ATOUT CONCOURS

pour faire la différence

ACCÈS

Éric **Bilinski**, Nicole **Chevalier**

Réussir le concours ACCÈS

\+ Sujets types & annales corrigés

ellipses

ATOUT CONCOURS

COLLECTION DIRIGÉE PAR PIERRE DALLENNE

Éric Bilinski

professeur certifié de Mathématiques
au lycée privé Marcq-Institution
et concepteur de l'épreuve de Mathématiques
du concours Puissance Alpha

Nicole Chevalier

professeur certifié de Lettres Classiques
en Classes Préparatoires scientifiques implantées
du lycée Frédéric Ozanam,
sur les sites des écoles ISEN et ICAM de Lille

Réussir le concours ACCÈS

ellipses

Retrouvez les livres de la collection « Atout concours »
sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-053755

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Vous avez décidé d'intégrer une grande école de commerce post-bac : l'ESDES (Lyon), l'ESSCA (Angers et Paris) ou l'IÉSEG (Lille et Paris). Ces écoles vont vous préparer à un diplôme Bac +5, revêtu du grade de MASTER.

Le présent ouvrage a pour ambition de présenter des rappels et prolongements utiles des programmes académiques, nécessaires à l'approfondissement de vos connaissances, afin d'aborder efficacement le concours ACCÈS ; il a pour objectif la préparation à 3 épreuves écrites du concours ACCÈS :

- l'épreuve de RAISONNEMENT LOGIQUE ET MATHÉMATIQUES,
- l'épreuve d'OUVERTURE CULTURELLE,
- l'épreuve de SYNTHÈSE.

Il est réparti en 4 parties.

- La partie I, **Épreuve de raisonnement logique et mathématiques**, vous propose :
  - un point complet sur les connaissances de mathématiques utiles au concours à l'aide de fiches de synthèse complètes et détaillées
  - des exercices d'entraînement sur les notions et méthodes du concours ACCÈS
  - des annales du concours ACCÈS corrigés à la fin de chaque fiche de synthèse
- La partie II, **Ouverture culturelle**, vous rappelle les quatre grandes thématiques en culture :
  - Histoire, Géographie, Mythes et Religions,
  - Idées, Sciences et Techniques,
  - Politique, Économie, Société,
  - Arts, Loisirs et Médias.

  Répartie en 11 fiches, elle vous donne des repères (chronologie des évènements, vocabulaire, définitions techniques et personnages importants).
- La partie III, **Exercices d'entraînement (ouverture culturelle et synthèse)**, vous propose un planning de progression par quinzaine, de septembre jusqu'au concours.
- La partie IV, **Synthèse (méthode et corrections des 16 exercices d'entraînement)**, vous fait cerner la méthode et l'exigence d'un exercice qui n'existe pas dans les programmes du lycée.

Table des matières

PARTIE II
OUVERTURE CULTURELLE

PARTIE III
EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT
(OUVERTURE CULTURELLE ET SYNTHÈSE)

PARTIE IV
SYNTHÈSE
(MÉTHODE ET CORRECTIONS DES 16 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT)

Partie I
Épreuve de raisonnement logique et mathématiques

Informations utiles

Le programme est disponible sur www.concours-acces.com : il se compose d'épreuves écrites et d'épreuves orales.

Les 4 épreuves écrites : synthèse, raisonnement logique et mathématiques, ouverture culturelle et anglais sont communes aux 3 écoles du concours ACCÈS pour l'ensemble des candidats.

Elles se déroulent sur une journée aux mêmes heures pour tous les candidats quel que soit le centre ACCÈS sélectionné.

Epreuves écrites	ESDES	ESSCA	IESEG
Synthèse	4	6	6
Raisonnement logique et mathématiques	6	8	8
Ouverture culturelle	6	3	3
Anglais	4	3	3
Total	20	20	20

I. Épreuve de raisonnement logique et mathématiques

L'épreuve de raisonnement logique et mathématiques est un VRAI-FAUX **sans justification, sans calculatrice et à barème négatif**.

Règle d'attribution des points :

Vous disposez d'un capital de points initial. Chaque erreur entraîne une pénalité (P) qui entame votre capital. Une absence de réponse entraîne une pénalité (p) qui entame aussi votre capital (p est inférieur à P). Enfin, un bonus est attribué si vous répondez correctement aux quatre items d'une même question.

Cette épreuve est décomposée en trois parties :

➨ **Raisonnement logique :**

Cette partie comporte 5 exercices utilisant toutes les connaissances :

- de géométrie de collège, calculs de durées, d'aires, de volumes (Fiche 2 page 17)
- de calculs de fractions, puissances, racines carrées etc $\cdots$ (Fiche 3 page 87)
- de logique mathématique (Fiche 8 page 175)
- des suites (Fiche 13 page 311)
- des sytèmes (Fiche 6 page 135)
- des polynômes (Fiche 5 page 123)

Cette partie est souvent jugée difficile par les élèves et ne doit pas être prise à la légère.

