ECS

À VOS MATHS

12 ANS *de sujets*

posés au concours **EDHEC**

exercices et problèmes corrigés

Sujets mis en conformité avec le nouveau programme

8e édition actualisée

CONSEILS de MÉTHODE
CONSEILS de RÉDACTION
AIDE à la RÉSOLUTION
LISTE DES FAUTES à ÉVITER
CONTRE-EXEMPLES SIMPLES

Sylvain RONDY

ellipses

ECS

À VOS MATHS

12 ans de sujets corrigés posés au concours EDHEC de 2008 à 2019

ECS

À VOS MATHS

12 ans de sujets corrigés posés au concours EDHEC de 2008 à 2019*

** Les sujets de 2008 à 2014 ont été mis en conformité avec le nouveau programme entré en vigueur pour le concours 2015*

8e édition actualisée

Sylvain RONDY
Agrégé de mathématiques
Professeur en classe préparatoire au lycée Saint-Jean (Douai)

ellipses

ISBN 9782340-053403

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Voici la huitième édition de À VOS MATHS : elle contient les épreuves du concours EDHEC posées entre 2008 et 2019. Chaque énoncé est suivi de conseils (méthode, rédaction, etc), ainsi que des corrigés détaillés et des barèmes.
Outre la table des matières, le lecteur trouvera au début de cet ouvrage plusieurs tableaux assez utiles : un tableau thématique indiquant dans quelle épreuve on peut trouver tel ou tel thème, un tableau permettant de repérer les exercices accessibles aux étudiants de première année, et enfin un tableau proposant un timing pour chaque épreuve.

Cet ouvrage est destiné en tout premier lieu aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles de commerce et de management de l'option scientifique, qu'ils soient en première ou en deuxième année, mais pourra également intéresser les étudiants de L1-L2 dont le cursus contient des mathématiques.

L'épreuve de mathématiques du concours d'entrée à l'EDHEC est présentée par un très grand nombre de candidats, c'est l'une des épreuves comptant le plus grand nombre d'inscrits (elle est, à ce jour, choisie par quatre autres écoles dont AUDENCIA et GEM. C'est donc une épreuve incontournable à laquelle presque tous les candidats doivent se préparer.
Sa structure (trois exercices et un problème) est la garantie qu'une grande partie des connaissances exigibles en fin de classe préparatoire y est abordée chaque année : elle est donc idéale, que ce soit pour une remise à niveau ou pour un approfondissement des connaissances et des techniques de résolution.

Le lecteur trouvera dans ce livre l'intégralité des sujets posés au concours d'entrée à l'EDHEC entre 2008 et 2019, accompagnés de leurs corrigés, rédigés de façon très détaillée (ces corrigés ne sont pas des modèles de copie car ils contiennent des indications destinées à bien faire comprendre au lecteur comment se dessine la solution) et surtout d'une rubrique très fournie d'indications (conseils de méthode, conseils de rédaction, aide à la résolution et liste des fautes à éviter, assortie de contre-exemples simples), ces trois parties étant nettement séparées.
Cet ouvrage n'est donc pas un simple recueil d'annales mais un outil précieux d'aide à la réflexion.
Certains énoncés ont été légèrement modifiés pour en corriger quelques maladresses ou erreurs typographiques.

On peut envisager deux façons de travailler avec cet ouvrage : un travail thématique (voir le tableau correspondant) permettant de mettre au point les méthodes attachées au thème choisi, ou un travail en temps réel consistant à se donner entre quatre et six heures pour traiter une épreuve entière afin de s'évaluer, par exemple, pendant les révisions de fin d'année.
Dans les deux cas, lorsqu'une question n'est pas traitée, il faut lire en priorité les conseils de méthode et, si cela ne suffit pas, consulter l'aide à la résolution, puis, en dernier lieu, lire le corrigé. Pour chaque question traitée, il est prudent de consulter les conseils de rédaction, afin de vérifier que l'on a pensé à tout, et aussi la rubrique "les fautes qu'il ne fallait pas faire" car on peut parfois trouver le bon résultat en commettant des erreurs ou même des fautes graves.
L'épreuve est très longue (très peu de candidats la traitent intégralement) mais elle permet, par la diversité des exercices proposés, à chaque candidat de s'exprimer.
Dans l'optique du concours, il faut savoir que le barème appliqué chaque année permet d'obtenir une excellente note sans pour autant avoir traité l'intégralité de l'épreuve. L'essentiel est de ne pas quitter la salle d'examen en regrettant de ne pas avoir eu le temps de faire (ou même de lire) une question : il ne faut donc pas s'accrocher trop longtemps sur une question qui résiste afin de se laisser le temps de pouvoir tout aborder. Il est cependant inutile de donner des réponses sans preuve, ceci fait peut-être gagner du temps mais ne rapporte assurément aucun point.
J'espère très sincèrement que ce livre sera utile à tous les futurs candidats à cette épreuve.

Je remercie Corinne Baud, des éditions Ellipses, pour ses conseils et sa volonté d'éditer cet ouvrage pour la huitième fois.
Je remercie également Veronica, mon épouse, pour sa présence bienveillante et son amour, Lou, ma fille, qui vit sa vie loin des maths (bouh !), Tom, mon fils, qui a définitivement opté pour la physique (arrrghhh !), ainsi que mes élèves qui, chaque année, m'obligent, par leur vivacité mais aussi leurs doutes, à réfléchir encore et encore sur la façon de rendre mon enseignement mieux adapté et plus efficace.
Le lecteur est invité à me faire part de ses remarques à l'adresse ci-dessous. De notre correspondance naîtra un peu plus de lumière !

sylvain.rondy@ac-lille.fr

Table des matières

Tableau thématique

Année	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	09	08
ANALYSE												
Suites implicites		EX1	EX1						PB			
Suites, suites récurrentes	PB			EX1								
Suites intégrales					EX1		PB				EX2	
Séries	PB	EX1			EX1 PB		EX1	PB		PB	PB	EX2
Équivalents	EX2	EX1			EX1		PB		PB			
DL, Taylor							PB		PB		EX2	
Fonctions intégrales			PB									
Intégrales impropres			PB		EX2	EX1	PB				EX2	
Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$				EX3		EX3				EX1		
INFORMATIQUE												
Suites, matrices	EX1			EX1	EX1		EX1				EX2	
Simulation, probas		EX3	EX2	PB	PB	PB		EX2	EX2	EX3		
Courbes, nappes			EX1 PB		EX2							
Calcul, tri, recherche	PB											
ALGÈBRE												
Polynômes			PB					EX3	EX3		EX3	
Calcul matriciel	EX1			PB				EX1				
Diagonalisation	EX1		PB			EX2		EX3	EX1	EX1	EX3	EX1
Sommes directes	EX1	EX2		EX2				EX1	EX1			EX3
Projecteurs, symétries										EX2		EX3
Noyaux, images	EX1	EX2		EX2		EX2	EX2	EX3	EX1			EX3
Polynôme annulateur	EX1		EX3					EX1	EX1	EX2	EX3	EX3
ALG. BILINÉAIRE												
Généralités	EX3	EX2	EX3		EX3	EX3	EX2	EX3			EX3	
Orthogonalité		EX2	EX3		EX3	EX3	EX2	EX3	EX3	EX2	EX3	
Projections orthogonales						EX3				EX2		
Endos symétriques	EX3				EX3					EX2		
PROBABILITÉS												
VA discrètes	PB	PB		PB	PB	PB			EX2	PB	EX1	PB
Lois conditionnelles	PB			PB	PB							PB
F^{ctions} de VA discrète					PB						EX1	
Σ de VA discrètes					PB			EX1	PB		PB	PB
VA à densité	EX2	EX3 PB	EX2	EX3	EX2	EX1 PB	EX3	EX2	PB	EX3	PB	EX1
Σ de VA à densité						EX1		EX2		EX3		EX1
F^{ctions} de VA à densité		EX3	EX2		EX2		EX3		PB	EX3	PB	EX1
Convergences	EX2		EX2			PB	EX3		PB	PB	EX1	
Estimation				EX3								

Accès aux étudiants de première année

Ce tableau précise quels exercices (ou parties d'exercices) peuvent être traités par des étudiants de première année, ce qui ne signifie pas qu'ils sont forcément faciles.

