ECE

À VOS MATHS

12 ANS *de sujets*

posés au concours EDHEC

exercices et problèmes corrigés

Sujets mis en conformité avec le nouveau programme

CONSEILS de MÉTHODE
CONSEILS de RÉDACTION
AIDE à la RÉSOLUTION
LISTE DES FAUTES à ÉVITER
CONTRE-EXEMPLES SIMPLES

8e édition actualisée

Sylvain RONDY

ellipses

ECE

À VOS MATHS

12 ans de sujets corrigés posés au concours EDHEC de 2008 à 2019*

***** *Les sujets de 2008 à 2014 ont été mis en conformité avec le nouveau programme entré en vigueur pour le concours 2015*

8e édition actualisée

Sylvain RONDY
Agrégé de mathématiques
Professeur en classe préparatoire au lycée Saint-Jean (Douai)

ellipses

ISBN 99782340-053397

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Voici la huitième édition de À VOS MATHS : elle contient les épreuves du concours EDHEC posées entre 2008 et 2019. Chaque énoncé est suivi de conseils (méthode, rédaction, etc), ainsi que des corrigés détaillés et des barèmes.
Outre la table des matières, le lecteur trouvera au début de cet ouvrage plusieurs tableaux assez utiles : un tableau thématique indiquant dans quelle épreuve on peut trouver tel ou tel thème, un tableau permettant de repérer les exercices accessibles aux étudiants de première année, et enfin un tableau proposant un timing pour chaque épreuve.

Cet ouvrage est destiné en tout premier lieu aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles de commerce et de management de l'option économique, qu'ils soient en première ou en deuxième année, mais pourra également intéresser les étudiants de L1-L2 dont le cursus contient des mathématiques.

L'épreuve de mathématiques du concours d'entrée à l'EDHEC est présentée par un très grand nombre de candidats, c'est l'une des épreuves comptant le plus grand nombre d'inscrits (elle est, à ce jour, choisie par quatre autres écoles dont AUDENCIA et GEM. C'est donc une épreuve incontournable à laquelle presque tous les candidats doivent se préparer.
Sa structure (trois exercices et un problème) est la garantie qu'une grande partie des connaissances exigibles en fin de classe préparatoire y est abordée chaque année : elle est donc idéale, que ce soit pour une remise à niveau ou pour un approfondissement des connaissances et des techniques de résolution.

Le lecteur trouvera dans ce livre l'intégralité des sujets posés au concours d'entrée à l'EDHEC entre 2008 et 2019, accompagnés de leurs corrigés, rédigés de façon très détaillée (ces corrigés ne sont pas des modèles de copie car ils contiennent des indications destinées à bien faire comprendre au lecteur comment se dessine la solution) et surtout d'une rubrique très fournie d'indications (conseils de méthode, conseils de rédaction, aide à la résolution et liste des fautes à éviter, assortie de contre-exemples simples), ces trois parties étant nettement séparées.
Cet ouvrage n'est donc pas un simple recueil d'annales mais un outil précieux d'aide à la réflexion.
Certains énoncés ont été légèrement modifiés pour en corriger quelques maladresses ou erreurs typographiques.

On peut envisager deux façons de travailler avec cet ouvrage : un travail thématique (voir le tableau correspondant) permettant de mettre au point les méthodes attachées au thème choisi, ou un travail en temps réel consistant à se donner entre quatre et six heures pour traiter une épreuve entière afin de s'évaluer, par exemple, pendant les révisions de fin d'année.
Dans les deux cas, lorsqu'une question n'est pas traitée, il faut lire en priorité les conseils de méthode et, si cela ne suffit pas, consulter l'aide à la résolution, puis, en dernier lieu, lire le corrigé. Pour chaque question traitée, il est prudent de consulter les conseils de rédaction, afin de vérifier que l'on a pensé à tout, et aussi la rubrique ″les fautes qu'il ne fallait pas faire″ car on peut parfois trouver le bon résultat en commettant des erreurs ou même des fautes graves.
L'épreuve est très longue (très peu de candidats la traitent intégralement) mais elle permet, par la diversité des exercices proposés, à chaque candidat de s'exprimer.
Dans l'optique du concours, il faut savoir que le barème appliqué chaque année permet d'obtenir une excellente note sans pour autant avoir traité l'intégralité de l'épreuve. L'essentiel est de ne pas quitter la salle d'examen en regrettant de ne pas avoir eu le temps de faire (ou même de lire) une question : il ne faut donc pas s'accrocher trop longtemps sur une question qui résiste afin de se laisser le temps de pouvoir tout aborder. Il est cependant inutile de donner des réponses sans preuve, ceci fait peut-être gagner du temps mais ne rapporte assurément aucun point.
J'espère très sincèrement que ce livre sera utile à tous les futurs candidats à cette épreuve.

Je remercie Corinne Baud, des éditions Ellipses, pour ses conseils et sa volonté d'éditer cet ouvrage pour la huitième fois.
Je remercie également Veronica, mon épouse, pour sa présence bienveillante et son amour, Lou, ma fille, qui vit sa vie loin des maths (bouhhh !), Tom, mon fils, qui a définitivement opté pour la physique (arghhh !), ainsi que mes élèves qui, chaque année, m'obligent, par leur vivacité mais aussi leurs doutes, à réfléchir encore et encore sur la façon de rendre mon enseignement mieux adapté et plus efficace.
Le lecteur est invité à me faire part de ses remarques à l'adresse ci-dessous. De notre correspondance naîtra un peu plus de lumière !

sylvain.rondy@ac-lille.fr

Table des matières

Tableau thématique

Année	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	09	08
ANALYSE												
Suites récurrentes							EX1	EX1		EX2		
Suites implicites				EX2							EX1	EX1
Suites intégrales	EX3	PB										
Séries	EX3	PB		PB	PB		EX1	EX1		EX2		
Continuité							PB		EX1		EX1	
Dérivabilité, classe		PB		EX2		EX2			EX1		EX1	
Étude de fonctions		PB				EX1			EX1		EX1	EX1
Th de la bijection				EX2		EX1					EX1	EX1
Equivalents, DL	EX3	PB		EX2		EX2		EX1			EX1	
Acc finis												PB
Calcul intégral	EX3	PB	EX2		EX3		PB	PB				PB
Encadrer une intégrale	EX3			PB	PB				EX1			PB
Fonctions intégrales		PB		EX2		EX2			EX1			
Intégrales impropres					EX3				PB		EX3	EX3
Fonctions de $\mathbb{R}^2$ ds $\mathbb{R}$			EX1		EX3					EX1		
INFORMATIQUE												
Suites, matrices	EX3		EX2	EX2	EX1		EX1	EX1				PB
Courbes, nappes			EX1									
Simulation, probas	EX2 PB	EX2 EX3	EX3 PB	EX3 PB	EX2 PB	EX3 PB	EX3 PB	EX3 PB	EX3 PB	PB	EX2	
Calcul approché		PB										
ALGEBRE LINEAIRE												
Formule du binôme	EX1		PB							PB		EX2
Matrice inverse	EX1	EX1		EX1						PB		EX2
Réduction (matrices)				EX1	EX1	EX1	EX2			PB	PB	
EV, endos	EX1	EX1	EX2			EX1					PB	
Noyaux, images	EX1	EX1			EX1		EX2	EX2	EX2	PB	PB	
Réduction (endos)	EX1			EX1				EX2	EX2	PB		EX2
Polynôme annulateur	EX1			EX1								
PROBABILITES												
VA discrètes	EX2	EX2	PB	PB	PB	EX3	EX3	EX3	EX3	PB	EX2	PB
Lois conditionnelles			PB	PB	PB				EX3	PB		PB
Σ de VA discrètes		EX2							EX3			
VA à densité	PB	EX3	EX3	EX3	EX2	PB	PB	PB	PB	EX3	EX3	EX3
Fonction de VA			EX3	EX3	EX2	PB	PB	PB	PB	EX3	EX2	EX3
Convergences			EX3				PB			PB		PB
Estimation	PB	EX3				EX3		PB				

Accès aux étudiants de première année

Ce tableau précise quels exercices (ou parties d'exercices) peuvent être traités par des étudiants de première année, ce qui ne signifie pas qu'ils sont forcément faciles.

