PRÉPA SCIENTIFIQUE

MPSI - PCSI - PTSI

1re année

Thomas **Petit**

TOUS LES EXOS MATHÉMATIQUES

EXERCICES CORRIGÉS / CONSEILS

ellipses

Prépa scientifique
MPSI - PCSI - PTSI

1re année

Thomas **Petit**

TOUS LES EXOS MATHÉMATIQUES

EXERCICES CORRIGÉS / CONSEILS

ellipses

Retrouvez toutes les publications de Thomas Petit
sur le site des éditions Ellipses :

www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-052871

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Il est bien plus beau de savoir quelque chose de tout que de savoir tout d'une chose ; cette universalité est la plus belle.

Blaise Pascal (1623-1662)

Pourquoi ce livre ?

Ce livre se veut radicalement différent des autres livres. Déjà par son format : 168 pages. Cela change des manuels de prépa encyclopédiques innombrables (qui avoisinent facilement les 1 000 pages), certes très bien faits mais qui peuvent se montrer plus que décourageants si on se sent en retard ou dépassé par les événements. Ici, on ne risque pas l'indigestion ou la volonté de fuir car ce sont près de 160 exercices classiques, incontournables, fondamentaux et complètement indépendants qui sont exposés.

Ensuite par sa présentation : un exo par page, pour éviter la saturation et pour s'y retrouver rapidement. C'est comme une vidéo sur YouTube : parfois trente secondes bien référencées sont plus efficaces que quarante-cinq minutes imprécises où on se demande où on veut en venir. Notre but est de vous faire gagner du temps, pas de vous en faire perdre car c'est quand on se sent découragé, qu'il faut des explications urgentes et si possibles courtes !

Enfin par le rappel de formules (d'ailleurs souvent les mêmes) qu'il faut absolument connaître : il n'est pas rare aujourd'hui de voir des étudiants ne pas avoir connaissance des deux ou trois formules clefs leur permettant de débloquer l'exercice posé en colles ou la 1re question d'une épreuve écrite (l'explication est simple : devant une grande masse de définitions, propositions et théorèmes, le cerveau s'embrouille très vite et n'arrive plus à retenir l'essentiel).

Comment est construit ce livre ?

Un exo par page avec pour chacun d'entre eux un titre.

De cette manière, vous allez pouvoir vous forger une véritable culture mathématique. « Tiens cet exo me rappelle les polynômes de Tchebychev ». « Tiens, celui-là me rappelle le déterminant de Vandermonde ». Quand un exercice est baptisé, il est plus facilement identifié dans votre esprit, tant au point de vue des méthodes utilisées pour le résoudre que par sa conclusion.

Comment utiliser ce livre ?

Vu l'urgence, ne cherchez pas trop longtemps à résoudre l'énoncé proposé. Là aussi, on risque de vous surprendre sur le parti pris de ce livre qui consiste à ne pas se fier au baratin habituel de ceux qui vous disent : « en cherchant, on finit par trouver ». Avec ce genre de phrase (destiné bien souvent à l'élite [qui en général n'achète pas de livres puisqu'ils n'en ont pas besoin] et formulé parfois par des gens qui n'ont jamais appliqué ce genre de précepte à eux-mêmes), beaucoup d'étudiants risquent de perdre inutilement 20 ou 30 min pour un résultat nul.

En effet, les exercices classiques sont parfois le résultat de coups de génies de mathématiciens illustres du passé. À moins d'être génial (ce qui est peut-être votre cas), voulez-vous risquer d'attendre un coup de génie identique ou plutôt essayer de comprendre et d'assimiler efficacement comment ils ont fait ?

Bref, ne cherchez pas inutilement et soyez pragmatique : passez vite à la correction et essayez de la retenir. Laissez reposer une à deux heures (en changeant d'exo par exemple) et essayez de le refaire. Vous serez vite fixés ! Si vous n'y arrivez pas, recommencez ! C'est comme en musique, n'espérez pas jouer un concerto de Chopin sans être passé par des heures et des heures d'entraînement sur des gammes. En maths, c'est pareil n'espérez pas réussir un écrit d'algèbre ou d'analyse de 4 h si vous ne vous êtes pas entraînés à développer tous les déterminants ou retrouver tous les DL classiques, etc., de ce livre.

Sommaire

Algèbre et géométrie 1re année

Analyse et probabilités 1re année

Algèbre et géométrie 1re année

Chapitres concernés :

1. Logique, raisonnement
2. Ensembles et applications
3. Calculs algébriques
4. Nombres complexes, trigonométrie
5. Polynômes
6. Arithmétique
7. Structures algébriques
8. Calcul matriciel
9. Fractions rationnelles
10. Systèmes linéaires
11. Géométrie du plan et de l'espace
12. Espaces vectoriels
13. Applications linéaires
14. Dimension finie
15. Matrices et applications linéaires
16. Déterminants
17. Produit scalaire

Il y a une infinité de nombres premiers

Chapitre concerné : 1. Logique, raisonnement

☐ Ce que montre cet exo

Que les nombres premiers (qui sont des entiers qui n'admettent pas d'autres diviseurs que 1 et eux-mêmes, comme 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23…) sont infinis. Il s'agit d'un résultat d'Euclide.

- **L'énoncé**

On souhaite montrer par l'absurde qu'il y a un nombre infini de nombres premiers.
On suppose qu'il y a un nombre fini de nombres premiers p_1, p_2, …, p_k triés par ordre croissant. On considère l'entier $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$.

1) Montrer que $N+1 > p_k$.

2) Montrer que l'entier $N+1$ n'admet pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même et qu'il est par conséquent premier.

3) Montrer que les questions **1)** et **2)** aboutissent à une contradiction.