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Problème
2019	Oui (partie 1)	Oui (partie 1)		Oui (difficile)
2018	Oui			Oui (q1 à q4)
2017	Oui			Oui (sauf q4, q6, q8, q9)
2016	Oui			Oui
2015	Oui			Oui (sauf partie 2)
2014				Oui (sauf fin partie 2)
2013	Oui (sauf q3)			Oui
2012			Oui (sauf q3b, q4, q5)	Oui
2011		Oui (sauf informatique)		
2010				Oui (préliminaire)
2009			Oui (sauf q5)	Oui (sauf parties 2, 3)
2008		Oui	Oui (sauf q3)	

Proposition de timing

Ce tableau donne une indication du temps qu'il faut passer sur chaque exercice d'une épreuve, en admettant que l'on y consacre quatre heures.
Cela dit, tant que tout se passe bien au cours de la résolution d'un exercice, il faut continuer et, éventuellement, dépasser le temps indiqué (il serait en effet dommage de ne pas traiter des questions que l'on sait résoudre sous prétexte de respecter son tableau de marche).
Au contraire, si un exercice paraît peu inspirant, ou même inaccessible, il ne faut pas perdre inutilement son énergie et son temps à vouloir le traiter : mieux vaut le garder pour la fin s'il reste du temps.

	Exercice 1	**Exercice 2**	**Exercice 3**	**Problème**
2019	**3/4 h**	**1 h**	**1/2 h**	**1 h 3 / 4**
2018	**1/2 h**	**3/4 h**	**1/2 h**	**2 h 1/4**
2017	**1/2 h**	**1/2 h**	**3/4 h**	**2 h**
2016	**1/2 h**	**1/2 h**	**1 h**	**2 h**
2015	**1 h**	**3/4 h**	**1/2 h**	**1 h 3 / 4**
2014	**1/2 h**	**1/2 h**	**1 h**	**2 h**
2013	**3/4 h**	**3/4 h**	**3/4 h**	**1 h 3/4**
2012	**3/4 h**	**1 h**	**1/2 h**	**1 h 3/4**
2011	**3/4 h**	**1/2 h**	**3/4 h**	**2 h**
2010	**1/2 h**	**1/2 h**	**1 h**	**2 h**
2009	**1/2 h**	**1 h**	**1/2 h**	**2 h**
2008	**3/4 h**	**1/2 h**	**3/4 h**	**2 h**

Sujet 2019

Exercice 1 ....

Partie 1 : étude d'un exemple

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.

b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

c) En `Scilab`, la commande `r=rank(M)` renvoie dans la variable `r` le rang de la matrice M.
On a saisi :

```
A=[1,0,0;-2,3,-2;-1,1,0]
r1=rank(A-eye(3,3))
r2=rank(A-2*eye(3,3))
disp(r1,'r1=')
disp(r2,"r2=')
```

`Scilab` a renvoyé :

```
r1  =
      1.
r2  =
      2.
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

d) Donner une base de chacun des noyaux $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ et $\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)$.

2) a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ et (v_2) une base de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.

b) On note $x=(a,b,c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2).

Partie 2 : généralisation

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$, soit E un $\mathbb{R}$- espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, deux à deux distinctes.

On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\left(f - \lambda_k Id\right)$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

3) Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D.

a) En notant I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n)...(D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

b) En déduire un polynôme annulateur de f.

Pour chaque k de $[\![1, p]\!]$, on définit le polynôme $L_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \dfrac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$.

4) a) En distinguant les cas $i = k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.

b) Montrer que $(L_1, L_2, ..., L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) Établir alors que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k$$

d) En déduire que $\sum_{i=1}^{p} L_i = 1$.

5) a) Montrer que, pour tout x de E, $L_k(f)(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id)$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $L_k(f)$.

b) En déduire la décomposition cherchée.

6) Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$ et $p = 2$.

Exercice 2 ....

Partie 1 : question préliminaire et présentation de 2 variables aléatoires X et T

1) On rappelle que la fonction arc tangente, notée Arctan, est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

a) Rappeler l'expression, pour tout réel x, de $\mathrm{Arctan}'(x)$.

b) Donner la valeur de $\text{Arctan}(1)$ puis montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

c) Justifier l'équivalent suivant :

$$\text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$$

2) a) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

3) a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer la fonction de répartition G de T.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires associée à X

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé (Ω, $\mathcal{A}$, P), mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, ..., X_{,n})$ et on admet que M_n est une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé (Ω, $\mathcal{A}$, P).

4) a) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

b) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \dfrac{\pi}{n} M_n$. Justifier que la fonction de répartition de Y_n, notée G_n, est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right)^n$$

5) a) Déterminer, pour tout x négatif ou nul, la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x)$.

b) Montrer que, pour tout x strictement positif, on a :

$$G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n$$

c) En déduire pour tout x strictement positif, la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x)$.

d) Déduire des questions précédentes que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers T.

Exercice 3 ....

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.
On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\| x \|$.

Partie 1 : définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté u^*, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^*(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

1) a) Montrer que si u^* existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$$

b) En déduire que si u^* existe, alors u^* est unique.
2) a) Vérifier que l'application u^* définie par l'égalité établie à la question 1a) est effectivement un endomorphisme de E.
b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux

On dit que u est un endomorphisme normal quand on a l'égalité : $u \circ u^* = u^* \circ u$.

3) Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

4) a) Montrer que : $\forall x \in E,\ \| u(x) \| = \| u^*(x) \|$
b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^*)$.
5) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.

6) On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.

a) Montrer que E_λ est stable par u^*.

b) Établir que $(u^*)^* = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Problème ....

Partie 1

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)t^k$.

1) Calculer $G(1)$.

2) Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.

3) Établir la relation :

$$V(X) = G''(1) + G'(1) - \left(G'(1)\right)^2$$

Partie 2

On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

4) a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

b) Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \ln n + \frac{1}{n} \leq u_n \leq \ln n + 1$$

c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

5) Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie 3

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

6) On admet que, si a et b sont des entiers tels que $a < b$, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` permet à `Scilab` de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme discrète sur $[\![a, b]\!]$.

Compléter le script suivant pour que les lignes (5), (6), (7) et (8) permettent d'échanger les contenus des variables `A(j)` et `A(p)`.

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
A=1:n
p=n
for k=1:n
    j=grand(1,1,'uin',1,p)
    aux=----
    A(j)=----
    A(p)=----
    p=p-1
end
disp(A)
```

7) On suppose dorénavant qu'après exécution du script précédent correctement complété, le vecteur `A` est rempli de façon aléatoire par les entiers de $[\![1,n]\!]$ de telle sorte que les $n!$ permutations soient équiprobables. On considère alors les commandes `Scilab` suivantes (exécutées à la suite du script précédent) :

```
m=A(1)
c=1
for k=2:n
    if A(k)>m then  m=A(k)
    c=k
    end
end
disp(c)
```

a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n.

b) Quel est le contenu de la variable `c` affiché à la fin de ces commandes ?

c) On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `find(test)` permet de trouver à quelle(s) place(s) se trouvent les éléments d'une matrice satisfaisant au test proposé.

Compléter le script `Scilab` ci-dessous afin qu'il renvoie et affiche le contenu de la variable `c` étudiée plus haut :

```
c=find(----)
disp(c)
```

On admet que les contenus des variables informatiques `A(1)`, `A(2)`, ..., `A(n)` sont des variables aléatoires notées A_1, A_2, ..., A_n et que le nombre d'affectations concernant la variable informatique `c` effectuées au cours du script de la question 7), y compris la première, est aussi une variable aléatoire, notée X_n. On suppose que ces variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note G_n la fonction génératrice de X_n, E_n son espérance et V_n sa variance.

8) Donner la loi de X_1.

9) a) Montrer que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

c) En considérant le système complet d'événements $((A_n = n), (A_n < n))$, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!],\ P(X_n = j) = \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j)$$

d) Donner la loi de X_4.

10) a) Vérifier que la formule obtenue à la question 9c) reste valable pour $j = 1$.

b) Établir la relation :

$$\forall n \geq 2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t) \qquad (*)$$

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$.

11) En dérivant la relation (*), trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = u_n$$

12) Recherche d'un équivalent de V_n.

a) En dérivant une deuxième fois la relation (*), montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

c) Montrer que $V_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Conseils 2019

Exercice 1 ....