➨ **Raisonnement mathématiques :**

Cette partie est composée de 5 exercices qui correspondent " globalement" au programme de terminale.

On utilisera, dans cette partie :

- les connaissances de la **partie de raisonnement logique**
- la fiche sur les limites (Fiche 7 page 161)
- la fiche sur les intégrales (Fiche 11 page 279)
- la fiche sur les fonctions (Fiche 10 page 227)

➨ **Problème mathématiques :**

Dans cette partie (Fiche 14 page 331), on utilisera les connaissances des deux parties précédentes pour répondre aux affirmations d'un problème décomposé en 5 exercices.

La grande différence avec les deux parties précédentes est **qu'il est possible d'utiliser, par exemple, dans l'exercice 15 les résultats des exercices 12 et 13.**

Je conseille aux élèves de terminer cette partie après avoir traité le maximum d'exercices des deux parties précédentes.

II. Planning de travail

Pour vous aider à organiser votre travail, et bien gérer chacun des chapitres de ce livre, nous vous proposons une préparation au concours ACCÈS en 7 phases.

II.1. Phase n°1 : de septembre aux vacances de la Toussaint

En rentrant des vacances d'été (et si possible pendant les vacances d'été) il est très important de revoir et de maîtriser les fiches suivantes :

- exercices de calculs de fractions, puissances $\cdots$ (Fiche 3 page 87)
- les connaissances de géométrie (Fiche 2 page 17)
- les fonctions polynômes (Fiche 5 page 123)
- la fiche développer - factoriser (Fiche 4 page 109)

II.2. Phase n°2 : les vacances de la Toussaint

Pendant les vacances de la Toussaint, on travaillera la fiche sur les systèmes (Fiche 6 page 135) ainsi que la fiche sur les limites (Fiche 7 page 161).

II.3. Phase n°3 : avant les vacances de noël

Avant les vacances de noël, on pourra se fixer de travailler :

- la fiche sur les racines carrées et la valeur absolue (Fiche 12 page 295)
- la fiche **complète** de **loqique mahématiques** (Fiche 8 page 175)

II.4. Phase n°4 : les vacances de noël

Pendant les vacances de noël, on utilise le site ACCÈS pour obtenir des annales de concours et, pour chaque annale, on travaille en détail la 1re série de logique tout en travaillant :

- la fiche sur les suites (Fiche 13 page 311)
- la fiche sur les probabilités (Fiche 9 page 199)

II.5. Phase n°5 : avant les vacances de février

A cette période de l'année, le programme de révision sur la 1re partie du concours (le raisonnement logique) **doit être clôturé** .

On travaille la fiche sur les fonctions (Fiche 10 page 227) qui correspond, globalement, à la partie de **raisonnement mathématiques** ainsi que le fiche Intégration (Fiche 11 page 279).

► **Attention :** Il vous reste, globalement, **4 mois pour clôturer votre préparation.**

II.6. Phase n°5 : les vacances de février

Aux vacances de février, on termine, si nécessaire la fiche sur les fonctions et on s'entraîne à faire **complètement** les annales du concours ACCÈS disponibles sur le site du concours ACCÈS.

II.7. Phase n°6 : avant le concours

Cette dernière phase est **la plus importante** de toutes.

- On reprend la **totalité** des fiches/annales de concours pour ne pas perdre de temps le jour du concours.
- On essaie de faire une **synthèse des différentes méthodes rencontrées** selon le type d'exercice.

II.8. Phase n°7 : le jour du concours

Comme je le dis souvent à mes élèves, **un concours n'est pas un devoir surveillé** . On peut réussir un concours avec 07/20 et ne pas obtenir l'école souhaitée avec 12/20.

Réussir le concours consiste à avoir le **meilleur** classement possible. **On ne vous demande pas de savoir faire tous les exercices.** Juste d'en faire le plus possible $\cdots$

Retenir :

Plus l'épreuve vous semble compliquée et plus il y aura d'élèves qui vont décrocher.

En conclusion, plus l'épreuve est **compliquée** et plus il est facile d'être **bien classé**.

Je me répète les phrases suivantes :

- Je ne stresse pas : **je laisse les autres élèves stresser à ma place**.
- **Je suis bien préparé**, je m'accroche et **je donne mon maximum.**
- Je ne reste jamais **bloqué plus de 15 min** sur un exercice. Cela ne sert à rien, **il faut passer à un autre exercice** quitte à y revenir plus tard **s'il me reste du temps**.
- Je commence à faire tous les exercices des 3 parties que je **sais faire et uniquement ceux-là**.
- En fonction du temps qui me reste, je reprends **complètement** le sujet pour travailler les exercices que je " pense" pouvoir faire **en un laps de temps correct**.