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Problème
2019	**Oui (q1, q2)**	**Oui (sauf info)**	**Oui**	**Oui (partie 1)**
2018	**Oui (q1, q2)**	**Oui (q1 à q4)**	**Oui (q1, q2)**	**Oui (q1, 2, 3, 7, 8)**
2017			**Oui (q1, q2)**	**Oui (sauf partie 4)**
2016		**Oui (q1, q2)**	**Oui (q1, q2)**	**Oui (q1, q2)**
2015				**Oui (sauf partie 2)**
2014		**Oui (sauf q 6)**	**Oui (sauf q 3)**	**Oui (difficile)**
2013	**Oui**		**Oui**	
2012			**Oui**	
2011	**Oui**		**Oui (sauf q 3 et q 4)**	
2010		**Oui(sauf fin de q 5e)**		**Oui (sauf I, II 2 et II 5b)**
2009	**Oui (sauf q 2)**	**Oui**		
2008	**Oui**			**Oui (sauf partie 2**

Proposition de timing

Ce tableau donne une indication du temps qu'il faut passer sur chaque exercice d'une épreuve, en admettant que l'on y consacre quatre heures.
Cela dit, tant que tout se passe bien au cours de la résolution d'un exercice, il faut continuer et, éventuellement, dépasser le temps indiqué (il serait en effet dommage de ne pas traiter des questions que l'on sait résoudre sous prétexte de respecter son tableau de marche).
Au contraire, si un exercice paraît peu inspirant, ou même inaccessible, il ne faut pas perdre inutilement son énergie et son temps à vouloir le traiter : mieux vaut le garder pour la fin s'il reste du temps.

	Exercice 1	**Exercice 2**	**Exercice 3**	**Problème**
2019	**1 / 2 h**	**3/4 h**	**3/4 h**	**2 h**
2018	**3/4 h**	**3/4 h**	**1 h**	**1 h 1/2**
2017	**1 / 2 h**	**1/2 h**	**1 h 1/4**	**1 h 3/4**
2016	**3/4 h**	**3/4 h**	**1/2 h**	**2 h**
2015	**3/4 h**	**3/4 h**	**3/4 h**	**1 h 3/4**
2014	**3/4 h**	**3/4 h**	**1/2 h**	**2 h**
2013	**1/2 h**	**3/4 h**	**1 h**	**1 h 3/4**
2012	**1/2 h**	**1/2 h**	**1 h**	**2 h**
2011	**3/4 h**	**1/2 h**	**1 h**	**1 h 3/4**
2010	**1/2 h**	**1 h**	**3/4 h**	**1 h 3/4**
2009	**1 h**	**3/4 h**	**3/4 h**	**1 h 1/2**
2008	**3/4 h**	**3/4 h**	**3/4 h**	**1 h 3/4**

Sujet 2019

Exercice 1 ....

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1) a) Déterminer $(A-I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

2) On pose $A=N+I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n=-1$.

3) a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

4) On pose $u_1=(f-Id)(e_1)$ et $u_2=e_1+e_3$.

a) Montrer que le rang de $f-Id$ est égal à 1.

b) Justifier que (u_1,u_2) est une base de $\operatorname{Ker}(f-Id)$.

5) a) Montrer que la famille (u_1,u_2,e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

6) Soit la matrice $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

7) On note $(E_{1,1},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,1},\ E_{2,2},\ E_{2,3},\ E_{3,1},\ E_{3,2},\ E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i,j) de $[\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\left(E_{1,1}+E_{3,3},\, E_{1,2},\, E_{1,3},\, E_{2,2},\, E_{2,3}\right)$.
Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

b) Soit N une matrice quelconque de E. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \Leftrightarrow \left(P^{-1}NP\right)T = T\left(P^{-1}NP\right)$$

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont une base est la famille :

$$\left(P\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right)P^{-1},\, PE_{1,2}P^{-1},\, PE_{1,3}P^{-1},\, PE_{2,2}P^{-1},\, PE_{2,3}P^{-1}\right)$$

Exercice 2 ....

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le i-ième tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1) Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

2) a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $P_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}\left(B_i\right) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3) On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée et qui vaut 0 sinon.

a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que $P\left([X = k]\cap[Y = 0]\right) = \dfrac{n-k}{n(n-1)}$.

b) En déduire $P(Y = 0)$.

c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

4) Simulation informatique.
On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.

a) Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X.
On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB+1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
nB=n-1
X=1
u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u<nB+1
   nB=----
   u=grand(1,1,'uin',1,----)
   X=----
end
disp(X, 'la boule noire est apparue au tirage N°')
```

b) Compléter les lignes (4) et (8) ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par X, la valeur prise par Y.

```
(1)  n=input('entrez une valeur pour n :')
(2)  nB=n-1
(3)  X=1
(4)  Y=----
(5)  u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
(6)  while u<nB+1
(7)       nB=----
(8)       if u==1 then Y=----
(9)       end
(10)      u=grand(1,1,'uin',1,----)
(11)      X=----
(12) end
(13) disp(X, 'la boule noire est apparue au tirage N°')
(14) disp(Y, 'la valeur de Y est')
```

Exercice 3 ....

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt$. On a donc, en particulier $u_0 = 1$.

1) Déterminer u_1 et u_2.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).

a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$ puis celle de $\int_{0}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$.

c) Montrer que, pour tout réel t, on a : $e^{-t^2} \geq 1-t^2$.

d) En déduire que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ puis donner la limite de la suite (u_n).

4) Calculer $\int_0^1 (1-t)^n \, dt$ puis montrer que $u_n \geq \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?

5) a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

b) En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

c) On admet l'équivalent $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$. En écrivant $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

6) Informatique.
On admet que, si `t` est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de `t`.
Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=1:n
m=2*n+1
y=1:m
v=----
w=----
u=----*v^2/w
disp(u)
```

Problème ....

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

Dans cet exercice, θ (theta) désigne un réel élément de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

On considère la fonction *f* définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$$

1) Montrer que *f* peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

2) Montrer que *X* possède une espérance et une variance et les déterminer.

3) Déterminer, pour tout réel *x*, l'expression de $F(x)$ en fonction de *x* et θ.

4) a) Montrer que l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ possède une seule solution, notée M_e, que l'on déterminera.

b) Montrer que :

$$\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\ 2^x(1-x)\leq 1$$

c) Comparer $E(X)$ et M_e.

5) Soit *a* un réel supérieur ou égal à 1 et *b* un réel strictement positif.

a) Montrer que $P_{(X>a)}(X>a+b)=\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}$.

b) Déterminer la limite de cette quantité lorsque *a* tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable X représente la durée de vie d'un certain appareil.