❖ Conseils de méthode

Partie 1

1) a) Il faut calculer A^2 puis enlever un certain nombre de fois la matrice A afin d'annuler les termes non diagonaux et trouver une matrice proportionnelle à I.
On peut aussi présenter deux réels a et b tels que $A^2 + aA + bI = 0$ et identifier.

b) C'est du cours ! On doit chercher les racines du polynôme trouvé plus haut.

c) Il faut montrer que, d'après le script, $A - I$ et $A - 2I$ ne sont pas inversibles. Ensuite, le théorème du rang appliqué à f permet de compléter la réponse.

d) Il suffit de résoudre, d'une part, $(A - I)X = 0$, et, d'autre part, $(A - 2I)X = 0$, où X désigne un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2) a) Ici aussi, c'est du cours sur la diagonalisabilité d'un endomorphisme, ainsi que sur la concaténation.

b) Commencer en justifiant qu'il existe trois réels α, β et γ tels que :

$$(a,b,c) = \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma v_2$$

Partie 2

3) a) Chercher les éléments diagonaux nuls de $D - \lambda_1 I$, $D - \lambda_2 I$, …, $D - \lambda_p I$.

b) La clé, c'est que D est une matrice représentant f.

4) a) Pour $i = k$, le produit $\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$ est égal à $\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{\lambda_k - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$, ce qui se simplifie !

Pour $i \neq k$, le produit $\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$ contient un facteur nul.

b) Comme $(L_1, L_2, ..., L_p)$ contient p vecteurs de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ qui est de dimension p, il suffit de montrer que $(L_1, L_2, ..., L_p)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) Comme $(L_1, L_2, ..., L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$, il existe p réels $a_1, ..., a_p$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i L_i$. Il reste à montrer que $a_i = P(\lambda_i)$.

d) Il faut appliquer la relation précédente à un polynôme bien choisi.

5) a) Il suffit de montrer que $(f-\lambda_k Id)\left(L_k(f)(x)\right)=0$, c'est-à-dire que :

$$\left((f-\lambda_k Id)\circ L_k(f)\right)(x)=0$$

Il reste ensuite à déterminer l'endomorphisme $(f-\lambda_k Id)\circ L_k(f)$

b) Pour répondre à cette question, tout vecteur x de E doit s'écrire comme une somme de vecteurs de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)$, …, $\operatorname{Ker}(f-\lambda_p Id)$ et, comme par hasard, d'après la question précédente, $L_1(f)(x)$, …, $L_p(f)(x)$ sont respectivement éléments de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)$, …, $\operatorname{Ker}(f-\lambda_p Id)$.

6) Il faut déterminer L_1 et L_2, puis $L_1(f)$ et $L_2(f)$, et enfin appliquer la question 5b) pour un vecteur $x=(a,b,c)$.

❖ Conseils de rédaction

Partie 1

1) d) Ayant trouvé les vecteurs X solutions de $(A-I)X=0$, il ne faut pas oublier d'en déduire le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1 qui, lui, contient des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et pas de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Idem pour la valeur propre 2.

2) a) Il est bien de signaler que 1 et 2 sont les seules valeurs propres de f.

Partie 2

3) b) Bien préciser que D est l'une des matrices de f pour "étendre" le polynôme annulateur de D à f.

4) b) Ne pas oublier de remarquer que les polynômes L_k sont bien dans $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) Il est bon de mentionner que $(L_1,L_2,...,L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ afin de pouvoir écrire tout polynôme P comme combinaison linéaire de $L_1,L_2,...,L_p$.

5) a) Ne pas oublier de citer le fait que $f-\lambda_k Id$ commute avec $f-\lambda_j Id$.
De plus, c'est parce que $f-\lambda_k Id$ est linéaire que l'on peut "sortir" le réel $\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\dfrac{1}{\lambda_k-\lambda_j}$.

b) Attention ! Lorsqu'on applique le polynôme constant égal à 1 à l'endomorphisme f, il faut se souvenir que $1=X^0$ donc, une fois appliqué à f, ceci donne f^0, c'est-à-dire Id.

❖ Aide à la résolution

Partie 1

1) a) On trouve que $A^2 - 3A$ est une matrice scalaire.

c) Ne pas oublier que $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ sont les sous-espaces propres cherchés ! Comme on a $\mathrm{rg}(f - Id) = 1$ et $\mathrm{rg}(f - 2Id) = 2$, on peut déterminer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$.

d) Il faut essayer d'anticiper le souhait émis par l'énoncé d'avoir des vecteurs de base, à coordonnées dans $\mathbb{N}$ les plus petites possible, avec des zéros où il faut. Pour $\mathrm{Ker}(f - Id)$, il faut choisir d'écrire son équation sous la forme $y = x + z$ afin d'y parvenir.

2) b) Après avoir écrit $(a,b,c) = \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma v_2$, procéder par identification.

Partie 2

3) a) Tout vient du fait que le produit de matrices diagonales est une matrice diagonale obtenue en multipliant les termes diagonaux de chacune d'entre elles. Ainsi, comme chacune des matrices du produit possède certains éléments diagonaux nuls, les éléments diagonaux correspondants du produit sont nuls.

4) a) Lorsque $i \neq k$, l'indice *j* peut prendre la valeur *i* et le facteur d'indice i du produit $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$ est nul.

b) Ayant écrit $\sum_{k=1}^{p} a_k L_k = 0$, il faut évaluer cette égalité en λ_i et la question 4a) permet de conclure.

c) Après avoir écrit $P = \sum_{i=1}^{p} a_i L_i$, pour en déduire que $a_k = P(\lambda_k)$, il suffit d'évaluer cette égalité en λ_k, la question 4a) permettant encore de conclure.

d) Il faut appliquer la relation précédente au polynôme constant égal à 1.

5) a) On ne peut conclure que si l'on remarque que $f - \lambda_k Id$ commute avec $f - \lambda_j Id$, ceci pour tout *j* de $[\![1, p]\!]$. Dès lors, la conclusion est une conséquence de la question 3b).

b) Il faut utiliser l'égalité $\sum_{k=1}^{p} L_k = 1$, l'appliquer à *f* puis prendre l'image de *x*.

6) Ici, le produit définissant les polynômes L_k ne contient qu'un seul facteur puisqu'il n'y a que deux valeurs propres. On trouve $L_1 = -(X - 2)$ et $L_2 = X - 1$.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

Partie 1

1) a) Il vaut mieux ne pas "balancer" le bon polynôme annulateur sans aucun calcul : certes, on ne trouve sûrement pas le bon polynôme annulateur par hasard, mais le doute s'installe dès la première question…

b) Dommage qu'une erreur de "delta" fasse foirer la recherche des valeurs propres possibles qui deviennent autres que 1 et 2.

c) Il n'est pas question de penser que le rang de $A-\lambda I$ soit la dimension du sous-espace propre de A (ou de f) associé à la valeur propre λ : il fallait faire jouer le théorème du rang.

d) • C'est la question à ne pas rater : pour résoudre un système, on se calme et on assure !

- De plus, trouver que $(-1,0,1)$ est vecteur propre de f pour la valeur propre 1 est correct mais, à la question 2a), l'énoncé demande des coordonnées appartenant à $\mathbb{N}$: il fallait réagir !
- Écrire $\text{Ker}(f-Id)=\text{Vect}\big((1,1,0),(0,1,1)\big)$ est correct mais ne répond pas à la question « donner une base ». On n'a qu'une famille génératrice.

2) a) Il est gentil de vérifier que (u_1,v_1,v_2) est une base de $\mathbb{R}^3$, mais l'essentiel de la question consistait à prouver que (u_1,v_1) était une base de $\text{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ et que (v_2) était une base de $\text{Ker}(f-\lambda_2 Id)$.

Partie 2

3) a) Dommage de penser que la matrice $D-\lambda_k I$ possède **un** "zéro" sur sa diagonale ! Il fallait bien lire l'énoncé pour s'apercevoir que D est une matrice d'ordre n et que f n'a que p valeurs propres distinctes (avec $p\leq n$) : il est donc possible que $D-\lambda_k I$ ait plusieurs zéros sur sa diagonale.

b) Une réponse sans argument est irrecevable : il faut citer le lien entre f et D, en précisant que D est une matrice de f dans une certaine base.

4) a) Un calcul brisé à la dernière étape : $\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\frac{\lambda_k-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}1=p$ (au lieu de 1).

b) L'habitude est une traîtresse : les polynômes L_k ne sont pas de degrés échelonnés, c'est-à-dire deux à deux distincts (ils sont tous de degré $p-1$).