FICHE 2

Formulaire de géométrie

I. différentes unités de mesures

I.1. Préfixes

Retenir :

1. **pico** $\times 10^{-12}$
2. **nano** $\times 10^{-9}$
3. **micro** $\times 10^{-6}$
4. **milli** $\times 10^{-3}$
5. **centi** $\times 10^{-2}$
6. **déci** $\times 10^{-1}$
7. **déca** $\times 10$
8. **hecto** $\times 10^{2}$
9. **kilo** $\times 10^{3}$
10. **méga** $\times 10^{6}$
11. **giga** $\times 10^{9}$
12. **téra** $\times 10^{12}$

I.2. Unités de longueur

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1	0	0	0	0		
			1	0	0	0

■ **Autres unités de longueur :**

- Les physiciens utilisent comme unité **l'angström (ou angstroem : Ä)** : 1 Ä = 10^{-10}m.
- Les marins ou aviateurs utilisent comme unité le **mille marin (ou nautical mile : NM)** : 1 NM = 1852 m.
- En astronomie, on utilise :
  - **l'unité astronomique de longueur (u.a)** correspondant approximativement à la distance entre la terre et la lune : 1 u.a $\approx 150 \times 10^{6}$km .
  - **l'année lumière (*a.l*)** correspondant à la distance parcourue par la lumière dans le vide : 1 a.l $\approx 9461 \times 10^{9}$ km $\approx 10^{13}$ km.

- **le parsec (pc)** : 1 pc ≈ 3,2616 a.l.

- Les anglo-saxons utilisent couramment comme unités :
  - **le mille terrestre (ou mile en anglais)** : 1 mile = 1 609,344 m.
  - **le pied (ou foot, feet en anglais)** : 1 foot = 12 inch ≈ 0,304 8 m.
  - **le pouce (ou inch en anglais)** : 1 inch = 2,54 cm.

I.3. Unités d'aire et de superficie

km²		**hm²**		**dam²**		**m²**		**dm²**		**cm²**		**mm²**	
			ha		**a**								
			1	**0**	**0** **1**	**0**	**0**						

Retenir :

- **Un are (a)** est égal à 1 $\text{dam}^2 = 100\text{m}^2$.
- **Un hectare (ha)** est égal à $1\text{hm}^2 = 100\ \text{dam}^2 = 10\,000\ \text{m}^2$.

I.4. Unités de volume

km³			**hm³**			**dam³**			**m³**			**dm³**			**cm³**			**mm³**		
											KL	**hL**	**daL**	**L**	**dL**	**cL**	**mL**			
														1	**0**	**0** **1**	**0** **0**			

Retenir : $1\text{L} = 1\ \text{dm}^3$.

I.5. Unités de masse

La **masse** est souvent confondue à tort avec le **poids** , dont l'unité officielle est le Newton (N). La masse d'un homme sera constante qu'il soit sur Terre ou sur la Lune, alors que son **poids dépend de la pesanteur** .

t	**q**		**kg**	**hg**	**dag**	**g**	**dg**	**cg**	**mg**
1	**0** **1**	**0** **0**	**0** **0**						

■ **Autres unités de longueur :**

- **Un quintal (q)** est égal à 100 kg.
- **Une tonne (t)** est égale à 1000 kg.

- **La livre** est une ancienne unité de masse divisée en onces . En France, en 1812, la livre métrique fut définie comme valant 500 grammes (une demi-livre de beurre : 250g de beurre par exemple).
- **L'once néerlandaise (ons)** n'est pas une mesure officielle mais reste souvent employée. 1 ons vaut 100g.
- **Le talent** est une unité ancienne utilisée à l'époque de la Grande Grèce et de l'Empire Romain. Un talent équivalait à 25,86 kg d'argent et représentait le volume d'eau nécessaire pour remplir une amphore.

I.6. Unités de durée

■ **Année bissextile :** Une **année bissextile** , est une année qui comporte 366 jours au lieu de 365 jours. **Le jour supplémentaire est le 29 février.**

L'année bissextile a été mise en place par Jules César en 45 avant l'ère chrétienne afin de régler le décalage trop important entre les années solaires et civiles.

L'année sera bissextile :

- si l'année est divisible par 4 et non divisible par 100 (exemples 2016, 2020, 2024, 2028 etc $\cdots$).
- ou si l'année est divisible par 400 (exemples 400, 800, 1200 etc $\cdots$).