Partie 2 : simulation d'une variable aléatoire

6) On pose $Y=\ln X$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que *X*. On note *G* sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel *x*, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction *F*.

b) En déduire que *Y* suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

7) On rappelle qu'en `Scilab` la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire des commandes `Scilab` utilisant `grand` et permettant de simuler X.

Partie 3 : estimation d'un paramètre

On suppose dans la suite que le paramètre θ est inconnu et on souhaite en trouver une estimation ponctuelle puis par intervalle de confiance.
On considère pour cela n variables aléatoires $Y_1,\dots,Y_n$ définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

8) On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

a) Justifier que T_n est un estimateur de θ.

b) T_n est-il un estimateur sans biais de θ ?

c) Calculer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de θ. T_n est-il un estimateur convergent de θ ?

9) a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable T_n.

b) Établir l'inégalité :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$$

c) En utilisant le fait que $\theta \leq \dfrac{1}{2}$, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 90% lorsque l'on choisit $n = 1000$.

Conseils 2019

Exercice 1 ....

❖ Conseils de méthode

1) a) Calculer d'abord $A-I$ puis $(A-I)^2$ au lieu de développer.

b) Ici, il faut développer, puis écrire une égalité du type $AB=I$ ou $BA=I$.

2) a) La situation est typique de l'utilisation de la formule du binôme de Newton. Pour la fin de la question, il suffit de remplacer N par $A-I$.

b) Avec $n=-1$, il suffit de vérifier que la relation trouvée à la question 1b) donne ce qu'il faut.

3) a) Le polynôme x^2-2x+1 est un polynôme annulateur de la matrice A : on doit en déduire la ou les valeurs propres possibles de A. Ensuite, il faut la ou les tester.

b) On peut raisonner par l'absurde, ce qui évite d'empiéter sur la question 4b).

4) a) Il suffit de chercher le rang de $A-I$, c'est la même chose.

b) Le plus pratique est d'expliciter les vecteurs u_1 et u_2 puis de vérifier qu'ils forment bien une base de $\text{Ker}(f-Id)$.

5) a) Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, il suffit de montrer que (u_1, u_2, e_1) est libre.

b) Les colonnes de T contiennent, dans l'ordre, les coordonnées de $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(e_1)$ dans la base (u_1, u_2, e_1).

6) Il faut repérer que P est la matrice donnant les coordonnées de u_1, u_2 et e_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$: c'est donc une matrice de changement de base. La relation demandée est la formule de changement de base.

7) a) Se donner une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ et écrire le système traduisant qu'elle appartient à E.

b) La clé de cette question est dans la relation $A = PTP^{-1}$ qui permet de réécrire l'égalité $NA = AN$.

c) La question précédente a permis de montrer que $N \in F \Leftrightarrow P^{-1}NP \in E$: il suffit maintenant de traduire ceci en se souvenant que l'on dispose d'une famille génératrice de E.

❖ Conseils de rédaction

1) b) Pour remplacer $(A-I)^2$ par A^2-2A+I, mieux vaut citer le fait que A et I commutent (mine de rien, on a appliqué la formule du binôme de Newton !). Sinon, il faut développer $(A-I)(A-I)=A^2-AI-IA+I^2$ etc.

2) a) Ne pas oublier, ici aussi, de signaler que I et N commutent afin de pouvoir utiliser la formule du binôme de Newton. Il est bien de traiter à part les cas $n=0$ et $n=1$ pour lesquels la somme contient strictement moins de 2 termes.

3) a) Faire attention à ne pas croire que les racines d'un polynôme annulateur sont **les** valeurs propres ! Ce sont seulement les valeurs propres possibles.

4) a) Dire que les colonnes d'une matrice sont toutes proportionnelles prouve seulement que son rang est inférieur ou égal à 1. Il faut signaler qu'au moins une colonne n'est pas nulle pour avoir le rang égal à 1.

b) Ne pas oublier de vérifier que u_1 et u_2 appartiennent à $\operatorname{Ker}(f-Id)$.

5) a) Le système découlant de l'égalité $au_1+bu_2+ce_1=0$ (test de liberté) est très simple à résoudre mais ce n'est pas une raison pour risquer de perdre des points en balançant sans explication que la seule solution est le triplet $(a,b,c)=(0,0,0)$.

7) a) Ayant montré que E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1}+E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3})$, il ne faut pas oublier de vérifier que cette famille est libre pour avoir la dimension de E.

b) Ayant écrit $NA=AN \Leftrightarrow NPTP^{-1}=PTP^{-1}N$, c'est l'inversibilité de P et de P^{-1} qui permet d'avoir *l'équivalence* : $NA=AN \Leftrightarrow P^{-1}NPT=TP^{-1}NP$

❖ Aide à la résolution

1) b) Ayant une égalité du type $AB=I$ ou $BA=I$, on sait, par définition, que A est inversible et que $A^{-1}=B$.

2) a) Ayant écrit la formule du binôme de Newton, il suffit, pour terminer la question, de montrer que, pour tout entier $k\geq 2$, on a $N^k=0$.

3) a) Pour vérifier que 1 est effectivement valeur propre de A, il faut montrer que la matrice $A-I$ n'est pas inversible.

b) Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice I (puisque sa seule valeur propre est 1) et ceci conduit à une absurdité.

4) b) La question 4a) et le théorème du rang permettent de savoir que $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f-Id\right)\right)=2$: il suffit donc, après avoir prouvé que u_1 et u_2 appartiennent à $\mathrm{Ker}\left(f-Id\right)$, de montrer que $\left(u_1,u_2\right)$ est libre pour en faire une base de $\mathrm{Ker}\left(f-Id\right)$.

5) b) Pour trouver $f\left(u_1\right)$ et $f\left(u_2\right)$, il faut traduire le fait que u_1 et u_2 appartiennent à $\mathrm{Ker}\left(f-Id\right)$. En ce qui concerne $f\left(e_1\right)$, tout vient de l'égalité $u_1=\left(f-Id\right)\left(e_1\right)$ qui définit u_1.

7) a) Ayant résolu le système traduisant le fait que $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ appartient à E, on trouve en remplaçant : $M=a\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right)+bE_{1,2}+cE_{1,3}+vE_{2,2}+wE_{2,3}$. On a ainsi une famille génératrice de E.

c) La matrice N appartient à F si et seulement si $P^{-1}NP$ appartient à E, donc si et seulement si $P^{-1}NP=a\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right)+bE_{1,2}+cE_{1,3}+vE_{2,2}+wE_{2,3}$, ce qui permet d'obtenir N par deux multiplications judicieuses.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) a) Le carré d'une matrice ne s'obtient pas en élevant ses coefficients au carré !

b) Le fait qu'il fallait déduire de la question 1a) que A est inversible interdisait la méthode du pivot de Gauss, qui de toute façon, ne permet pas d'écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A (du moins pas de façon immédiate).

2) a) • Sachant que $A=N+I$, il paraît étrange de se sentir obligé de démontrer (souvent par récurrence) que $A^n=\left(N+I\right)^n$: ce n'est pas ça la question !

- "L'aller-retour" suivant est impressionnant d'inutilité :

$$A^n=\left(N+I\right)^n=\left(A-I+I\right)^n=A^n$$

- "Les fautes suprêmes :

$$A^n=\left(N+I\right)^n=N^n+I^n \text{ et } A^n=\left(N+I\right)^n=N^n+nNI+I^n$$

b) Écrire $A^{-1}=\dfrac{1}{N+I}$ mérite les flammes de l'enfer : la division matricielle n'a pas été inventée et ne le sera jamais !