5) a) Attention ! $L_k\big(f(x)\big)$ n'a aucun sens (ce serait l'image d'un vecteur par un polynôme et il est, par exemple, difficile d'imaginer ce que représente x^3 si x est un vecteur !!!). Il faut écrire (comme dans l'énoncé) $L_k(f)(x)$ ou $\big(L_k(f)\big)(x)$ pour encore plus de précautions.

Exercice 2 ....

❖ Conseils de méthode

Partie 1

1) a) C'est du cours !

b) Il faut savoir ou savoir retrouver que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$. Ensuite il est bien d'étudier la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x)=\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 est suffisante, ou plus simplement, la définition du nombre dérivé d'arctangente en 0.

2) a) Il y a trois points à vérifier dans le cas présent : positivité de f, continuité de f sur $\mathbb{R}$ et convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ qui doit, de plus, être égale à 1.

b) Seule la définition est efficace pour cette question : $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

3) a) Il faut ici, vérifier que g est positive, continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0, et montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ converge et est égale à 1.

b) On ne change pas une équipe qui gagne : $G(x)=\int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$.

Partie 2

4) a) Un grand classique pour les lois de max : on a $P(M_n\le x)=P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k\le x]\right)$ qu'il faut savoir rapidement justifier.

b) Un bon début est le suivant :

$$G_n(x)=P(Y_n\le x)=P\left(\frac{\pi}{n}M_n\le x\right)=P\left(M_n\le\frac{nx}{\pi}\right)$$

5) a) Pour x négatif, on a $\frac{nx}{\pi}\le 0$ et ainsi : $-\frac{\pi}{2}<\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right)\le 0$, ce qui permet d'encadrer $\left(\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right)+\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Il suffit d'utiliser la question 1b).

c) Il faut écrire :

$$\left(1-\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)\right)$$

Ensuite il faut chercher $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)$ grâce à un équivalent bien connu du logarithme.

d) Les questions 5a) et 5c) donnent la conclusion si l'on se souvient de la fonction G trouvée à la question 3b).

❖ Conseils de rédaction

Partie 1

1) b) Mieux vaut préciser que la fonction qu'on étudie est dérivable avant de la dériver… D'autre part, une dérivée nulle garantit que la fonction est constante seulement si on se trouve sur un intervalle (ici c'est le cas avec $\mathbb{R}_+^*$), il est donc bien de le signaler. Voici un contre-exemple : la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\geq 0\\ 2 \text{ si } x<0\end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est pas un intervalle), de dérivée nulle, mais n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.

2) a) Il faut montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente avant de donner sa valeur.

b) Pas de cas à distinguer (comme c'est souvent le cas) car *f* n'est pas définie par morceaux sur $\mathbb{R}$. Il est prudent de vérifier (vite fait au brouillon) que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$: c'est le minimum syndical pour une fonction de répartition et ça peut permettre de corriger une erreur qui, sinon, détruirait la suite.

3) a) Même remarque que pour la question 2a).

b) Ici, deux cas à distinguer : $x\leq 0$ et $x>0$: dans le deuxième cas, la relation de Chasles s'impose. Ici aussi, il vaut mieux vérifier, comme pour 2b), que $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=1$, mais aussi que G est continue en 0 (car la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité doit être continue sur $\mathbb{R}$).

Partie 2

4) a) C'est la mutuelle indépendance des variables X_1, X_2, ..., X_n qui permet de "briser" l'intersection.

5) a) Il est bien de citer la stricte croissance de la fonction "puissance *n*-ième" sur $\mathbb{R}_+$ pour passer de $0<\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right)+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}$ à $0<\left(\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right)+\frac{1}{2}\right)^n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Pour utiliser la question 1b), il faut rappeler que l'on travaille avec $x>0$.

c) Bien préciser que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)=0$ pour en déduire l'équivalent de $\ln\left(1-\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)$ au voisinage de $+\infty$.

❖ Aide à la résolution

Partie 1

1) b) Pour la fin de la question, appliquer la relation en $x = 1$.

c) Ne pas oublier que $x + o(x) \underset{0}{\sim} x$: il suffit, pour s'en convaincre, d'écrire :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{o(x)}{x}\right) = 1 \text{ (par définition d'un "petit o")}$$

2) a) Établir la convergence de $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, calculer sa valeur et profiter de la parité de la fonction *f*.

b) On peut écrire $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{\pi}\lim_{B\to-\infty}\int_B^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$ car le problème de convergence a été traité à la question 2a) : on est donc certain que la limite est finie.

3) a) Faire attention que $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ est deux fois impropre : il faut donc étudier séparément les intégrales $\int_0^1 g(x)\,dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ (le choix de la borne "1" est arbitraire, n'importe quel nombre strictement positif aurait fait l'affaire).

Partie 2

5) a) Pour *x* négatif, on arrive à : $0 < \left(\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right)+\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) Comme $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right) = 0$, on a l'équivalent :

$$\ln\left(1-\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)$$

Il reste à utiliser la question 1c).

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

Partie 1

Une remarque valable pour l'ensemble de l'exercice : $\text{Arctan}(x)$ n'est pas égal à $\frac{1}{\tan(x)}$, et encore moins à $\tan(x)$!

1) b) Trouver que la dérivée de $x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est la fonction constante égale à 1 (ce qui est faux) ne permet en aucun cas de conclure que la fonction $x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante !

c) • Écrire que l'on sait que $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$ ne pose pas de problème mais conclure qu'il en découle immédiatement que $x \underset{0}{\sim} \text{Arctan}(x)$ est une escroquerie (on composerait les équivalents de départ par la fonction arctangente…).

• La faute digne d'un élève de première année :
« $\lim\limits_{x\to 0} \text{Arctan}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ donc $\text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$ »

• Il n'est pas suffisant d'écrire « $\text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{Arctan}(x)}{x} = 1$ » : ça consiste à faire croire qu'on a démontré sans pour autant l'avoir fait ! Il fallait **prouver** que cette limite vaut 1 !

• Quant à faire du hors-programme en citant la règle de l'Hôpital ou bien le développement limité de la fonction Arctan au voisinage de 0, comme si c'était du cours, c'est mal vu et pas payé !

2) a) Il ne coûte rien de préciser que $x^2 + 1 \neq 0$ pour assurer le coup. En revanche, il est très laid de proposer de montrer que f n'est pas une densité !

b) Franchement, il est presque indigne d'écrire $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$, sans aucune distinction entre la variable d'intégration (muette) et la variable x.

3) a) • Il est moche d'écrire un crochet d'intégration de cette forme : $\left[e^{-1/x}\right]_0^A$ ou pire $\left[e^{-1/x}\right]_0^{+\infty}$. Il y a un sérieux problème en 0 ! Sans parler de $+\infty$.

• Il est beaucoup plus moche de reconnaître la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$, comme étant la densité classique de la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{x^2}$: c'est complètement délirant car le paramètre ne peut pas dépendre de x !!! Il faut reconnaître que les auteurs de cette bévue sont créatifs puisque, si l'on remplace λ par $\dfrac{1}{x^2}$ dans la densité de la loi exponentielle de paramètre λ, on récupère bien la fonction g !

b) Une égalité redoutable :

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2} e^{-1/t}\,dt$$

C'est faux bien sûr puisque la fonction g est nulle sur $]-\infty, 0[$. De plus, ça donne $G(x) = e^{-1/x} - 1$, ce qui tend vers 0 (et pas vers 1) en $+\infty$!

Partie 2

5) a) • Écrire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{nx}{\pi}\right)+\dfrac{1}{2}\right)=0$ est correct (à condition que x soit strictement négatif), mais en déduire que, comme $0^n=0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{nx}{\pi}\right)+\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ est une grosse bêtise : si on fait tendre n vers $+\infty$, c'est en une seule fois et pas "petit à petit".

• Quant à écrire $\left|\dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{nx}{\pi}\right)+\dfrac{1}{2}\right|<1$ et conclure, façon suite géométrique, que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{nx}{\pi}\right)+\dfrac{1}{2}\right)^n=0$, c'est tout de même un peu osé (car la raison q de la suite géométrique (q^n) ne doit pas dépendre de n.

c) Ne surtout pas composer les équivalents par la fonction exponentielle ! Il faut passer aux limites puis composer des limites (sans problème car exp est continue en tout réel).

Exercice 3 ....