Retenir :

- Sauf cas particulier ci-dessus, les années bissextiles sont tous les 4 ans.
- 1 jour est égal à 24 heures
- 1 heure est égal à 60 minutes ou 3600 secondes
- 1 milliseconde est égale à 10^{-3} secondes

► **Convertir en heures, minutes, secondes les durées suivantes :**

A. 3,25 h

B. 3,4 jours 10 h 40 s

✓ **Éléments de réponse :**

A. $3,25$ h $= 3$ h $+0,25$ h $= 3 + 0,25 \times 60 = 3$ h 15 min

B.
$$\begin{aligned} 3,4 \text{ jours } 10 \text{ h } 40 \text{ s} &= 3,4 \times 24 \text{ h} + 10 \text{ h } 40 \text{ s} \\ &= 81,6 \text{ h} + 10 \text{ h } 40 \text{ s} \\ &= 91,6 \text{ h} + 40 \text{ s} \\ &= 91 \text{ h } 36 \text{ min } 40 \text{ s} \end{aligned}$$

► **Convertir en nombre décimal d'heures :**

A. 3 h 52 min 30 s **B.** 11 h 25 min 30 s **C.** 2 jours 6 h 11 min 31,2 s

✓ **Éléments de réponse :**

A. 3h 52 min 30 s = 3 h +52 min +0,5 min = 3 h +52,5 min .

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} \quad \text{donc} \quad 52{,}5 \text{ min} = \frac{52{,}5 \times 1}{60} = 0{,}875 \text{ h}.$$

d'où 3h 52 min 30 s = 3,875 h

B. 11 h 25 min 30 s = 11 h +25 min +0,5 min = 11 h +25,5 min.

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} \quad \text{donc} \quad 25{,}5 \text{ min} = \frac{25{,}5 \times 1}{60} = 0{,}425 \text{ h}.$$

d'où 11 h 25 min 30 s = 11,425 h.

C. $1 \text{ min} = 60 \text{ s} \quad \text{donc} \quad 31{,}2 \text{ s} = \frac{31{,}2 \times 1}{60} = 0{,}52 \text{ min}$,

donc 2 jours 6 h 11 min 31,2 s = 2 jours 6 h 11,52 min

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} \quad \text{donc} \quad 11{,}52 \text{ min} = \frac{11{,}52 \times 1}{60} = 0{,}192 \text{ h}.$$

donc 2 jours 6 h 11 min 31,2 s = 2 jours 6,192 h.

$$1 \text{ j} = 24 \text{ h} \quad \text{donc} \quad 6{,}192 \text{ h} = \frac{6{,}192 \times 1}{24} = 0{,}258 \text{ j}.$$

donc 2 jours 6 h 11 min 31,2 s = 2,258 jours.

► **Calculer en heure(s), minute(s), seconde(s) :**

A. 3,75 h + 3 h 30 min 10 s

B. 5 h 10 min 40 s – 2 h 40 min 50 s

C. 3 jours 4 h 35 min – 1 jour 8 h 55 min 15 s

✓ **Éléments de réponse :**

A. 3,75 h = 3h + 0,75 × 60 min = 3 h 45 min d'où

3 h	45 min	00 s
+ 3 h	30 min	10 s
= 6 h	75 min	10 s
= 7 h	15 min	10 s

B. 5 h 10 min 40 s = 4 h 70 min 40 s = 4 h 69 min 100 s d'où

5 h	10 min	40 s
= 4 h	69 min	100 s
− 2 h	40 min	50 s
2 h	29 min	50 s

C. 3 j 4 h 35 min = 2 j 28 h 35 min = 2 j 27 h 95 min = 2 j 27 h 94 min 60 s d'où

3 j	4 h	55 min	
= 2 j	27 h	94 min	60 s
− 1 j	8 h	55 min	15 s
= 1 j	19 h	39 min	45 s

I.7. Unités en informatique

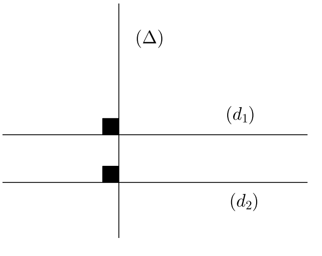
Retenir :
En informatique, il n'y a que deux états **Vrai : 1** ou **Faux : 0**, on dit qu'on a un système **binaire**. Le **bit** (abréviation de binary digit) est une unité élémentaire d'information ne prouvant prendre que 2 valeurs 0 ou 1. Le matériel informatique fonctionne donc par puissances de 2, l'unité de base est l'octet (ou Byte en anglais).

- **1 octet** = 1 byte = 2^3 bits
- **1 Kibit** = 2^{10} bits = 1024 bits
- **1 kilo-octet** = 10^3 octets = 10^3 bytes
- **1 méga-octet** = 10^6 octets = 10^6 bytes
- **1 giga-octet** = 10^9 octets = 10^9 bytes
- **1 téra-octet** = 10^{12} octets = 10^{12} bytes

II. Droites parallèles droites perpendiculaires

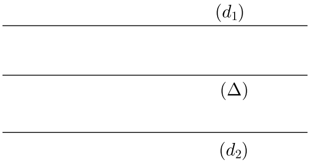
□ **Propriété : Si** deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite **alors** elles sont parallèles entre elles.

$$\begin{cases} \Delta \perp (d_1) \\ \Delta \perp (d_2) \end{cases} \Longrightarrow (d_1) \parallel (d_2)$$