3) a) • Il est vraiment dommage de ne pas penser en termes de polynôme annulateur pour cette question et de s'embarquer dans la réduction, plus ou moins heureuse, de $A-\lambda I$.

• Incroyable de développer $\left(x-1\right)^2$ puis de calculer le discriminant pour trouver que 1 est racine double ! Il y a plus simple, non ?

- Il faut éviter d'écrire que $(x-1)^2$ est **le** polynôme annulateur de A. Tous les multiples de ce polynôme sont aussi des polynômes annulateurs de A.

b) Le fait que 1 soit la seule valeur propre de A ne suffit pas à affirmer que A n'est pas diagonalisable : la preuve, c'est que la matrice I, dont 1 est la seule valeur propre, est diagonalisable.

4) b) On connaissait la dimension de $\operatorname{Ker}(f-Id)$, avec la question 4a) et le théorème du rang, donc il n'était pas nécessaire de se lancer dans la recherche matricielle de $\operatorname{Ker}(f-Id)$! Surtout pas en écrivant des choses telles que $\operatorname{Ker}(f-Id)(x,y,z)=0$ (qui ne veut rien dire du tout).

6) Pour justifier l'inversibilité de P, les maladroits (on a le droit de l'être, mais bon…) qui se lançaient dans la méthode du pivot de Gauss avaient l'obligation de réussir sans faute, et malheureusement, ça n'a pas toujours été le cas…

Exercice 2 ....

❖ Conseils de méthode

1) Ne pas oublier que les tirages ont lieu sans remise !

2) a) Bien analyser ce qu'apporte le fait de savoir que $B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ est réalisé en ce qui concerne le nombre et la couleur des boules restant dans l'urne.

b) Pour $k \geq 2$, on a : $(X=k) = B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k$.

c) Étant donné $X(\Omega)$ et puisqu'il faut reconnaître la loi de X, on doit penser qu'on a affaire à la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$, ce qui permet de vérifier la réponse à la question précédente !

3) a) C'est le même genre de réflexion que pour la question 2b) sauf qu'il faut piocher les $k-1$ boules blanches parmi les boules blanches ne portant pas le numéro 1 : il y a donc, à chaque fois, une issue favorable en moins.

b) On est dans une situation typique d'utilisation de la formule des probabilités totales.

c) Par définition de Y, la loi de Y est une loi de Bernoulli : il reste à trouver son paramètre qui est égal à $P(Y=1)$.

4) a) Il faut comprendre qu'avec les notations données, le nombre de boules présentes dans l'urne est égal à `nB+1`, la boule noire étant codée par `nB+1`. Ensuite, il faut piocher boule par boule sans remise, et tant que l'on n'a pas la boule noire, le nombre de boules blanches diminue d'une unité à chaque fois

b) Pour la ligne 8, trouver quelle valeur on peut donner à `Y` lorsque l'on pioche la boule numérotée 1.

❖ Conseils de rédaction

1) Il ne faut pas se contenter des valeurs extrêmes mais signaler (même rapidement) que tous les cas intermédiaires sont envisageables.

2) a) Il est sympathique de remarquer que puisque $i \geq 2$, l'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ peut se produire, ce qui garantit que la probabilité conditionnelle considérée est bien définie.

b) Il faut d'abord écrire la formule des probabilités composées, et seulement ensuite, remplacer les probabilités conditionnelles par les fractions adéquates. De plus, il est bien de penser au cas particulier $k = 1$.

3) a) Ici aussi, il est bien de penser au cas particulier $k = 1$.

❖ Aide à la résolution

2) a) Sachant que $B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ est réalisé, il reste $n - i$ boules blanches dans l'urne et $n - i + 1$ boules en tout.

b) Attention à ne pas créer de décalage, la probabilité $P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2}}\left(B_{k-1}\right)$ est égale à $\dfrac{n-k+1}{n-k+2}$, d'après la question précédente.

3) a) Même remarque, mais ici, en notant B'_i l'événement « le i-ième tirage donne une boule blanche numérotée 0 », la probabilité $P_{B'_1 \cap \ldots \cap B'_{k-2}}\left(B'_{k-1}\right)$ vaut $\dfrac{n-k}{n-k+2}$.

Enfin, pour simplifier $P\left(\left[X = k\right] \cap \left[Y = 0\right]\right) = \dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{n-3}{n-1} \times \ldots \times \dfrac{n-k}{n-k+2} \times \dfrac{1}{n-k+1}$, mieux vaut avoir recours aux factorielles.

b) La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\left(X = k\right)_{k \in [\![1, n]\!]}$ fait bien l'affaire.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) Écrire $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ est correct, mais poursuivre avec $X(\Omega) = [\![1, n]\!] = \mathbb{N}^*$ ne l'est plus du tout ! De même, un correcteur refusera $X(\Omega) = [1, n]$ qui est bien différent de $[\![1, n]\!]$.

2) a) Pas la peine de "pipoter", le correcteur sait comment on traite la question !

c) • En lisant que X est le rang d'apparition de la boule noire, beaucoup ont cru que X suivait une loi géométrique : ce sont certainement les mêmes qui ont forcé à la question 1) pour trouver $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

• Au contraire, ceux qui avaient $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, étaient tentés de répondre en balançant que X suivait la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. C'était la bonne réponse, mais malheureusement, le bluff ne paie pas !

3) a) Vraiment… ça ne sert à rien de "pipoter" !

b) Dommage de faire cette question et de craquer sur le calcul de $\sum_{k=1}^{n}(n-k)$.

Exercice 3 ....

❖ Conseils de méthode

1) Pour u_2, il est bien de développer $\left(1-t^2\right)^2$, sinon on fait une bêtise !

2) a) Il suffit de montrer que $u_{n+1}-u_n$ est négatif ou nul ou bien (c'est comme on veut) montrer sans calculer $u_{n+1}-u_n$, que $u_{n+1}\leq u_n$.

b) C'est du cours : que manque-t-il à une suite décroissante pour être convergente ?

3) a) Belle référence à la loi normale de paramètres 0 et σ^2 !

b) Il faut choisir la valeur de σ qui permet de passer de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt$ à $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2}\,dt$.

c) On peut étudier la fonction $t\mapsto e^{-t^2}+t^2-1$ ou utiliser la convexité de la fonction exponentielle (à condition de bien rédiger).

d) Il faut élever à la puissance n l'inégalité obtenue à la question précédente, puis utiliser le lien magique : $e^{-nt^2}=\left(e^{-t^2}\right)^n$.

4) Une primitive de $v'v^n$ est $\dfrac{v^{n+1}}{n+1}$. Pour la suite de la question, il faut montrer proprement que $\left(1-t^2\right)^n\geq\left(1-t\right)^n$, puis intégrer de 0 à 1. Enfin, il faut connaître la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n+1}$ (c'est une série usuelle).

5) a) Dans u_{n+1}, on peut poser $u'(t)=1$ et $v(t)=\left(1-t^2\right)^{n+1}$. Attention alors de dériver correctement $\left(1-t^2\right)^{n+1}$.

b) Une récurrence s'impose !

c) Il faut d'abord écrire les équivalents de $(n!)^2$ et de $(2n)!$ puis faire très attention pour simplifier l'équivalent de u_n.

6) Avec `prod(x)`, on obtient n ! et avec `prod(y)`, on obtient $(2n+1)!$.

❖ Conseils de rédaction

1) Éviter d'écrire $u_2=\int_0^1 1-2t^2+t^4 dt$, mais plutôt $u_2=\int_0^1\left(1-2t^2+t^4\right)dt$.