❖ Conseils de méthode

Partie 1

1) a) Comme la base $(e_1,e_2,...,e_n)$ est orthonormale, un bon départ est le suivant :

$$u^*(y)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle u^*(y),e_i\right\rangle e_i$$

b) L'égalité $u^*(y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left\langle u(e_i),y\right\rangle e_i$ prouve que, pour chaque y de E, $u^*(y)$ est déterminé de façon unique.

2) a) Deux choses à démontrer : linéarité de u^* et stabilité de E par u^*.

b) On a montré l'unicité et il reste à montrer que l'endomorphisme u^* trouvé vérifie bien $\left\langle u(x),y\right\rangle=\left\langle x,u^*(y)\right\rangle$. En fait, les questions 1a), 1b), 2a) et 2b) constituent un raisonnement par analyse-synthèse.

Partie 2

3) On peut remarquer que l'on a les deux égalités $\left\langle u(x),y\right\rangle=\left\langle x,u(y)\right\rangle$ et $\left\langle u(x),y\right\rangle=\left\langle x,u^*(y)\right\rangle$, valables pour tout couple (x,y) de E^2.

4) a) On a $\left\|u(x)\right\|^2=\left\langle u(x),u(x)\right\rangle=\left\langle x,u^*(u(x))\right\rangle$ par définition de u^*. Ensuite, il faut utiliser la relation $u^*\circ u=u\circ u^*$.

b) Raisonner par équivalences : $x \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow \|u(x)\| = 0 \Leftrightarrow ...$

5) Il faut considérer un vecteur x de $F^{\perp}$ et prouver que $u^*(x) \in F^{\perp}$.

6) a) Ici, il faut considérer un vecteur x de E_{λ} et prouver que $u^*(x) \in E_{\lambda}$. Pour ce faire, appliquer u^* à la relation $u(x) = \lambda x$.

b) Grâce aux questions 5) et 6a), on sait que $E_{\lambda}^{\perp}$ est stable par $(u^*)^*$.

❖ Conseils de rédaction

Partie 1

1) a) Pour passer de $u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle y, u(e_i) \rangle e_i$ à $u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y \rangle e_i$, ne pas oublier de citer la symétrie du produit scalaire.

2) a) C'est la bilinéarité du produit scalaire qui permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y + az \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\langle u(e_i), y \rangle + a \langle u(e_i), z \rangle \right) e_i$$

Partie 2

4) a) Ayant écrit $\|u(x)\|^2 = \|u^*(x)\|^2$, il est bon de préciser qu'une norme est positive avant d'écrire $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

5) Il faut noter que $u(y) \in F$ (stabilité de F par u) pour pouvoir conclure que $\langle x, u(y) \rangle = 0$, du fait que x est un vecteur de $F^{\perp}$.

❖ Aide à la résolution

Partie 1

1) a) Ne pas oublier que $\langle u^*(y), e_i \rangle = \langle y, u(e_i) \rangle$.

Partie 2

3) Ayant les égalités $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ et $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$, valables pour tout couple (x, y) de E^2, l'unicité de u^* permet de conclure.

4) a) Ayant obtenu $\|u(x)\|^2 = \langle u(u^*(x)), x \rangle$, on finit avec la définition de u^* en remplaçant dans celle-ci y par $u^*(x)$.

5) La définition de l'adjoint permet d'avoir : $\forall y \in F$, $\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. Ensuite, ne pas oublier que l'on a pris x dans $F^\perp$.

6) a) On finit, encore une fois, avec la relation $u \circ u^* = u^* \circ u$.
b) C'est par unicité de l'adjoint de u^* que l'on peut établir : $(u^*)^* = u$.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

Partie 1

2) a) Ce n'est pas joli-joli d'écrire que $\langle u(e_i), y\rangle$ appartient à E !!! C'est un réel.

b) Il fallait faire une vraie synthèse et ne pas se contenter de signaler que c'était bon ! Les questions précédentes ont consisté en une analyse (si u^* existe, alors c'est celui défini par l'énoncé) mais ensuite il fallait faire la synthèse : ce u^* vérifie-t-il bien la relation imposée ?

Partie 2

3) Ayant établi que, pour tout (x, y) de E^2, on a $\langle x, u(y)\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$, il est hors de question de conclure que, pour tout y de E, on a $u^*(y) = u(y)$ sans citer l'unicité de u^* ou sans donner une justification (voir remarque dans le corrigé).

4) b) Il est dommage de penser que l'égalité $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ puisse impliquer $u(x) = u^*(x)$.
Ceci voudrait dire que tous les vecteurs de même norme seraient égaux !

6) a) Ayant $u(x) = \lambda x$, il est bien d'appliquer u^*, mais en aucun cas on ne peut écrire $u^* \circ u \circ (x) = u^* \circ (\lambda x)$: ça ne veut rien dire ! Il fallait écrire $u^*(u(x)) = u^*(\lambda x)$, puis ensuite $(u^* \circ u)(x) = u^*(\lambda x)$ etc.

Problème ....

❖ Conseils de méthode

Partie 1

1) Se souvenir que $(X = k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

2) Il faut dériver $G(t)$ puis donner une valeur à t.

3) Il faut dériver une deuxième fois $G(t)$ puis donner la même valeur à t (à lire l'énoncé, on sait maintenant que c'est la valeur 1).

Partie 2

4) a) On peut utiliser une inégalité des accroissements finis ou bien encadrer l'intégrale $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$, puis remarquer qu'elle vaut $\ln(k+1) - \ln k$.

b) Il faut sommer l'inégalité précédente pour k allant de 1 à $n-1$.

c) On peut penser que l'équivalent cherché est $\ln n$ donc on divise par $\ln n$ les trois membres de l'encadrement.

5) La suite (h_n) est la suite des sommes partielles d'une série connue comme convergente.

Partie 3

6) Il faut mettre à l'abri le contenu de `A(j)` dans `aux`.

7) a) La variable informatique `m` est initialisée avec le contenu de `A[1]`, puis dès qu'une valeur du vecteur `A` est supérieure à `m`, on la place dans `m` : ça ressemble à une recherche de max !

b) Comme `c` prend la valeur `k` quand `m` prend la valeur `A(k)`, il semble que `c` donne la position du max de `A`, c'est-à-dire de n.

c) Il suffit de chercher n dans le vecteur `A` et il faut donc savoir comment utiliser la commande `find` avec un booléen (un test).

8) Si $n = 1$, il n'y a pas de boucle `for`.

9) a) Dans la boucle, `c` peut changer au maximum $n-1$ fois de contenu et, au minimum zéro fois.

b) • Pour que X_n prenne la valeur 1, il faut et il suffit que la valeur n soit dans `A(1)`.

• Pour que X_n prenne la valeur n, il faut et il suffit que le vecteur contienne, dans l'ordre, les valeurs 1, 2, …, n : `c` change alors de contenu à chaque fois.

• Pour les lois de X_2 et X_3, il suffit de tenir compte des résultats des questions 9a) et 9b).

c) Il faut, bien sûr, utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements suggéré par l'énoncé.

d) Il faut utiliser les questions 9a), 9b) et 9c).

10) b) Il faut multiplier les deux membres de l'égalité de la question 9c) par t^j, puis sommer pour j allant de 1 à n.

c) Question typique de l'utilisation d'un raisonnement par récurrence.

11) Après dérivation, il faut évaluer en 1 et utiliser les questions 1) et 2). Ensuite, on peut sommer la relation obtenue, une fois écrite sous la forme $E_k - E_{k-1} = \dfrac{1}{k}$ et, par télescopage, trouver l'égalité demandée, ou bien procéder par récurrence.

12) a) Après la deuxième dérivation, il faut, une fois encore, évaluer en 1 et utiliser la question 3).

b) Il faut sommer la relation obtenue, une fois qu'elle est écrite sous la forme $V_k - V_{k-1} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k^2}$.

c) Comme à la question 4c), il faut diviser par $\ln n$ les trois membres de l'encadrement.

❖ Conseils de rédaction

Partie 1

3) Il est bien de citer la linéarité de l'espérance pour passer de $G''(1) = E(X^2 - X)$ à $G''(1) = E(X^2) - E(X)$.

