0\right)$.

d. La fonction *f* est injective, c'est-à-dire que deux réels distincts n'ont pas la même image.

Sa négation : $\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2,\left(f(x)=f(y)\right)\wedge(x\neq y)$.

e. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Sa négation : $\exists\varepsilon>0,\forall N\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{N}\ (n\geq N)\wedge\left(|u_n|\geq\varepsilon\right)$.

8. a. La fonction f admet une limite finie en $+\infty$.

Sa négation : $\forall L\in\mathbb{R},\exists\varepsilon>0,\forall A\in\mathbb{R},\exists x\in\mathbb{R},(x\geq A)\wedge\left(|f(x)-L|\geq\varepsilon\right)$.

b. La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$.

Sa négation : $\exists a\in\mathbb{R},\exists\varepsilon>0,\forall r>0,\exists x\in\mathbb{R},\ \left(|x-a|<r\right)\wedge\left(|f(x)-f(a)|\geq\varepsilon\right)$.

9. a. $\forall n\in\mathbb{Z},\exists N\in\mathbb{Z},\ n<N$.

b. $\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,(x<y<z)\wedge\left(\left(f(y)-f(x)\right)\left(f(z)-f(y)\right)<0\right)$.

Remarque : On peut aussi écrire

$$\left(\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2,(x<y)\wedge\left(f(x)<f(y)\right)\right)\wedge\left(\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2,(x<y)\wedge\left(f(x)>f(y)\right)\right).$$

Il faut bien comprendre que le couple (x,y) de la première assertion n'est pas le même que celui de la seconde.

c. $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x)=0) \Leftrightarrow (g(x)=0)$.

d. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$.

10. a. $(\exists x \in E, A \wedge B) \Rightarrow ((\exists x \in E, A) \wedge (\exists x \in E, B))$.

En effet, s'il existe $x \in E$ pour lequel A et B sont vérifiées, alors il existe $x \in E$ pour lequel A est vérifiée, et il existe $x \in E$ (le même en l'occurrence !) pour lequel B est vérifiée : c'est l'implication.

Avec $E = \mathbb{R}$, $A = (x > 0)$ et $B = (x < 0)$, on a bien :

$$(\exists x \in \mathbb{R}, (x > 0) \wedge (x < 0)) \Rightarrow ((\exists x \in \mathbb{R}, x > 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}, x < 0)).$$

En effet la première assertion étant fausse, l'implication est vraie…

Remarque : Arrêtons-nous sur ce qui peut sembler être une bizarrerie :
Dans la table de vérité qui permet de définir les opérateurs logiques, on a $(P \Rightarrow Q)$ vraie lorsque P est fausse. C'est ce qui permet de montrer que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ où l'on voit clairement que si l'on a $\neg P$, la deuxième assertion est vraie et, par équivalence, la première assertion (l'implication) est vraie.

Retournons à notre contre-exemple…

L'assertion $(\exists x \in \mathbb{R}, x > 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}, x < 0)$ est vraie (il y a bien des réels strictement positifs et des réels strictement négatifs), mais l'assertion $(\exists x \in \mathbb{R}, (x > 0) \wedge (x < 0))$ est fausse.

L'implication $((\exists x \in E, A) \wedge (\exists x \in E, B)) \Rightarrow (\exists x \in E, A \wedge B)$ est donc fausse.

b. $(\forall x \in E, A \vee B) \Leftarrow ((\forall x \in E, A) \vee (\forall x \in E, B))$.

En effet, considérons la contraposée :

$$\neg(\forall x \in E, A \vee B) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg A \wedge \neg B)$$

et
$$\neg((\forall x \in E, A) \vee (\forall x \in E, B)) \Leftrightarrow \neg(\forall x \in E, A) \wedge \neg(\forall x \in E, B)$$
$$\Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg A) \wedge (\exists x \in E, \neg B).$$

S'il existe $x \in E$ pour lequel ni A ni B n'est vraie, alors il existe $x \in E$ pour lequel A n'est pas vérifiée, et il existe $x \in E$ (le même en l'occurrence !) pour lequel B n'est pas vérifiée.

On a donc : $(\exists x \in E, \neg A \wedge \neg B) \Rightarrow (\exists x \in E, \neg A) \wedge (\exists x \in E, \neg B)$, d'où l'implication (par contraposée).