2) a) Si on calcule $u_{n+1}-u_n$, il est bien de citer la linéarité de l'intégration pour regrouper les deux intégrales en une seule. Quelle que soit la méthode choisie, il faudra citer le fait que les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant.

b) Il faut absolument éviter de penser que comme la suite (u_n) est minorée par 0, alors sa limite est nulle ! Par exemple, avec $u_n=e^{1/n}$, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 et pourtant sa limite est égale à 1.

3) b) Pour la fin de la question, utiliser la parité de la fonction $t\mapsto e^{-nt^2}$.

c) Si on utilise la convexité de la fonction exponentielle, il faut au moins signaler que la droite d'équation $y=1+x$ est la tangente à sa courbe représentative au point $(0,1)$.

d) Pour élever à la puissance n, bien s'assurer que tous les termes sont positifs. Ici aussi, il faut citer le fait que les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant (toutes les fois qu'on intègre une inégalité, il faut donner l'ordre des bornes : l'inégalité reste de même sens si les bornes sont dans l'ordre croissant et elle change de sens si les bornes sont dans l'ordre décroissant).
C'est la positivité de e^{-nt^2} qui permet de faire le lien entre $\int_0^1 e^{-nt^2}dt$ et $\int_0^{+\infty}e^{-nt^2}dt$.

4) Pour l'inégalité $u_n\geq\dfrac{1}{n+1}$, même rengaine : signaler qu'on intègre des fonctions continues, bornes dans l'ordre croissant.

5) a) Ne pas oublier de citer la classe C^1 des fonctions u et v sur $[0,1]$.

❖ Aide à la résolution

2) a) On trouve $u_{n+1}-u_n=-\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n dt$.

b) Il suffit de vérifier que la suite (u_n) est minorée par 0.

3) a) On doit reconnaître l'intégrale d'une densité (qui vaut 1).

b) Il suffit de choisir $\sigma=\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ pour conclure.

c) Pour ceux qui ont étudié la fonction $f:t\mapsto e^{-t^2}+t^2-1$, alors on a $f'(t)=-2te^{-t^2}+2t=2t\left(1-e^{-t^2}\right)$ et le signe de $f'(t)$ est facile à déterminer car la parenthèse est positive puisque $-t^2\leq 0$.

d) Ayant obtenu $u_n\leq\int_0^1 e^{-nt^2}dt$, il faut majorer plus avec $\int_0^1 e^{-nt^2}dt\leq\int_0^{+\infty}e^{-nt^2}dt$.

4) Pour établir que $u_n \geq \dfrac{1}{n+1}$, on peut partir de $\left(1-t^2\right)^n = (1-t)^n (1+t)^n$ et remarquer que, comme $1+t \geq 1$, on a $(1+t)^n \geq 1$ d'où : $\left(1-t^2\right)^n \geq (1-t)^n$.

Pour la fin de la question, la série de terme général $\dfrac{1}{n+1}$ est une série de Riemann de paramètre 1, donc divergente. Il est inutile d'utiliser l'équivalent $\dfrac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ car on est juste face à un décalage : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k} = +\infty$.

5) a) Ayant obtenu $u_{n+1} = 2(n+1)\int_0^1 t^2 \left(1-t^2\right)^n dt$, il est pratique de reconnaître que l'intégrale restante a déjà été calculée à la question 2a) et est égale à l'opposé de $u_{n+1} - u_n$.

b) Pour l'hérédité, la grosse astuce est de multiplier $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3} \times \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$ par $\dfrac{2n+2}{2n+2}$.

c) On trouve $(n!)^2 \underset{+\infty}{\sim} 2\pi n \times n^{2n} e^{-2n}$ et $(2n)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n} e^{-2n}$.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

Pour tout l'exercice, il est vilain d'oublier le "dt" dans les intégrales et encore plus vilain d'écrire « **la** primitive » au lieu de « **une** primitive ».

1) Pour le calcul de u_2, il est ballot d'écrire $\left(1-t^2\right)^2 = 1-t^4$.

2) a) • Il n'est pas question d'oublier de citer l'ordre des bornes pour conclure sur le signe d'une intégrale lorsqu'on a le signe de la fonction intégrée.

• Avoir $u_0 > u_1 > u_2$ n'autorise pas à conclure que la suite (u_n) est décroissante !

• Écrire « la suite (u_n) est décroissante pour tout n de $\mathbb{N}$ » n'a aucun sens.

• La faute classique $u_{n+1} = u_n \times u_1$ fait des dégâts. Dégâts mérités car il n'est vraiment pas bien de confondre indice et exposant.

• Le pompon consiste à écrire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n+1} dt}{\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt} = \dfrac{\left(1-t^2\right)^{n+1}}{\left(1-t^2\right)^n} = 1-t^2$: la deuxième égalité est repoussante !

b) • Une suite décroissante n'est jamais minorée par son premier terme ! Quant à penser qu'elle soit minorée par son dernier terme, c'est mieux mais très troublant : qu'est-ce que le dernier terme d'une suite ???

• Avoir trouvé $u_2 < 0$ à la première question et affirmer sans états d'âme que la suite (u_n) est positive est un peu gonflé.

• L'arnaque : « la suite (u_n) est décroissante et majorée donc elle converge ».

• Il faut arrêter de croire qu'une intégrale est toujours positive, même avec les bornes dans l'ordre croissant. On a par exemple $\int_0^1 -1\,dt = [-t]_0^1 = -1$.

3) a) Il est dommage de ne pas se souvenir de la loi normale…

c) • Écrire « la courbe de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente à l'origine » est pour le moins maladroit puisque ladite courbe ne passe pas par l'origine ! Il fallait écrire « tangente au point d'abscisse 0 » ou « tangente au point (0,1) ».

• En étudiant la fonction h : $t \mapsto e^{-t^2} + t^2 - 1$, on avait $h'(t) = 2t\left(1 - e^{-t^2}\right)$ mais il ne fallait pas plomber l'ambiance en écrivant :

$$1 - e^{-t^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-t^2} \Leftrightarrow 0 \geq -t^2 \Leftrightarrow t^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$$

La dernière équivalence est fausse et après l'avant-dernière on était en droit de conclure que c'était toujours vrai.

d) • La question des voleurs ! Le passage de $\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt$ à $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\,dt$ a donné lieu à pas mal d'escroqueries diverses et variées, à base de baratins fumeux, voire même d'affirmations assénées sans preuve !

• Comment peut-on (certainement dans un moment d'égarement) écrire l'ineptie suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2}$? En plus, ça n'arrange rien puisque l'on n'a plus accès au théorème d'encadrement.

4) • Il n'est pas bien (mais pas bien du tout !) d'écrire $(1-t)^n = 1 - t^n$.

• Il n'est pas bien non plus de penser qu'une primitive de $t \mapsto (1-t)^n$ est $t \mapsto \frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}$: il y a un problème de signe.

5) b) L'hérédité de la récurrence a fait craquer les courageux qui l'ont tentée et souvent ils ont dû s'arranger un peu avec la vérité.

Problème ....

❖ Conseils de méthode

Partie 1

1) Il faut démontrer les trois points suivants : f est bien définie et positive sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 1, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

2) Pour les calculs de $E(X)$ et $E(X^2)$, on peut :

- Soit reconnaître des intégrales de Riemann absolument convergentes puis calculer les intégrales partielles $\int_1^x t\,f(t)\,dt$ et $\int_1^x t^2 f(t)\,dt$, et enfin prendre leur limite quand x tend vers $+\infty$.
- Soit calculer prudemment les intégrales partielles en question et, prudemment toujours, prendre leur limite quand x tend vers $+\infty$ (ce qui est fait dans le corrigé).