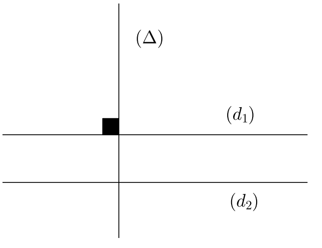
□ **Propriété :** **Si** deux droites sont parallèles à une même troisième droite **alors** elles sont parallèles entre elles.

$$\begin{cases} \Delta \parallel (d_1) \\ \Delta \parallel (d_2) \end{cases} \Longrightarrow (d_1) \parallel (d_2)$$



□ **Propriété : Si** deux droites sont parallèles **alors** toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

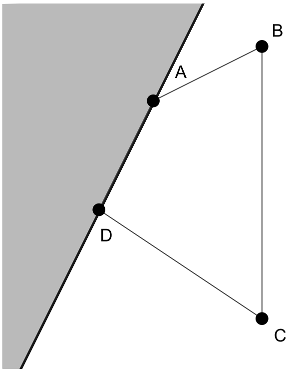
$$\begin{cases} \Delta \perp (d_1) \\ (d_1) \parallel (d_2) \end{cases} \Longrightarrow (\Delta) \perp (d_2)$$



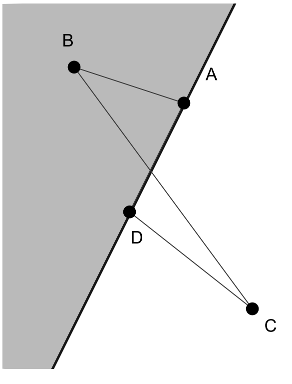
III. Les quadrilatères

III.1. Quadrilatère convexe

■ **Définition :**
Un quadrilatère (4 sommets) est dit **convexe** si tous ses sommets sont situés dans un même demi-plan de frontière n'importe quelle droite contenant un côté du quadrilatère.



Quadrilatère **convexe**



Quadrilatère **non convexe**

■ **Remarque :** On trouve dans certains exercices (ou livres) le terme de quadrilatère **" non croisé"** à la place de quadrilatère **non convexe**.

► **Exemples de quadrilatères convexes :** Parallélogrammes, trapèzes etc ⋯

III.2. Parallélogramme

■ **Définition :**
On appelle **parallélogramme**, tout quadrilatère **convexe (ou non croisé)** vérifiant l'une des propriétés suivantes :

1. les côtés opposées sont parallèles deux à deux

2. les diagonales se coupent en leur milieu

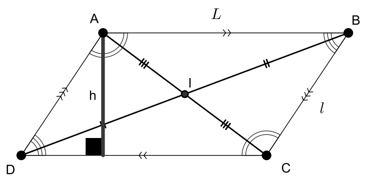
3. les angles opposés ont la même mesure

4. deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur

Dans un quadrilatère convexe (ou non croisé) l'existence d'une des quatre propriétés entraîne l'existence des trois autres propriétés.

□ **Aire du parallélogramme :**
Si L et h représentent respectivement la longueur d'un côté et h la distance de ce côté au côté parallèle opposé alors l'aire $\mathscr{A}$ du parallélogramme est égale à :

$$\mathscr{A} = L \times h$$



III.3. Rectangle

■ **Définition :**
On appelle **rectangle**, tout quadrilatère **convexe (ou non croisé)** vérifiant l'une des propriétés suivantes :

1. le quadrilatère possède 3 angles droits

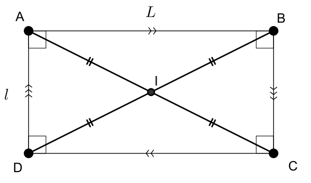
2. le quadrilatère est un **parallélogramme** et possède **1 angle droit**

3. le quadrilatère est un **parallélogramme** qui a ses **diagonales de même longueur**

Dans un quadrilatère convexe (ou non croisé) l'existence d'une des trois propriétés entraîne l'existence des deux autres propriétés.

□ **Aire du rectangle :**
Si L et l représentent respectivement la longueur et la largeur du rectangle alors l'aire $\mathscr{A}$ est égale à :

$$\mathscr{A} = L \times l$$



III.4. Losange

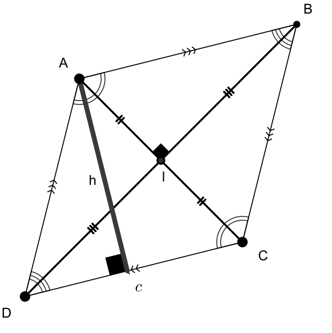
■ **Définition :**
On appelle **losange**, tout quadrilatère **convexe (ou non croisé)** vérifiant l'une des propriétés suivantes :

1. le quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur
2. le quadrilatère est un **parallélogramme** ayant **deux côtés consécutifs de même longueur**
3. le quadrilatère est un **parallélogramme** qui a ses **diagonales perpendiculaires**

Dans un quadrilatère convexe (ou non croisé) l'existence d'une des trois propriétés entraîne l'existence des deux autres propriétés.