Partie 2

4) a) Pour la méthode utilisant les accroissements finis, il faut donner les conditions correctes d'application et pour la méthode par encadrement d'intégrale, il faut penser à citer la continuité des fonctions intégrées ainsi que l'ordre des bornes.

b) Pour sommer de 1 à $n-1$, il faut considérer $n \geq 2$ (c'est la moindre des choses) puis vérifier que l'encadrement obtenu reste valable pour $n = 1$.

c) Pour diviser par $\ln n$ les trois membres de l'encadrement, il faut considérer des entiers n supérieurs ou égaux à 2 pour avoir $\ln n > 0$.

Partie 3

9) c)
- Pour $P_{(A_n = n)}(X_n = j)$, faire attention de bien faire apparaître une variable aléatoire Y_{n-1}, de même loi que X_{n-1}, et égale au nombre d'affectations de c avec un vecteur initial de $n-1$ éléments.
- Pour $P_{(A_n < n)}(X_n = j)$, faire attention de bien faire apparaître une variable aléatoire Z_{n-1}, de même loi que X_{n-1}, et égale au nombre d'affectations de c avec un vecteur initial de $n-1$ éléments.

10) b) Après sommation, pour ne pas avoir à "tricher", il faut se séparer de termes nuls dans les deux sommes car $X_{n-1}(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$.

11) Si l'on a choisi de sommer pour k allant de 2 à n, il faut prendre soin de considérer un entier n supérieur ou égal à 2 puis vérifier que l'égalité obtenue fonctionne encore pour $n = 1$.

12) b) Même remarque que pour la question 11).

c) Comme à la question 4c), pour diviser par $\ln n$ les trois membres de l'encadrement, il faut considérer des entiers n supérieurs ou égaux à 2 pour avoir $\ln n > 0$.

❖ Aide à la résolution

Partie 2

4) b) Il faut faire un changement d'indice dans la somme de gauche puis reconnaître (à un terme près) u_n dans les sommes encadrantes. Pour la fin, il faut écrire séparément les deux inégalités de l'encadrement $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \dfrac{1}{n}$ afin d'en créer un nouveau avec u_n au milieu.

Partie 3

9) b) • Pour la loi de X_2, le début de cette question donne $P(X_2 = 1)$ et $P(X_2 = 2)$, ce qui suffit.

• Pour la loi de X_3, on a de même $P(X_3 = 1)$ et $P(X_3 = 3)$, et grâce à la question 9a), on a de plus $P(X_3 = 1) + P(X_3 = 2) + P(X_3 = 3) = 1$ pour finir.

c) • Il faut expliquer pourquoi $P_{(A_n = n)}(X_n = j) = P(X_{n-1} = j-1)$: la clé est que c changera à coup sûr de contenu au dernier tour de boucle.

• Il faut aussi expliquer pourquoi $P_{(A_n < n)}(X_n = j) = P(X_{n-1} = j)$: la clé est que c ne changera pas de contenu au dernier tour de boucle.

d) La question 9c) donne $P(X_4 = 2)$ grâce à la question 9b) qui a donné la loi de X_3, la question 9b) donne $P(X_4 = 1)$ et $P(X_4 = 4)$ et on finit avec la somme $P(X_4 = 1) + P(X_4 = 2) + P(X_4 = 3) + P(X_4 = 4)$ qui vaut 1.

10) b) Pour l'initialisation, se souvenir que X_1 est la variable certaine égale à 1.

12) a) Ayant trouvé $V_n - u_n + u_n^2 = \dfrac{2}{n} u_{n-1} + V_{n-1} - u_{n-1} + u_{n-1}^2$, il faut regrouper en faisant apparaître $u_n - u_{n-1}$ et $u_n^2 - u_{n-1}^2$, puis utiliser une certaine identité remarquable, sans oublier ensuite que $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n}$.

b) Faire attention que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = u_n - 1$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = h_n - 1$.

c) • On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1$.

• La suite (h_n) est convergente et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{h_n}{\ln n} = 0$.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

Partie 1

1) Dommage de s'arrêter à $G(1)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k)$: ce n'est pas une vraie réponse !

2) • Attention !!! $G'(1)$ n'est pas la dérivée de $G(1)$ et ne vaut donc pas 0. Si c'était le cas, les nombres dérivés de toutes les fonctions dérivables seraient nuls, ce qui rendrait toutes ces fonctions constantes : quelle tristesse !

• De très mauvaises manipulations de somme mènent à des résultats délirants, comme : $E(X)=G(t)\dfrac{\sum_{k=1}^{n}k}{\sum_{k=1}^{n}t^k}$ ou encore $E(X)=kG(1)$.

3) • La faute un peu triste :

$G"(t)=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)P(X=k)t^{k-1}$ au lieu de $G"(t)=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)P(X=k)t^{k-2}$.

• Il est curieux de constater que de nombreux candidats ont réussi cette question, tout en ayant raté la précédente, pourtant plus facile ! La raison se trouve bien sûr dans le fait que le résultat de cette question était donné par l'énoncé : ça aide ! En revanche, il aurait été bien de rectifier la réponse à la question 2) en voyant celle de la question 3)…

Partie 2

4) a) Il est incroyablement malhonnête de faire semblant de savoir que $\exp\left(\dfrac{1}{k+1}\right)\leq 1+\dfrac{1}{k}\leq \exp\left(\dfrac{1}{k}\right)$, puis de nonchalamment prendre le logarithme népérien pour conclure qu'en effet, on a bien : $\dfrac{1}{k+1}\leq \ln(k+1)-\ln k\leq \dfrac{1}{k}$.

b) Certains ont eu besoin de montrer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\geq \dfrac{1}{n}$ et ils y sont arrivés alors que c'est faux !!! En effet, on doit avoir croisé « $\ln(1+x)\leq x$ » en deux ans de prépa, ce qui prouve que ce besoin ne devait pas être aussi pressant…

c) • Il n'existe pas de théorème d'encadrement pour les équivalents. Il faut d'abord, par encadrement, trouver la limite de $\dfrac{u_n}{\ln n}$.

• Pire était d'écrire : « $u_n \underset{+\infty}{\sim} +\infty$ » !

5) • Pas question de se placer en dehors du programme en écrivant que l'on sait que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$: la frime est toujours mal perçue…

- Certains, moins cultivés, ont montré que la suite (h_n) est croissante et majorée, parfois avec talent, mais parfois en ayant un majorant dépendant de n, ce qui ne convient pas.

Les plus volontaires sont allés plus loin, et ont majoré $\frac{1}{k^2}$ par $\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ (pour tout $k \geq 2$), puis obtenu $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \leq 2-\frac{1}{n}$, ce qui est juste.

Ils ont alors cru s'en sortir en écrivant « $\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$ donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq 2$ », et c'est faux, même si ça donne le bon résultat : quand on passe à la limite (comme déjà mentionné dans les conseils de l'exercice 2), on passe à la limite en une fois.

En fait, il fallait majorer $2-\frac{1}{n}$ par 2.

Partie 3

7) c) Écrire `c=find(n)` ou `c=find(max(A))` est incorrect puisque l'argument de `find` doit être un booléen (c'est-à-dire un test dont la réponse est `%t` ou `%f`). Cela dit, l'idée était la bonne.

8) On peut, bien sûr, faire une réponse "pifométrique", mais ça ne rapporte pas, même si c'est la bonne !

9) c) Bien sûr, on peut essayer de bluffer pour les probabilités conditionnelles, mais ça se voit tellement qu'il faut s'attendre à des représailles !

d) Laisser une probabilité sous la forme $P(X_4=2)=\frac{1}{12}+\frac{3}{8}$ est pénalisé et révèle à coup sûr des failles sur les calculs avec les fractions…

10) a) Pas question de conclure que la relation obtenue à la question 9c) n'est pas valable pour $j=1$!!! Il ne faut jamais contredire l'énoncé.

c) Croire que la suite $(G_n(t))$ est géométrique relève d'une méconnaissance totale des cours du lycée et de première année : la supposée raison de la suite, à savoir $\frac{t+n-1}{n}$, dépend sérieusement de n.

11) Il ne fallait pas oublier qu'on dérivait un produit !!!

12) b) C'est du cours, mais pourtant, ce n'est pas évident pour tout le monde que, comme X_1 est certaine, on a $V_1=V(X_1)=0$!

Corrigé 2019

Exercice 1 ....