3) Le seul démarrage possible est le suivant : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

4) a) Montrer d'abord que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ n'a pas de solution sur $]-\infty, 1[$. Ensuite, prier pour que l'expression de $F(x)$ soit la bonne ! En l'occurrence, on doit résoudre $1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} = \frac{1}{2}$ sur $[1, +\infty[$.

b) On peut étudier la fonction $h : x \mapsto 2^x(1-x)$.

c) Il faut utiliser l'inégalité obtenue à la question 4b) en remplaçant x par θ.

5) a) Le conditionnement n'apportant aucun renseignement efficace, il faut revenir à la définition originelle d'une probabilité conditionnelle.

b) La limite n'est pas indéterminée. De plus, l'interprétation ne doit pas seulement être un vague commentaire de la valeur trouvée pour la probabilité.

Partie 2

6) a) Une seule façon de démarrer : $G(x) = P(Y \le x) = P(\ln X \le x)$. Ensuite transformer l'événement $(\ln X \le x)$ en un événement concernant X et arriver à $G(x) = F(?)$

b) Il faut remplacer $F(?)$ grâce au résultat obtenu à la question 3).

7) Il faut simuler la variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle trouvée à la question 6b) puis en prendre l'exponentielle puisque $X = e^Y$.

Partie 3

8) a) C'est une question de cours.

b) Il suffit de calculer l'espérance de T_n et voir si elle est égale à θ ou pas.

c) On a par définition $r_\theta(T_n)=V(T_n)+b_\theta(T_n)^2$, où $b_\theta(T_n)$ désigne le biais.

9) a) C'est aussi une question de cours : un cadeau fait à ceux qui savent.

b) Ayant obtenu à la question 9a) l'inégalité $P(|T_n-a|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{1}{n\varepsilon^2}$, valable pour $\varepsilon>0$, il faut passer à l'événement contraire puis faire évoluer en commençant par se débarrasser de la valeur absolue grâce à l'égalité classique :

$$(|T_n-\theta|<\varepsilon)=(-\varepsilon<T_n-\theta<\varepsilon)$$

c) Avec $\theta\leq\dfrac{1}{2}$, on peut établir que $1-\dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2}\geq1-\dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$. Il ne reste plus qu'à faire $n=1000$ et trouver la bonne valeur pour ε.

❖ Conseils de rédaction

Partie 1

1) Il ne faut pas saboter la positivité et la continuité, même si tout paraît évident : il faut justifier proprement. Quant au calcul de l'intégrale $\int_1^{+\infty}f(t)\,dt$, on calcule d'abord $\int_1^x t\,f(t)\,dt$ puis il est important de signaler que $-\dfrac{1}{\theta}<0$ avant de pouvoir conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\frac{1}{\theta}}=0$.

2) Mêmes précautions à prendre pour les calculs de $E(X)$ et $E(X^2)$, à moins d'avoir anticipé en reconnaissant des intégrales de Riemann convergentes du fait que $\theta<\dfrac{1}{2}$.

4) a) Ne pas oublier l'étude sur $]-\infty,1[$ afin d'être certain de l'unicité de M_e.

b) Ayant repéré que $h(0)=1$, il n'est pas question d'affirmer, sans étudier réellement le signe de sa dérivée, que $h:x\mapsto2^x(1-x)$ est décroissante, ce qui donne bien sûr le résultat attendu.

c) Ayant $\dfrac{M_e}{E(X)}\leq1$, il est de bon goût de signaler que $E(X)>0$ avant de conclure $M_e\leq E(X)$.

5) a) La fonction F étant définie différemment sur $]-\infty,1[$ et sur $[1,+\infty[$, il est essentiel de signaler que $a\geq1$ et $a+b\geq1$ avant de remplacer $F(a)$ et $F(a+b)$

respectivement par $1-\dfrac{1}{a^{1/\theta}}$ et $1-\dfrac{1}{(a+b)^{1/\theta}}$. Si l'on avait eu $a<1$, on aurait obtenu $F(a)=0$ et pas $F(a)=1-\dfrac{1}{a^{1/\theta}}$.

Partie 2

6) a) Pour justifier l'égalité $P(\ln X \leq x)=P(X \leq e^x)$, il faut citer le fait que exp est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, ce qui garantit que les deux événements $(\ln X \leq x)$ et $(X \leq e^x)$ sont égaux. La simple croissance d'exp ne donnerait, par définition, que l'inclusion $(\ln X \leq x) \subset (X \leq e^x)$ et on voit bien que l'inclusion inverse est donnée par la croissance du log népérien (d'où la bijectivité). En revanche, citer la stricte croissance est suffisant.

b) Il est bien de penser à écrire que $\dfrac{1}{\theta}>0$ avant de parler de loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{\theta}$.

7) Attention ! Ici, on a $\lambda=\dfrac{1}{\theta}$ donc $\dfrac{1}{\lambda}=\theta$.

Partie 3

8) b) Il faut citer la linéarité de l'espérance pour calculer celle de T_n.

c) Il faut citer l'indépendance mutuelle des variables Y_k pour obtenir l'égalité :

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)=\sum_{k=1}^{n} V(Y_k)$$

9) a) Penser à rappeler que T_n a un moment d'ordre 2 (ou que T_n a une espérance et une variance) pour pouvoir écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

b) Pour conclure la question, il faut justifier l'inclusion :

$$(\ \theta \in \,]T_n-\varepsilon, T_n+\varepsilon[\ ) \subset (\ \theta \in [T_n-\varepsilon, T_n+\varepsilon]\ )$$

On peut aussi, dès le départ, justifier l'inclusion :

$$(\ -\varepsilon < T_n-\theta < \varepsilon\ ) \subset (\ -\varepsilon \leq T_n-\theta \leq \varepsilon\ )$$

❖ Aide à la résolution

Partie 1

1) Pour trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^{1+\frac{1}{\theta}}}$, il est bien d'écrire $\frac{1}{x^{1+\frac{1}{\theta}}} = x^{-1-\frac{1}{\theta}}$, sauf si l'on a appris par cœur que, lorsque $\alpha \neq 1$, une primitive de $x \mapsto \frac{u'(x)}{u^{\alpha}(x)}$ est $x \mapsto \frac{-1}{(\alpha-1)u^{\alpha-1}(x)}$.

2) Même remarque que ci-dessus.

3) Avec $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, il faut distinguer les cas $x < 1$ et $x \geq 1$. Dans ce dernier cas, la relation de Chasles s'impose, mais elle est inutile dans le premier.

4) a) L'équation $x^{\frac{1}{\theta}} = 2$ a pour solution $x = 2^{\theta}$ (inutile de s'embarquer avec des logarithmes).

b) Le signe de $h'(x) = 2^x((1-x)\ln 2 - 1)$ n'est pas si compliqué que ça, si on se souvient que *x* appartient à $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et que $\ln 2 < \ln e = 1$.

c) Question impossible à faire si l'on n'a pas trouvé $E(X) = \frac{1}{1-\theta}$ et $M_e = 2^{\theta}$! Sinon, il suffit de constater que l'inégalité de la question 4b) devient $\frac{M_e}{E(X)} \leq 1$ en l'appliquant avec $x = \theta$.

5) a) On a l'inclusion $[X > a+b] \subset [X > a]$ qu'il faut justifier correctement par le fait que $b \geq 0$, ce qui est le cas puisque l'on a $b > 0$.