Avec $E=\mathbb{R}$, $A=(x>0)$ et $B=(x\leq 1)$, on a bien :

$\left(\left(\forall x\in\mathbb{R}, x>0\right)\vee\left(\forall x\in\mathbb{R}, x\leq 1\right)\right)\Rightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R},(x>0)\vee(x\leq 1)\right)$.

En effet la première assertion étant fausse, l'implication est donc vraie.

L'assertion $\left(\forall x\in\mathbb{R},(x>0)\vee(x\leq 1)\right)$ est vraie (un réel est bien soit strictement positif, soit inférieur ou égal à 1, cette disjonction n'étant pas exclusive), mais l'assertion $\left(\forall x\in\mathbb{R}, x>0\right)\vee\left(\forall x\in\mathbb{R}, x\leq 1\right)$ est fausse.

L'implication $\left(\forall x\in E, A\vee B\right)\Rightarrow\left(\left(\forall x\in E, A\right)\vee\left(\forall x\in E, B\right)\right)$ est donc fausse.

Fiche 2

Injectivité – Surjectivité

La question de l'injectivité et de la surjectivité d'une application est celle du lien qu'elle établit entre deux ensembles. La réponse est partiellement apportée avec les outils de terminale pour les fonctions définies et à valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$. Cette fiche permet de les récapituler, mais aussi d'explorer le cas plus théorique des applications non réelles.
E et F désignent des ensembles, f une application de E vers F.

Je vous montre comment

Démontrer qu'une application $f : E \to F$ est injective

f est **injective** si : $\forall (a,b) \in E^2, (a \neq b) \Rightarrow \big(f(a) \neq f(b)\big)$.

Remarque : Par définition d'une application, on a toujours $\forall (a,b) \in E^2$, $(a = b) \Rightarrow \big(f(a) = f(b)\big)$ dont la contraposée est la réciproque de l'implication qui définit l'injectivité.
On peut donc également définir l'injectivité ainsi :

$$\boxed{\forall (a,b) \in E^2, (a = b) \Leftrightarrow \big(f(a) = f(b)\big)}.$$

- Si E et F sont des parties de $\mathbb{R}$:

On établit l'injectivité de f en étudiant ses variations.

Exemple 1

Une fonction f strictement croissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est injective.

Réponse

La fonction f est strictement croissante sur I, donc :

$$\forall (a,b) \in I^2, (a \neq b) \Rightarrow \big((a < b) \vee (a > b)\big) \Rightarrow \Big(\big(f(a) < f(b)\big) \vee \big(f(a) > f(b)\big)\Big)$$
$$\Rightarrow \big(f(a) \neq f(b)\big).$$

Remarque : Ce sont en réalité des équivalences, mais seule l'implication suffit.

▸ En utilisant la contraposée de l'implication de définition :

On écrit pour a et b quelconques dans E : $f(a)=f(b)$ et on montre par équivalences que $a=b$.

Remarque : On peut raisonner par implications car, comme rappelé précédemment, l'implication $(a=b)\Rightarrow(f(a)=f(b))$ est toujours vraie.

Exemple 2

Établir l'injectivité de l'application $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\quad\mathbb{C}\\ x\mapsto x+ix^2\end{array}\right.$.

Réponse

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$(f(a)=f(b))\Leftrightarrow\left(a+ia^2=b+ib^2\right)\Leftrightarrow(a=b)\wedge\left(a^2=b^2\right)\Leftrightarrow(a=b)$.

En effet, deux nombres complexes sont égaux si, et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. f est donc injective.

■ Démontrer qu'une application $f:E\to F$ est surjective

f est **surjective** si : $\forall y\in F,\exists x\in E,f(x)=y$.

▸ Si E et F sont des parties de $\mathbb{R}$ et si f est continue :

On établit la surjectivité en étudiant les variations de f et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires.

Exemple 3

Déterminer le plus grand intervalle J de $\mathbb{R}$ (au sens de l'inclusion) pour lequel l'application $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\qquad J\\ x\mapsto x^2+2x-1\end{array}\right.$ est surjective.

Réponse

L'étude des variations de f conduit (sans difficulté !) au tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

La fonction polynomiale f étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique, et tout réel de l'intervalle $[-2,+\infty[$ admet un antécédent dans $\mathbb{R}$.
-2 étant le minimum de la fonction f, les réels de l'intervalle $]-\infty,-2[$ n'ont pas d'antécédent par f. On en déduit que $J=[-2,+\infty[$.