Partie 1 : étude d'un exemple

1) a) Après calculs, on trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Pour "annuler" les termes hors de la diagonale, on va enlever $3A$, ce qui donne : $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I$

Conclusion :

$$\boxed{X^2 - 3X + 2 \text{ est un polynôme annulateur de } A}$$

b) Les racines de ce polynôme sont 1 et 2 donc 1 et 2 sont les valeurs propres possibles de A.

c) Le script nous enseigne que $\text{rg}(A - I) = 1$ et $\text{rg}(A - 2I) = 2$. Ces rangs sont différents de 3 donc les matrices $A - I$ et $A - 2I$ ne sont pas inversibles, ce qui permet de conjecturer que 1 et 2 sont bien valeurs propres de A.
Bilan : 1 et 2 étaient les seules valeurs propres possibles de A et ce sont bien des valeurs propres de A, par conséquent, on peut conjecturer :

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{1, 2\}}$$

En appliquant les égalités $\text{rg}(A - I) = 1$ et $\text{rg}(A - 2I) = 2$ à l'endomorphisme f, on obtient $\text{rg}(f - Id) = 1$ et $\text{rg}(f - 2Id) = 2$. Ainsi, d'après le théorème du rang, on peut conjecturer que les dimensions des sous-espaces propres de f sont :

$$\boxed{\dim\left(\text{Ker}(f - Id)\right) = 3 - 1 = 2 \text{ et } \dim\left(\text{Ker}(f - 2Id)\right) = 3 - 2 = 1}$$

d) • Pour déterminer $\operatorname{Ker}(f-Id)$, on résout $(A-I)X=0$, avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} -2x+2y-2z \\ -x+y-z=0 \end{cases}$ et se réduit à : $-x+y-z=0$, soit par exemple $y=x+z$. On a donc : $(A-I)X=0 \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow X=x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, on en déduit :

$$\operatorname{Ker}(f-Id)=\operatorname{Vect}\big((1,1,0),(0,1,1)\big)$$

La famille $\big((1,1,0),(0,1,1)\big)$ est libre (deux vecteurs non proportionnels) et génératrice de $\operatorname{Ker}(f-Id)$ donc c'est une base de $\operatorname{Ker}(f-Id)$, ce qui confirme la dimension 2 trouvée plus haut.

$$\boxed{\text{Une base de } \operatorname{Ker}(f-Id) \text{ est } \big((1,1,0),(0,1,1)\big)}$$

• Pour déterminer $\operatorname{Ker}(f-2Id)$, on résout $(A-2I)X=0$, toujours avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} -x=0 \\ -2x+y-2z=0 \\ -x+y-2z=0 \end{cases}$ et se réduit à : $\begin{cases} x=0 \\ y=2z \end{cases}$.

On a donc : $(A-2I)X=0 \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow X=z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit : $\operatorname{Ker}(f-2Id)=\operatorname{Vect}\big((0,2,1)\big)$.

La famille $\big((0,2,1)\big)$ est libre (un vecteur non nul) et génératrice de $\operatorname{Ker}(f-2Id)$ donc c'est une base de $\operatorname{Ker}(f-2Id)$, ce qui confirme la dimension 1 trouvée plus haut.

$$\boxed{\text{Une base de } \operatorname{Ker}(f-2Id) \text{ est } \big((0,2,1)\big)}$$

2) a) On a donc $\dim\big(\operatorname{Ker}(f-Id)\big)+\dim\big(\operatorname{Ker}(f-2Id)\big)=3$, ce qui montre, d'une part, que 1 et 2 sont les seules valeurs propres de f, et d'autre part, que la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, f est diagonalisable, et on sait qu'on obtient une base de $\mathbb{R}^3$ en concaténant des bases de $\operatorname{Ker}(f-Id)$ et de $\operatorname{Ker}(f-2Id)$.

Comme $\left(\left(1,1,0\right),\left(0,1,1\right)\right)$ est une base de $\operatorname{Ker}\left(f-Id\right)$ et comme $\left(\left(0,2,1\right)\right)$ est une base de $\operatorname{Ker}\left(f-2Id\right)$, alors, par concaténation, $\left(\left(1,1,0\right),\left(0,1,1\right),\left(0,2,1\right)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Avec les choix faits en 1d), les contraintes imposées par l'énoncé sont respectées.

b) Comme $\left(u_1, v_1, v_2\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, alors il existe trois réels α, β et γ tels que $\left(a,b,c\right)=\alpha u_1+\beta v_1+\gamma v_2$, c'est-à-dire tels que :

$$\left(a,b,c\right)=\alpha\left(1,1,0\right)+\beta\left(0,1,1\right)+\gamma\left(0,2,1\right)$$

On en déduit : $\left(a,b,c\right)=\left(\alpha,\alpha,0\right)+\left(0,\beta,\beta\right)+\left(0,2\gamma,\gamma\right)$.
Finalement, on obtient : $\left(a,b,c\right)=\left(\alpha,\alpha+\beta+2\gamma,\beta+\gamma\right)$.

On trouve ainsi, par identification : $\begin{cases}\alpha=a\\ \alpha+\beta+2\gamma=b\\ \beta+\gamma=c\end{cases}$.

$$x=\alpha u_1+\beta v_1+\gamma v_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=a\\ \beta+2\gamma=b-a\\ \beta+\gamma=c\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\alpha=a\\ \gamma=b-a-c\\ \beta+\gamma=c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=a\\ \gamma=b-a-c\\ \beta=2c-b+a\end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{x=\underbrace{au_1+\left(2c-b+a\right)v_1}_{\in\operatorname{Ker}\left(f-Id\right)}+\underbrace{\left(b-a-c\right)v_2}_{\in\operatorname{Ker}\left(f-2Id\right)}}$$

Partie 2 : généralisation

3) a) La diagonale de la matrice *D* est de la forme $\left(\lambda_1 \ldots \lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_2 \ldots \lambda_p \ldots \lambda_p\right)$, avec un certain nombre de "λ_1", de "λ_2", …, de "λ_p".
La diagonale de la matrice $D-\lambda_1 I$ est donc : $\left(0 \ldots 0\ \lambda_2 \ldots \lambda_2 \ldots \lambda_p \ldots \lambda_p\right)$, celle de $D-\lambda_2 I$ est $\left(\lambda_1 \ldots \lambda_1\ 0 \ldots 0\, \lambda_3 \ldots \lambda_3 \ldots \lambda_p \ldots \lambda_p\right)$, et ainsi de suite jusqu'à la diagonale de $D-\lambda_p I$ qui est $\left(\lambda_1 \ldots \lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_2 \ldots 0 \ldots 0\right)$. Comme le produit de matrices diagonales est obtenu en multipliant les coefficients diagonaux de chacune d'entre elles, il est certain que :

$$\boxed{\left(D-\lambda_1 I\right)\left(D-\lambda_2 I\right)\ldots\left(D-\lambda_p I\right)=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}$$

b) Le polynôme $\left(X-\lambda_1\right)\ldots\left(X-\lambda_p\right)$ est donc annulateur de *D*, mais *D* est une matrice de *f* dans une certaine base donc :

$$\boxed{\left(X-\lambda_1\right)\ldots\left(X-\lambda_p\right)\text{ est un polynôme annulateur de } f}$$

4) a) • Comme $L_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} \frac{X-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$, on a : $L_k(\lambda_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} \frac{\lambda_k-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j} = 1^{p-1} = 1$.

• Pour tout $i \neq k$, $L_k(\lambda_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} \frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$.

L'indice j parcourt $[\![1,p]\!]$, sans prendre la valeur k, donc j prend la valeur i (puisque $i \neq k$), ce qui fait que le produit contient un facteur nul (celui pour $j = i$) et ainsi : $L_k(\lambda_i) = 0$.

Bilan :

$$\boxed{L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = k \\ 0 \text{ si } i \neq k \end{cases}}$$

b) • Il faut noter tout d'abord que les polynômes L_k sont tous de degré $p-1$ (donc de degré inférieur ou égal à $p-1$) et qu'ainsi ils appartiennent à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

• Liberté : soit p réels $a_1,...,a_p$ tels que $\sum_{k=1}^{p} a_k L_k = 0$. Pour tout entier i de $[\![1,p]\!]$, si on évalue en λ_i, on obtient : $\sum_{k=1}^{p} a_k L_k(\lambda_i) = 0$. Comme seul le terme d'indice i n'est pas nul (d'après la question 4a), on a : $a_i L_i(\lambda_i) = 0$, soit $a_i = 0$. Ceci étant vrai pour tout i de $[\![1,p]\!]$, on a montré que $a_1 = ... = a_p = 0$. Ainsi, la famille $(L_1, L_2, ..., L_p)$ est libre.