□ **Aire du losange :**
Si c et h représentent respectivement la longueur du côté et la hauteur du losange alors l'aire $\mathscr{A}$ est égale à :

$$\mathscr{A} = c \times h$$



III.5. Carré

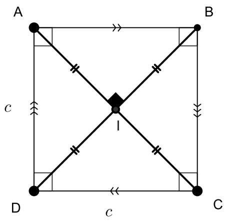
■ **Définition :**
On appelle **carré**, tout quadrilatère **convexe (ou non croisé)** vérifiant l'une des propriétés suivantes :

1. le quadrilatère est à la fois un rectangle et un losange
2. le quadrilatère est un **parallélogramme** ayant **deux côtés consécutifs de même longueur** et ses **diagonales de même longueur**
3. le quadrilatère est un **parallélogramme** ayant **ses diagonales perpendiculaires** et **un angle droit**
4. le quadrilatère est un **parallélogramme** ayant **deux côtés consécutifs de même longueur** et **un angle droit**

Dans un quadrilatère convexe (ou non croisé) l'existence d'une des quatre propriétés entraîne l'existence des trois autres propriétés.

☐ **Aire du carré :**
Si c représente la longueur du côté du carré alors l'aire $\mathscr{A}$ est égale à :

$$\mathscr{A} = c^2$$



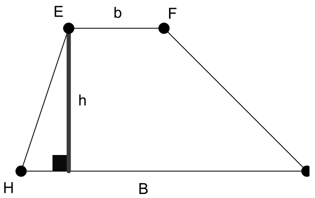
III.6. Trapèze

■ **Définition :**
On appelle **trapèze**, tout quadrilatère **convexe (ou non croisé)** ayant deux côtés **non consécutifs parallèles** appelés **bases du trapèze**.

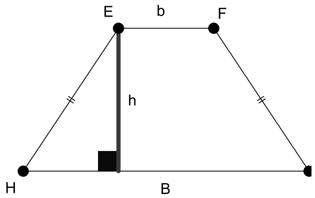
La **hauteur** d'un trapèze est une perpendiculaire abaissée d'une base sur une autre.

Si les deux côtés consécutifs non parallèles sont de **même longueur**, le trapèze est dit **isocèle**.

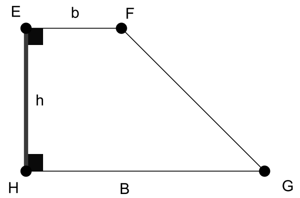
Si deux côtés consécutifs sont **perpendiculaires**, le trapèze est dit **rectangle**.



Trapèze quelconque



Trapèze isocèle



Trapèze rectangle

☐ **Aire du trapèze :**
Si B, b et h représentent respectivement les longueurs de la grande base, de la petite base et d'une hauteur alors l'aire $\mathscr{A}$ du trapèze est égale à :

$$\mathscr{A} = \frac{(B+b)\times h}{2}$$

IV. Les angles

IV.1. Degré, radian .

■ **Définition :** Un angle géométrique peut avoir une mesure en **degré** ou **radian**. Pour convertir un angle, on utilise le tableau de proportionnalité suivant :

Degré	180°	x
Radian	π rad	y

d'où $180 \times y = \pi \times x$

Degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Rad	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad

IV.2. Quelques définitions $\cdots$

■ **Définitions :**

- **Un angle aigu** est un angle ayant une mesure x :

$$0° \leqslant x < 90° \quad \left(\text{ou} \quad 0 \text{ rad} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right).$$

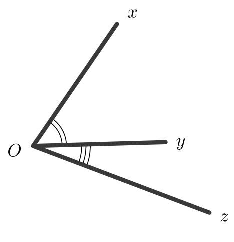
  On dit aussi qu'un angle est aigu si et seulement si son **cosinus est strictement positif** (cf. XIII page 53).

- **Un angle obtus** est un angle ayant une mesure x :

$$90° < x \leqslant 180° \quad (\text{ou} \quad 90 \text{ rad} < x \leqslant \pi \text{ rad}).$$

  On dit aussi qu'un angle est obtus si et seulement si son **cosinus est strictement négatif** (cf. XIII page 53).

- **Un angle droit** est un angle ayant une mesure x égale à 90° (ou $\frac{\pi}{2}$ rad) .
- **Un angle nul** est un angle ayant une mesure x égale à 0° (ou 0 rad) .
- **Un angle plat** est un angle ayant une mesure x égale à 180° (ou π rad) .
- Deux angles sont **adjacents** si et seulement si :
  - ils ont le **même sommet**
  - ils ont **un côté commun**
  - ils sont situés **de part et d'autre** de ce côté commun



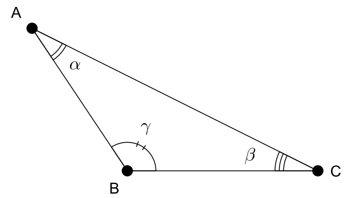
- Deux angles sont **complémentaires** lorsque la somme des mesures des deux angles est égale à 90° $\left(\text{ou} \frac{\pi}{2} \text{rad}\right)$.
- Deux angles sont **supplémentaires** lorsque la somme des mesures des deux angles est égale à 180° (ou π rad).