Partie 2

6) a) Il est bien de démarrer en donnant $Y(\Omega)$, ce qui fait cadeau de la valeur de $G(x)$ lorsque *x* appartient à $\mathbb{R}_-^*$.

b) Faire attention au fait qu'ici, on a $G(x) = F(e^x)$ et il faut discuter sur le fait que e^x est, ou pas, supérieur ou égal à 1 pour pouvoir remplacer. Si on a anticipé en donnant $Y(\Omega)$, comme conseillé juste au-dessus, la discussion est simplifiée.

Partie 3

8) c) Une condition suffisante pour que T_n soit un estimateur convergent de θ est : $\lim_{n \to +\infty} r_{\theta}(T_n) = 0$.

9) b) Il faut savoir écrire les enchaînements permettant de passer de $(-\varepsilon < T_n - \theta < \varepsilon)$ à $(\theta \in]T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon[)$.

c) Il faut choisir ε pour que $1 - \dfrac{1}{4000\varepsilon^2}$ soit au moins égal à 0,9.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

Partie 1

1) • C'est une vraie catastrophe que de comprendre $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\theta}} & \text{si } x \geq 1 \\ \theta x & \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$, au lieu de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$. Que serait donc ce θx ne correspondant à aucune valeur de x ?

• Balancer comme une évidence que la fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$, alors qu'elle ne l'est pas en 1, relève d'une légèreté coupable et forcément sanctionnée. D'autant plus que ce point de discontinuité ne gêne en rien pour conclure.

2) Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1/\theta}}$ n'est pas $t \mapsto \ln\left(t^{1/\theta}\right)$.

3) • Enfonçons le clou : il faut éviter d'écrire « **la** primitive » ! Tout élève de prépa doit savoir qu'une fonction continue possède une infinité de primitives.

• Il faut absolument procéder à quelques vérifications avant de valider la fonction de répartition trouvée : par exemple, si l'on trouve $F(x) = \dfrac{1}{x^{1/\theta}}$ sur $[1, +\infty[$, on a une fonction de répartition décroissante, ce qui n'est pas correct. De plus, elle tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui n'est pas, non plus, correct ! De même, si l'on trouve une fonction de répartition qui n'est pas continue en 1, c'est qu'il y a un problème car la fonction de répartition d'une variable **à densité** doit être continue sur $\mathbb{R}$.

4) a) Il n'est pas bien d'écrire « *F* est une fonction de répartition donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ ». On a des contre-exemples dans le cours : fonctions de répartition de toutes les variables discrètes ou de variables suivant les lois uniformes à densité ou exponentielle.

b) • La faute faite par presque tout le monde : la dérivée de $x \mapsto 2^x$ qui serait $x \mapsto x2^{x-1}$! Attention à ne pas confondre $x \mapsto k^x$ et $x \mapsto x^k$: la première est une fonction exponentielle, la deuxième est une fonction polynomiale. Leurs dérivées respectives sont $x \mapsto \ln k \times k^x$ et $x \mapsto k\,x^{k-1}$.

- Bricoler le membre de gauche de l'inégalité était respectable, mais c'était voué à l'échec si l'on restait honnête… En revanche, écrire « On sait que, comme x appartient à $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, alors on a $2^x \leq 1$ » est un bel exemple d'escroquerie. En fait, on a : $1 \leq 2^x \leq \sqrt{2}$.

5) b) • Trouver $\lim\limits_{a \to +\infty} P_{(X>a)}(X > a+b) = +\infty$ laisse rêveur car une probabilité est censée se trouver entre 0 et 1.

- Les lapalissades ont fleuri ! Par exemple, celle-ci : « plus l'appareil vieillit, plus il devient vieux ».

Partie 2

6) b) • Avoir $G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{\theta}x} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ comme fonction de répartition de Y est faux, mais conclure quand même que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ est sérieusement gonflé !

En fait, la bonne fonction G était définie par $G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{\theta}x} & \text{si } e^x \geq 1 \\ 0 & \text{si } e^x < 1 \end{cases}$.

- Plus dramatique était d'avoir la bonne fonction G et de ne pas reconnaître la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $1/\theta$.

7) Il est dommage d'écrire θ au lieu de theta : en informatique, on n'a droit qu'aux caractères présents sur le clavier de l'ordinateur.

Partie 3

8) a) Ne pas oublier de préciser que T_n ne dépend pas de θ.

c) Il faut faire attention que l'on a $V(T_n) = \dfrac{1}{4n^2} V\left(\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\right)$ et non pas $V(T_n) = \dfrac{1}{2n} V\left(\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\right)$.

9) a) • Même si ça aide bien pour la suite, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne s'écrit pas $P(|T_n - E(T_n)| > \varepsilon) \leq \dfrac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$, mais $P(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$.

- Il y avait plus grave, c'était d'oublier les valeurs absolues ! Et aussi d'oublier la condition donnant le droit d'écrire cette célèbre inégalité.

b) Ce n'est pas bien de gruger en confondant les inégalités larges et les inégalités strictes !

Corrigé 2019

Exercice 1 ....

1) a) On a $A-I=\begin{pmatrix}0&1&1\\-2&3&2\\1&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$ donc :

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{(A-I)^2=0}$$

b) En développant avec la formule du binôme (la matrice I commute avec toutes les matrices donc avec A aussi), on trouve $A^2-2A+I=0$, ce qui donne $I=2A-A^2$, d'où :

$$A(2I-A)=I$$

Ceci prouve (par définition) que A est inversible avec de plus :

$$\boxed{A^{-1}=2I-A}$$

2) a) On peut encore utiliser la formule du binôme (I commute avec N) et on a :

$$A^n=(N+I)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^kI^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k$$

Comme $N=A-I$, on a, d'après la première question, $N^2=0$. Ensuite, pour tout entier $k\geq 2$, on a $N^k=N^2N^{k-2}=0\times N^{k-2}=0$, ce qui fait que, lorsque $n\geq 2$, seuls les deux premiers termes de la somme donnant A^n sont non nuls.

Ainsi, pour tout entier $n\geq 2$, on a : $A^n=\binom{n}{0}N^0+\binom{n}{1}N^1+0$

En conclusion : $\forall n\geq 2,\ A^n=I+nN$.

On voit que cette relation reste valable pour $n=0$ (elle donne $I=I$) et $n=1$ (elle donne $A=I+N$, ce qui est correct).

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=I+nN}$$

Pour finir, on utilise encore une fois la relation $N = A - I$ qui donne alors :

$$A^n = I + n(A - I)$$

On obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = nA - (n-1)I}$$

b) Pour $n = -1$, la relation ci-dessus donne $A^{-1} = (-1)A - (-2)I = 2I - A$, ce qui correspond bien au résultat trouvé à la question 1b).

3) a) D'après la première question, on a $A^2 - 2A + I = 0$ donc le polynôme $x^2 - 2x + 1$ est un polynôme annulateur de A. Comme $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ sa seule racine est 1 donc 1 est la seule valeur propre possible de A.
On vérifie que 1 est effectivement valeur propre de A en remarquant que la matrice $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible (ses trois colonnes sont proportionnelles). Conclusion :

$$\boxed{1 \text{ est la seule valeur propre de } A}$$

b) Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice diagonale dont tous les éléments sont égaux à 1 (seule valeur propre de A), ainsi A serait semblable à I et il existerait une matrice inversible P telle que $A = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$. Ceci étant manifestement faux, on conclut :

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

4) a) La matrice $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 puisque les colonnes 2 et 3 sont proportionnelles à la colonne 1, et celle-ci n'est pas nulle (sinon on aurait $\mathrm{rg}(A - I) = 0$).
Comme un endomorphisme a même rang que n'importe laquelle de ses matrices représentatives, on en déduit :

$$\boxed{\mathrm{rg}(f - Id) = 1}$$

b) • On a $u_1 = (f - Id)(e_1)$ donc on trouve les coordonnées de u_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ en faisant le calcul :

$(A-I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$. On a donc $u_1=(-1,-2,1)$.