• Comme la famille $(L_1, L_2, ..., L_p)$ contient p vecteurs de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ qui est de dimension p, on peut conclure :

$$\boxed{(L_1, L_2, ..., L_p) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{p-1}[X]}$$

c) $(L_1, L_2, ..., L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ donc tout polynôme P de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $L_1, L_2, ..., L_p$ et ainsi, il existe p réels $a_1,...,a_p$ tels que $P = \sum_{i=1}^{p} a_i L_i$.

En évaluant cette égalité en λ_k, la somme se réduit à un seul terme et on trouve :

$$P(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{p} a_i L_i(\lambda_k) = a_k L_k(\lambda_k) = a_k$$

En remplaçant dans l'égalité de départ, on trouve bien :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k}$$

d) En appliquant la relation précédente au polynôme constant $P=1$, avec, bien sûr, $P(\lambda_k)=1$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} L_k = 1}$$

5) a) On a :
$$L_k(f)=\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\right)(f-\lambda_1 Id)\circ\ldots(f-\lambda_{k-1}Id)\circ(f-\lambda_{k+1}Id)\circ\ldots(f-\lambda_p Id).$$

On en déduit, pour tout x de E :
$$L_k(f)(x)=$$
$$\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\right)\big((f-\lambda_1 Id)\circ\ldots(f-\lambda_{k-1}Id)\circ(f-\lambda_{k+1}Id)\circ\ldots(f-\lambda_p Id)\big)(x)$$

En appliquant $f-\lambda_k Id$ et en remarquant que $f-\lambda_k Id$ commute avec $f-\lambda_j Id$ (Id commute avec tous les endomorphismes de E et f commute avec lui-même), on trouve (également par linéarité de $f-\lambda_k Id$) :
$$(f-\lambda_k Id)\big(L_k(f)(x)\big)=$$
$$\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\right)\big((f-\lambda_1 Id)\circ\ldots\circ(f-\lambda_k Id)\circ\ldots\circ(f-\lambda_p Id)\big)(x)$$

D'après la question 3b), $(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_k)\ldots(X-\lambda_p)$ est un polynôme annulateur de f, on obtient donc $(f-\lambda_k Id)\big(L_k(f)(x)\big)=0$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall x\in E,\ L_k(f)(x)\in \operatorname{Ker}(f-\lambda_k Id)}$$

b) En appliquant l'égalité $\sum_{k=1}^{p} L_k = 1$ à l'endomorphisme f, on a : $\sum_{k=1}^{p} L_k(f) = Id$.

En appliquant cette nouvelle égalité à un vecteur x quelconque de E, on a cette fois :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} L_k(f)(x) = x}$$

Ceci donne bien la décomposition de x sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f-\lambda_k Id)$, puisque, pour tout k de $[\![1,p]\!]$, on a vu que $L_k(f)(x) \in \mathrm{Ker}(f-\lambda_k Id)$.

Remarque. Les polynômes L_k sont les célèbres polynômes de Lagrange.

6) Avec $n=3$, $E=\mathbb{R}^3$ et $p=2$, et comme $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=2$, on a :

$$L_1=\prod_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{2}\frac{X-\lambda_j}{\lambda_1-\lambda_j}=\frac{X-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}=-(X-2) \text{ et } L_2=\prod_{\substack{j=1\\j\neq 2}}^{2}\frac{X-\lambda_j}{\lambda_2-\lambda_j}=\frac{X-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}=X-1$$

D'après la question précédente, on en déduit :

$$\forall x\in\mathbb{R}^3,\ x=L_1(f)(x)+L_2(f)(x)=\underbrace{-(f-2Id)(x)}_{\in\mathrm{Ker}(f-Id)}+\underbrace{(f-Id)(x)}_{\in\mathrm{Ker}(f-2Id)}$$

Vérifications :

- $-(f-2Id)(x)=2x-f(x)$ et avec $x=(a,b,c)$, on obtient :

$-(f-2Id)(x)=2(a,b,c)-(a,-2a+3b-2c,-a+b)=(a,2a-b+2c,2c+a-b)$.

À la question 2b), on avait trouvé $au_1+(2c-b+a)v_1$, soit :

$a(1,1,0)+(2c-b+a)(0,1,1)$, ce qui est bien égal à $(a,2a-b+2c,2c+a-b)$.

- $(f-Id)(x)=f(x)-x$ et avec $x=(a,b,c)$, on obtient :

$(f-Id)(x)=(a,-2a+3b-2c,-a+b)-(a,b,c)=(0,-2a+2b-2c,-a+b-c)$.

À la question 2b), on avait trouvé $(b-a-c)v_2$, soit $(b-a-c)\times(0,2,1)$, ce qui est bien égal à $(0,-2a+2b-2c,-a+b-c)$.

Exercice 2 ....

Partie 1 : question préliminaire et présentation de 2 variables aléatoires X et T

1) a) Pour tout réel x, on a :

$$\boxed{\mathrm{Arctan}'(x)=\frac{1}{x^2+1}}$$

b) Comme $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, on en déduit :

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}}$$

Pour tout réel x strictement positif, posons : $h(x)=\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $h'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\times\dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2}+1}$.

En arrangeant : $h'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\times\dfrac{x^2}{x^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}=0$.

La fonction h' est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle donc h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme $h(1)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$, on en déduit :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}}$$

c) La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 s'écrit :

$$\operatorname{Arctan}(x)\underset{0}{=}\operatorname{Arctan}(0)+\operatorname{Arctan}'(0)\times\frac{x^1}{1!}+o\left(x^1\right)$$

Comme $\operatorname{Arctan}(0)=0$ et $\operatorname{Arctan}'(0)=\dfrac{1}{0^2+1}=1$, on obtient :

$$\operatorname{Arctan}(x)\underset{0}{=}x+o(x)$$

On a donc l'équivalent :

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(x)\underset{0}{\sim}x}$$

Remarque. On pouvait aussi travailler sur le nombre dérivé en 0 de la fonction arctangente :

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Arctan}(x)-\operatorname{Arctan}(0)}{x}=\operatorname{Arctan}'(0)=\frac{1}{1+0^2}=1$$

Ceci prouve élégamment et simplement l'équivalent demandé.

2) a) • La fonction f est bien définie et elle est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle à dénominateur non nul.

- La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ car, pour tout réel x, on a $x^2+1>0$.
- Étudions la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$.

Pour tout $A\geq0$, on a :

$$\int_0^A f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^A\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{\pi}(\operatorname{Arctan}(A)-\operatorname{Arctan}(0))=\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(A)$$

Comme $\lim\limits_{x\to\pi/2}\tan(x)=+\infty$, on a $\lim\limits_{A\to+\infty}\operatorname{Arctan}(A)=\dfrac{\pi}{2}$, d'où la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ ainsi que sa valeur :

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{2}$$

Voici la 8e édition de À VOS MATHS : elle contient les **épreuves de mathématiques du concours EDHEC posées de 2008 à 2019** toujours suivies des barèmes qui ont été mis en place chaque année pour ce concours.
Les **corrigés** sont précédés de **nombreux conseils** (méthode, rédaction, aide à la résolution, fautes à éviter) qui permettront au lecteur de se mettre sur la bonne voie sans avoir à consulter trop vite le corrigé.

Cet ouvrage est destiné à tous les étudiants des classes préparatoires aux grandes écoles de commerce (**option scientifique**), qu'ils soient en première ou en deuxième année (un tableau indique quels exercices peuvent être traités par un étudiant de première année).
Il permettra à tous de travailler de deux façons distinctes :

- En premier lieu, un **travail thématique** pour lequel un tableau propose 33 thèmes possibles couvrant les quatre grandes parties du programme (**analyse**, **algèbre linéaire**, **probabilités et informatique**).
- Ensuite, un travail en temps réel consistant à se donner quatre heures pour traiter une épreuve donnée (un tableau indique le temps conseillé pour chaque exercice).

Fort d'une longue expérience des concours, l'auteur, qui a écrit ce livre en pensant exclusivement aux étudiants et à leurs éventuelles difficultés, souhaite qu'il profite pleinement à tous les futurs candidats, et pas seulement à ceux qui présentent le concours EDHEC.

www.editions-ellipses.fr
9 782340 032651