IV.3. Les angles dans un triangle

□ **Propriété :**

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° ou π rad :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° = \pi \text{ rad.}$$

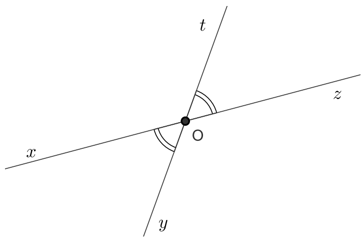


IV.4. Les angles opposés par le sommet

□ **Propriété :**

Les **angles opposés par le sommet** sont de même mesure :

$$\widehat{xOy} = \widehat{tOz}\,.$$

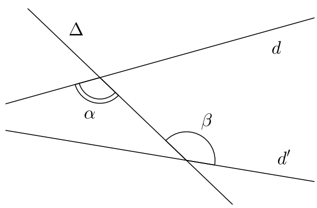


IV.5. Angles alternes, internes, correspondants

IV.5 a. Définitions

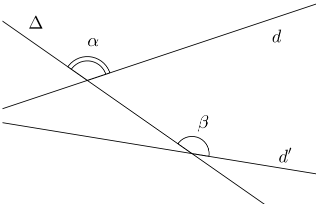
■ **Angles alternes-internes :**

Deux droites d et d' sont coupées par une sécante Δ suivant des angles **alternes-internes $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$** .



■ **Angles correspondants :**

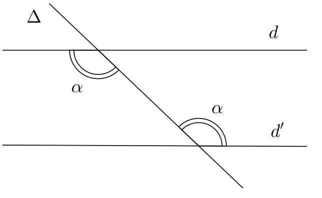
Deux droites d et d' sont coupées par une sécante Δ suivant des **angles correspondants $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$** .



IV.5 b. Propriétés

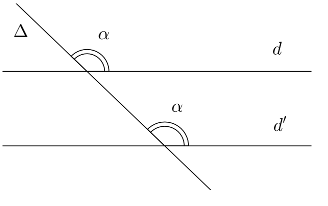
■ **Angles alternes-internes :**

- Deux droites parallèles d et d' sont coupées par une sécante Δ suivant des angles alternes-internes **de même mesure.**
- Réciproquement, si une droite Δ coupe deux droites d et d' suivant deux angles alternes-internes de même mesure alors les droites d et d' sont parallèles.



■ **Angles correspondants :**

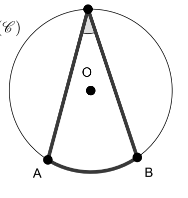
- Deux droites parallèles d et d' sont coupées par une sécante Δ suivant des angles correspondants **de même mesure.**
- Réciproquement, si une droite Δ coupe deux droites d et d' suivant deux angles correspondants de même mesure alors les droites d et d' sont parallèles.



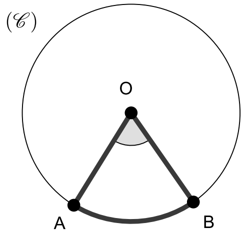
IV.6. Angles inscrits dans un cercle

■ **Angle inscrit :**

Si M, A et B sont trois points situés sur un même cercle $(\mathscr{C})$ alors l'angle $\widehat{AMB}$ est appelé **angle inscrit** dans le cercle $(\mathscr{C})$.

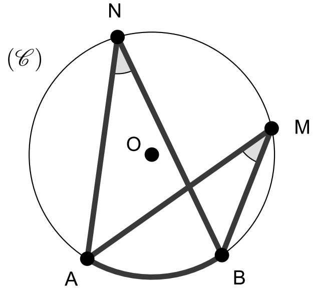


■ **Angle au centre :**



Si A et B sont deux points situés sur un même cercle $(\mathscr{C})$ de centre O alors l'angle $\widehat{AOB}$ est appelé **angle au centre** du cercle $(\mathscr{C})$.

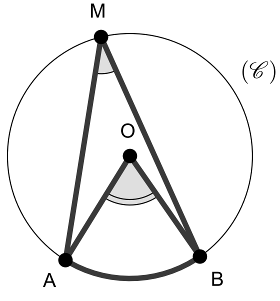
□ **Propriété des angles inscrits :**



Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent **le même arc de cercle** alors ils ont la même mesure.

Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont deux angles inscrits dans le cercle $(\mathscr{C})$ qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$ donc $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

□ **Propriété de l'angle au centre :**



Dans un cercle, si un angle inscrit et un angle au centre interceptent **le même arc de cercle** alors la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'angle au centre.