▶ En utilisant la définition :

Pour $y \in F$ quelconque, on détermine x tel que $f(x) = y$.

Exemple 4

Établir la surjectivité de l'application $f: \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \to [0,2\pi[\\ z \mapsto \arg(z) \end{array} \right.$.

⚠ Si on ne précise pas que f est à valeurs dans $[0, 2\pi[$ on ne définit pas une fonction car l'argument d'un nombre complexe est défini à 2π-près.

Réponse

Soit $y \in [0,2\pi[$. On a $f\left(e^{iy}\right) = y$; f est donc surjective.

■ Démontrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective

> *f* est **bijective** si *f* est injective et surjective.

▶ Soit on montre séparément que f est injective et f est surjective.

▶ Soit on montre que : $\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y$:

Exemple 5

Établir la bijectivité de l'application $f: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x+1} \end{array} \right.$.

Réponse

Soit $y \in \mathbb{R}$. On a : $\left(y = \dfrac{x}{x+1}\right) \Leftrightarrow \left(\left(x(1-y) = y\right)\right)$.

- Si $y = 1$, la deuxième assertion est fausse.
- Si $y \neq 1$, la deuxième assertion équivaut à : $x = \dfrac{y}{1-y}$.

Dans chaque assertion on a nécessairement $x \neq -1$; ainsi tout réel de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par f, qui est donc bijective.

Remarque : L'étude des variations de f donne le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

f étant continue, le théorème de bijection successivement appliqué aux intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$ donne que f établit une bijection entre $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$ et entre $]-1,+\infty[$ et $]-\infty,1[$.
Les intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$ étant disjoints (d'intersection vide), on en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Mais c'est plus long !

■ Démontrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas injective

▸ En proposant un contre-exemple :

On détermine deux éléments distincts de E qui ont la même image.

Exemple 6

Vérifier que l'application $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ n'est pas injective.

Réponse

$f(-1) = f(1)$, donc f n'est pas injective.

■ Démontrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas surjective

▸ En proposant un contre-exemple :

On détermine un élément de F qui n'a pas d'antécédent par f.

Exemple 7

Vérifier que l'application $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ n'est pas surjective.

Réponse

-1 n'a pas d'antécédent par f qui n'est donc pas surjective.

Remarque : Évidemment, aucun réel strictement négatif n'a d'antécédent, mais un seul suffit pour nier la surjectivité.

⚠ Une même expression littérale pour f peut générer tous les cas possibles suivant E et F, il faut donc prêter une grande attention aux ensembles concernés.

Exemple 8

Déterminer les plus grands intervalles E et F de $\mathbb{R}$ possibles (au sens de l'inclusion) pour lesquels $f : \left| \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ est successivement : ni injective, ni surjective ; puis injective et non surjective ; puis surjective et non injective ; puis bijective.

Réponse

Il suffit d'examiner le tableau de variations de f pour se convaincre des résultats :

- Avec $E = F = \mathbb{R}$, f n'est ni injective, ni surjective.
- Avec $E = \mathbb{R}^+$ (ou $E = \mathbb{R}^-$) et $F = \mathbb{R}$, f est injective, non surjective.
- Avec $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^+$, f est surjective, non injective.
- Avec $E = F = \mathbb{R}^+$, ou encore $E = \mathbb{R}^-$ et $F = \mathbb{R}^+$, f est bijective.

On s'échauffe

Pour les exercices **1** à **12,** étudier l'injectivité et la surjectivité de l'application f :

1. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$

2. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [-1,1] \\ x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$

3. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \\ z \mapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \end{array} \right.$

4. $f : \left| \begin{array}{l} [0,\pi] \to [0,1] \\ x \mapsto \sin x \end{array} \right.$

5. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto x(1+i) \end{array} \right.$

6. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \overline{z} \end{array} \right.$

7. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \\ z \mapsto |z| \end{array} \right.$

On accélère

8. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0,1[\\ x \mapsto x - \operatorname{E}(x) \end{array} \right.$, où $\operatorname{E}(x)$ désigne la partie entière du réel x.

9. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z}{1+z} \end{array} \right.$

10. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{array} \right.$

11. $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (xy,x+y)\end{array}\right.$

12. $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}\\ z\mapsto z^2\end{array}\right.$

On finit au top

13. On considère $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}\\ n\mapsto 2n\end{array}\right.$ et $g:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}\\ n & \mapsto & \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair}\\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}\end{array}\right.$

a. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.

b. Étudier l'injectivité et la surjectivité de $g\circ f$ et $f\circ g$.

14. $C([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions réelles continues sur [0,1], et $D([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles dérivables sur [0,1].
Étudier l'injectivité et la surjectivité de l'application :

$$\varphi:\left|\begin{array}{ccc}C([0,1],\mathbb{R}) & \rightarrow & D([0,1],\mathbb{R})\\ f & \mapsto & F:\left|\begin{array}{l}[0,1]\rightarrow\mathbb{R}\\ x\mapsto\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right.\end{array}\right.$$

15. V désigne l'ensemble des vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Étudier l'injectivité et la surjectivité de l'application :

$f:\left|\begin{array}{ccc}V^2 & \rightarrow & \mathbb{R}\\ (\vec{u},\vec{v}) & \mapsto & \vec{u}.\vec{v}\end{array}\right.$ (où $\vec{u}.\vec{v}$ désigne le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.)

1. L'étude des variations de *f*, le calcul de ses limites en $-\infty$ et $+\infty$, et sa continuité permettent d'établir sa bijectivité, grâce au théorème de bijection.

2. L'étude des variations de *f* et le calcul de ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ donnent *f* strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans]–1,1[(ce qui justifie au passage que *f* a bien ses images dans [–1,1]), elle est donc injective mais non surjective, car 1 (par exemple) n'a pas d'antécédent par *f*.

3. *f* est une bijection, car un nombre complexe est entièrement déterminé par ses parties réelles et imaginaires : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists ! z \in \mathbb{C}, z = x + iy$.

4. $f(0) = f(\pi) = 0$; *f* n'est donc pas injective.

$f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; la fonction sinus étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires donne *f* surjective.

5. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $\big(f(x) = f(y)\big) \Leftrightarrow \big(x(1+i) = y(1+i)\big) \underset{1+i \neq 0}{\Leftrightarrow} (x = y)$; *f* est donc injective.

$x(1+i) = 1$ équivaut à $x = \frac{1-i}{2}$, qui n'est pas un nombre réel ; ainsi 1 n'a pas d'antécédent par *f*, qui n'est donc pas surjective.

6. Soit $y \in \mathbb{C}$. On a : $\big(f(z) = y\big) \Leftrightarrow \big(\overline{z} = y\big) \Leftrightarrow \big(z = \overline{y}\big)$; *f* est donc bijective.

7. $f(1) = f(i) = 1$; *f* n'est donc pas injective.

Soit $y \in \mathbb{R}^+$. $f(y) = y$, donc *f* est surjective.

8. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1$. Les images de *f* sont donc bien dans [0,1[.

$f(0) = f(1) = 0$; *f* n'est donc pas injective.

Soit $y \in [0,1[$. $\mathrm{E}(y) = 0$, d'où $f(y) = y$; *f* est donc surjective.

9. Soit $(z,z') \in \big(\mathbb{C} \setminus \{-1\}\big)^2$. On a :

$$\big(f(z) = f(z')\big) \Leftrightarrow \left(\frac{z}{1+z} = \frac{z'}{1+z'}\right) \Leftrightarrow (z + zz' = z' + zz') \Leftrightarrow (z = z') ;$$

f est donc injective.

On a : $\left(f(z)=1\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{1+z}=1\right) \Leftrightarrow \left(z=1+z\right) \Leftrightarrow \left(0=1\right)$; la dernière assertion étant fausse, il en est de même de la première et 1 n'a pas d'antécédent par *f*, qui n'est donc pas surjective.

Remarque : Si le contre-exemple avec $y=1$ n'apparaît pas de façon évidente, on le trouve, en cherchant à résoudre $f(z)=y$, pour *y* quelconque dans $\mathbb{C}$: $\left(f(z)=y\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{1+z}=y\right) \Leftrightarrow \left(z(1-y)=y\right)$. A ce stade, on voit que si $y=1$ on a une assertion fausse… On tient donc notre contre-exemple.

10. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\left(f(x,y)=(a,b)\right) \Leftrightarrow \left((x+y,x-y)=(a,b)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(a+b) \\ y=\dfrac{1}{2}(a-b) \end{cases}.$$

(On obtient le dernier système en sommant puis en soustrayant les deux lignes du système précédent.)

On a montré : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \exists! (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y)=(a,b)$; *f* est donc bijective.

11. $f(1,-1)=f(-1,1)$; *f* n'est donc pas injective.

On a : $\left(f(x,y)=(1,0)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ -x^2=1 \end{cases}$; le système n'ayant pas de solution dans $\mathbb{R}^2$, (1,0) n'a pas d'antécédent par *f*, qui n'est donc pas surjective.

Remarque : Soit $(p,s) \in \mathbb{R}^2$. On a : $\left(f(x,y)=(p,s)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} xy=p \\ x+y=s \end{cases}$; *x* et *y* sont donc les solutions de l'équation $X^2-sX+p=0$ (c'est un résultat à connaître !), dont on sait qu'elle n'admet pas toujours des solutions réelles. Le contre-exemple donné est l'un des plus simples !

12. $f(1)=f(-1)=1$; *f* n'est donc pas injective.

Soit $Z=x+iy \in \mathbb{C}, (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $z=a+ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(z)=Z$.

Remarque : L'existence de tels nombres complexes relève du cours sur les nombres complexes, mais nous allons le démontrer ici…

On a : $(a+ib)^2 = x+iy \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = x & (1) \\ 2ab = y & (2) \end{cases}$.

D'autre part : $|z|^2 = |Z| \Leftrightarrow a^2+b^2 = \sqrt{x^2+y^2}$ (3) (il fallait y penser !).

On a donc en sommant et en soustrayant (1) et (3) : $\begin{cases} a^2 = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) \\ b^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right) \end{cases}$.

Comme pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, le système a des solutions.

On prend $a = \sqrt{\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$ ou $a = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$ et, d'après (2) le signe de b étant celui de a si y est positif, le signe contraire sinon, on en déduit la valeur de b qui vaut : soit $\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}$, soit $-\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}$.

Finalement, tout nombre complexe admet des racines carrées, et f est surjective.

13. a. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. On a : $(f(a)=f(b)) \Leftrightarrow (2a=2b) \Leftrightarrow (a=b)$; f est donc injective.

Toutes les images par f sont des nombres pairs ; on en déduit que 1 (par exemple) n'a pas d'antécédent par f qui n'est donc pas surjective.

$g(2)=g(3)=1$; g n'est donc pas injective.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $g(2n)=n$, g est donc surjective.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g \circ f(n) = g(2n) = n$, donc $g \circ f$ est clairement bijective.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \circ g(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

$f \circ g(2) = f \circ g(3)$; $f \circ g$ n'est donc pas injective.

Si n est pair, $f \circ g(n) = n$ est pair, et si n est impair, $f \circ g(n) = n-1$ est pair. On en déduit que les entiers impairs n'ont pas d'antécédent par $f \circ g$, qui n'est donc pas surjective.

MATHS SUP

Vous qui entrez en classes préparatoires et qui devez faire un choix parmi une multitude de livres de cours et d'exercices, pourquoi choisir celui-ci en premier ?

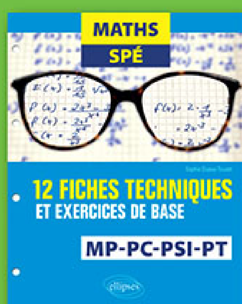
Parce que ce livre part d'une réalité, s'est construit sur une expérience, et répond à un réel besoin.

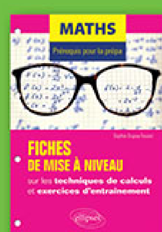
Depuis plusieurs années, la maîtrise des techniques n'est plus un attendu du lycée, et de nombreux étudiants qui entrent en classes préparatoires rencontrent de grandes difficultés dès qu'il s'agit de mener un calcul, tant en mathématiques qu'en sciences physiques ou en sciences industrielles.

Les techniques non acquises pèsent sur les apprentissages.

Avec ce livre, nous vous proposons de travailler les techniques et exercices de base, afin d'assurer un socle solide qui vous évitera de perdre pied dès que vous serez confronté à un calcul.

Du même auteur





9 782340 024144

www.editions-ellipses.fr