- **Corrigé**

1) $N+1 = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$. Comme $p_1 > 2$ (et par conséquent tous les autres p_i), on en déduit que $N+1 > p_k$.

2) Tout d'abord, les entiers 1 et $N+1$ divisent $N+1$. Montrons que ce sont les seuls en considérant k un entier différent de 1 et $N+1$ et qui divise $N+1$. Comme $k \geq 2$, on en déduit que k admet un diviseur premier (car tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier) qui figurent nécessairement parmi la liste des nombres premiers p_1, p_2, …, p_k. Appelons-le donc p_i. Comme p_i divise k, et que k divise $N+1$, on en déduit que p_i divise $N+1$. Par ailleurs p_i divise $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$.

3) Comme p_i divise $N+1$ et p_i divise N, on en déduit que p_i divise leur différence égale à $N+1-N=1$. CONTRADICTION ! (car un nombre premier est supérieur ou égal à 2 et donc ne peut pas diviser 1).
Conclusion : il y a bien un nombre infini de nombres premiers.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le raisonnement par l'absurde : pour montrer que la proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et qu'on aboutit à une contradiction.
2) Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.
3) Un nombre premier est un nombre supérieur ou égal à 2 et qui n'admet pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même.
4) Lorsque a divise b et c, alors a divise leur différence $b-c$.

$\sqrt{2}$ est irrationnel

Chapitre concerné : 1. Logique, raisonnement

☐ Ce que montre cet exo

Que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel (grâce à un raisonnement par l'absurde).

- **L'énoncé**

1) Montrer l'implication directe : n pair $\Rightarrow$ n^2 pair.

2) En utilisant un raisonnement par contraposée, montrer que n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.

3) En déduire l'équivalence n pair $\Leftrightarrow$ n^2 pair.

4) Application : montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel en utilisant un raisonnement par l'absurde.

- **Corrigé**

1) Supposons n pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$.

On a donc : $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$, ce qui prouve que n^2 est pair (car de la forme $2j$).

Ainsi, on vient de montrer l'implication : n pair $\Rightarrow$ n^2 pair.

2) La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$. La contraposée de la proposition n^2 pair $\Rightarrow$ n pair est donc : n impair $\Rightarrow$ n^2 impair. Prouvons cette contraposée :

Supposons n impair, alors $n = 2k + 1$ donc $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, ce qui prouve que n est impair (car de la forme $2j+1$). Ainsi on vient de montrer n impair $\Rightarrow$ n^2 impair, strictement équivalente à la proposition n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.

3) Comme n pair $\Rightarrow$ n^2 pair (question 1)) et n^2 pair $\Rightarrow$ n pair (question **2)**), on en déduit l'équivalence n pair $\Leftrightarrow$ n^2 pair.

4) Supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p,q) = 1$. En passant au carré, on a : $2 = \frac{p^2}{q^2}$ soit $p^2 = 2q^2$. Cela prouve que p^2 est pair et donc que p est pair : il existe k entier tel que $p = 2k$.

L'égalité $p^2 = 2q^2$ devient alors : $(2k)^2 = 2q^2$ donc $4k^2 = 2q^2$ donc $2k^2 = q^2$. Cela prouve que q^2 est et donc que q est pair . Bilan : Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p,q) = 1$ alors p et q sont pairs (donc divisibles par 2). CONTRADICTION ! (car alors $\text{pgcd}(p,q) \neq 1$). Conclusion : $\sqrt{2}$ est bien un nombre irrationnel.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Un entier pair est un entier de la forme 2j. Un entier impair est un entier de la forme $2j+1$.
2) La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$.
3) Montrer l'équivalence $A \Leftrightarrow B$ revient à montrer $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.
4) Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.
5) Le principe du raisonnement par l'absurde.

Une récurrence pour une somme

Chapitre concerné : 1. Logique, raisonnement

☐ Ce que montre cet exo

Il montre comment démontrer la formule $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ par récurrence.

- **L'énoncé**

En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ pour $n \geq 1$.

- **Corrigé**

Soit P_n la propriété « $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation : P_1 est vraie car $1=\dfrac{1\times 2}{2}$.

Hérédité : Supposons P_n vraie (c'est-à-dire que $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$), et montrons que P_{n+1} est encore vraie (c'est-à-dire que $1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$).

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\underbrace{1+2+3+\cdots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Conclusion : comme P_1 est vraie, et que P_n est héréditaire, P_n est vraie pour $n \geq 1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Le principe du raisonnement par récurrence (initialisation, hérédité, conclusion).

TOUS LES EXOS MATHÉMATIQUES

EXERCICES CORRIGÉS / CONSEILS

Pourquoi, parmi les innombrables livres de Prépa, acheter ce livre ?

Voici le top 5 des bonnes raisons !

- Raison n° 5 : Parce que je n'ai pas le temps de lire des manuels de 1000 pages.
- Raison n° 4 : Parce que je suis perdu et que je ne sais pas par où commencer pour enfin comprendre quelque chose.
- Raison n° 3 : Parce que j'ai envie de faire le tour du programme à l'aide d'exemples basiques, fondamentaux et simples.
- Raison n° 2 : Parce qu'il est facilement transportable : très utile pour réviser dans les couloirs avant une colle de Maths.
- Raison n° 1 : Parce que le gros DS, c'est demain et que j'ai la curieuse impression de ne plus rien savoir…

Dans ce livre, près de 160 exos incontournables ont été choisis et testés par de vrais étudiants parfois perdus ou démoralisés. Si c'est votre cas, nous faisons le pari que « quand vous les aurez vus, ça ira tout de suite mieux ! »

Thomas Petit *est professeur agrégé de Mathématiques au lycée Marie Curie de Nogent-sur-Oise, examinateur en Classe préparatoire et auteur de plusieurs livres.*

www.editions-ellipses.fr

9 782340 028685