On calcule les coordonnées de $(f-Id)(u_1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec le calcul : $(A-I)\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Ceci est la traduction matricielle de l'égalité $(f-Id)(u_1)=0$ donc :

$$\boxed{u_1 \text{ appartient à } \operatorname{Ker}(f-Id)}$$

- Pour $u_2=(1,0,1)$, on fait le même travail :

$$(A-I)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ceci traduit exactement $(f-Id)(u_2)=0$ d'où :

$$\boxed{u_2 \text{ appartient à } \operatorname{Ker}(f-Id)}$$

D'après le théorème du rang, on a : $\dim(\operatorname{Ker}(f-Id))+\operatorname{rg}(f-Id)=\dim(\mathbb{R}^3)$ donc, d'après la question 4a) : $\dim(\operatorname{Ker}(f-Id))=2$.

De plus, les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels donc la famille (u_1,u_2) est libre et comme elle contient 2 vecteurs de $\operatorname{Ker}(f-Id)$ qui est de dimension 2, on est certain que :

$$\boxed{(u_1,u_2) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(f-Id)}$$

Remarque. On pouvait déterminer matriciellement $\operatorname{Ker}(f-Id)$, ce qui donnait l'équation $x=y+z$ et on en déduisait que la famille $((1,1,0),(1,0,1))$ était génératrice de $\operatorname{Ker}(f-Id)$. Il suffisait ensuite de montrer que cette famille était libre donc formait une base de $\operatorname{Ker}(f-Id)$. Pour finir, il fallait remarquer que le deuxième vecteur de cette famille était u_2 et que l'on pouvait obtenir u_1 en écrivant $u_1=-2(1,1,0)+(1,0,1)$.

5) a) Montrons que (u_1,u_2,e_1) est libre en considérant trois réels *a*, *b* et *c* tels que $au_1+bu_2+ce_1=0$.

Cette égalité s'écrit :

$$a(-1,-2,1)+b(1,0,1)+c(1,0,0)=(0,0,0)$$

On obtient : $(-a+b+c,-2a,a+b)=(0,0,0)$.

Par identification, on en déduit :

$$\begin{cases} -a+b+c=0 \\ -2a=0 \\ a+b=0 \end{cases}$$

La deuxième équation fournit $a=0$, la troisième donne alors $b=0$ et la première $c=0$.

Par conséquent, la famille (u_1,u_2,e_1) est libre et comme elle contient trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3, on peut conclure :

$$\boxed{(u_1,u_2,e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

b) Comme u_1 appartient à $\mathrm{Ker}(f-Id)$, on a $(f-Id)(u_1)=0$ donc $f(u_1)=u_1$.
De même, on a $f(u_2)=u_2$.
Enfin, $u_1=(f-Id)(e_1)$ donc $u_1=f(e_1)-e_1$ et on en déduit : $f(e_1)=u_1+e_1$.
Pour résumer, on a :

$f(u_1)=1u_1+0u_2+0e_1$: première colonne de *T*.

$f(u_2)=0u_1+1u_2+0e_1$: deuxième colonne de *T*.

$f(e_1)=1u_1+0u_2+1e_1$: troisième colonne de *T*.

On trouve donc :

$$\boxed{T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

6) On voit que *P* est la matrice dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs u_1,u_2,e_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et comme (u_1,u_2,e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$, la matrice *P* est inversible en tant que matrice de changement de base.
Comme *A* est la matrice de *f* dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et comme *T* est la matrice de *f* dans la base (u_1,u_2,e_1), on a la formule de changement de base :

$$\boxed{A=PTP^{-1}}$$

7) a) Soit $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a les équivalences suivantes :

$$M\in E \Leftrightarrow MT=TM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

$$M\in E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & a+c \\ u & v & u+w \\ x & y & x+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Par identification des coefficients, on obtient, après quelques simplifications :

$$M\in E \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ z=a \\ u=0 \end{cases} \Leftrightarrow M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & v & w \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$, ceci en remplaçant dans la matrice M.

Finalement, M appartient à E si et seulement si :

$$M=a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+v\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, M appartient à E si et seulement si :

$$M=a\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right)+bE_{1,2}+cE_{1,3}+vE_{2,2}+wE_{2,3}$$

En conclusion, E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\left(E_{1,1}+E_{3,3},\, E_{1,2},\, E_{1,3},\, E_{2,2},\, E_{2,3}\right)$.

Vérifions la liberté de cette famille : soit 5 réels a, b, c, v et w tels que $a\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right)+bE_{1,2}+cE_{1,3}+vE_{2,2}+wE_{2,3}=0$. D'après le travail fait plus haut, ceci équivaut à $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & v & w \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on a tout de suite, par identification : $a=b=c=v=w=0$. En conclusion, la famille $\left(E_{1,1}+E_{3,3},\, E_{1,2},\, E_{1,3},\, E_{2,2},\, E_{2,3}\right)$ est libre. De plus, cette famille est génératrice de E donc c'est une base de E, et comme elle contient 5 vecteurs, on a :

$$\boxed{\dim E=5}$$

b) Comme $A=PTP^{-1}$, on a :

$$NA=AN \Leftrightarrow N\left(PTP^{-1}\right)=\left(PTP^{-1}\right)N \Leftrightarrow NPTP^{-1}=PTP^{-1}N$$

Comme P^{-1} est inversible, on obtient une égalité équivalente en multipliant chaque membre de l'égalité par P^{-1} à gauche :

$$NA=AN \Leftrightarrow P^{-1}NPTP^{-1}=TP^{-1}N$$

Voici la 8e édition de À VOS MATHS : elle contient les **épreuves de mathématiques du concours EDHEC posées de 2008 à 2019** toujours suivies des barèmes qui ont été mis en place chaque année pour ce concours.
Les **corrigés** sont précédés de **nombreux conseils** (méthode, rédaction, aide à la résolution, fautes à éviter) qui permettront au lecteur de se mettre sur la bonne voie sans avoir à consulter trop vite le corrigé.

Cet ouvrage est destiné à tous les étudiants des classes préparatoires aux grandes écoles de commerce (**option économique**), qu'ils soient en première ou en deuxième année (un tableau indique quels exercices peuvent être traités par un étudiant de première année).
Il permettra à tous de travailler de deux façons distinctes :

- En premier lieu, un **travail thématique** pour lequel un tableau propose 33 thèmes possibles couvrant les quatre grandes parties du programme (**analyse**, **algèbre linéaire**, **probabilités et informatique**).
- Ensuite, un travail en temps réel consistant à se donner quatre heures pour traiter une épreuve donnée (un tableau indique le temps conseillé pour chaque exercice).

Fort d'une longue expérience des concours, l'auteur, qui a écrit ce livre en pensant exclusivement aux étudiants et à leurs éventuelles difficultés, souhaite qu'il profite pleinement à tous les futurs candidats, et pas seulement à ceux qui présentent le concours EDHEC.

www.editions-ellipses.fr
9 782340 032644