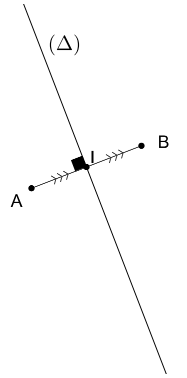
L' angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$ donc $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

V. Droites remarquables du plan

V.1. Médiatrice

■ **Définition :**

Soit A et B deux points distincts du plan. La **médiatrice (Δ) du segment** $[\boldsymbol{AB}]$ est la droite perpendiculaire à ce segment et qui passe par le milieu de ce segment.

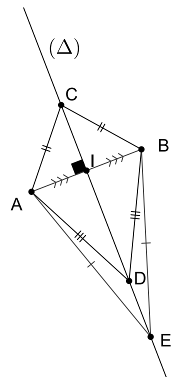


□ **Propriété :**

Tout point de la médiatrice (Δ) d'un segment est situé à égale distance des extrémités de ce segment.

Soit A, B et M trois points du plan avec A et B distincts.

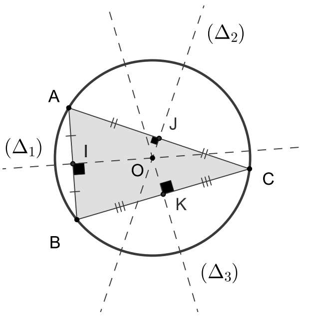
- Si $M \in (\Delta)$ alors $MA = MB$
- Réciproquement, si $MA = MB$ alors le point M est situé sur la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$.



□ **Médiatrices d'un triangle :**

Dans un triangle, les médiatrices des trois côtés sont concourantes en un point appelé **centre du cercle circonscrit au triangle**:

$$OB = OC = OA.$$

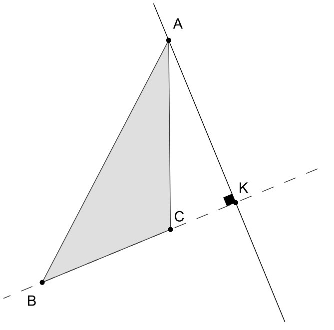


V.2. Hauteurs d'un triangle

■ **Définition :**

Dans un triangle, on appelle **hauteur** toute droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

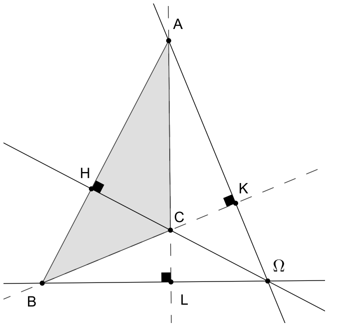
Sur la figure ci-contre, la droite (AK) est la hauteur issue de A du triangle ABC.



□ **Hauteurs d'un triangle :**

Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé **orthocentre**.

Sur la figure ci-contre, Ω est l'orthocentre du triangle ABC.

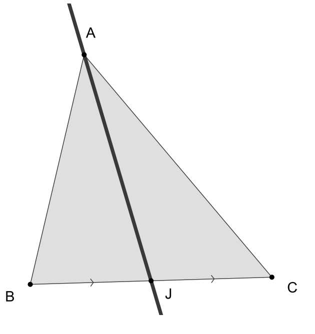


V.3. Médianes d'un triangle

■ **Définition :**

Dans un triangle, on appelle **médiane** toute droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé à ce sommet.

Sur la figure ci-contre, la droite (AJ) est la médiane issue de A du triangle ABC.

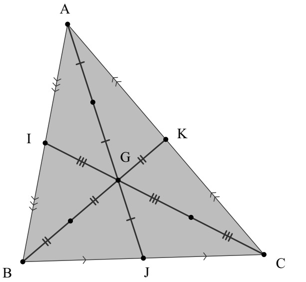


☐ **Propriété :**

Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes en un point G appelé **centre de gravité du triangle** et situé aux deux tiers de la médiane en partant du sommet.

Sur la figure ci-contre on a placé I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ d'où :

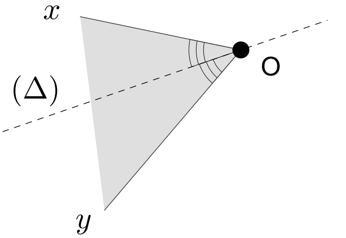
- $AG = 2GJ$ et $AG = \frac{2}{3}AJ$
- $BG = 2GK$ et $BG = \frac{2}{3}BK$
- $CG = 2GI$ et $CG = \frac{2}{3}CI$



V.4. Bissectrices d'un triangle

■ **Définition :**

La **bissectrice d'un angle** est la droite (Δ) qui partage l'angle en deux angles **adjacents** (c'est à dire ayant le même sommet et situés de part et d'autre de (Δ)) et **de même mesure**.

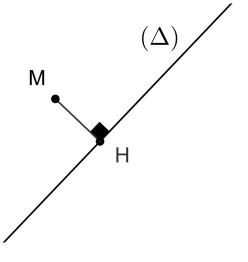


■ **Projection orthogonale d'un point sur une droite :**

Soit (Δ) une droite du plan et M un point n'appartenant pas à la droite (Δ).

On appelle **projeté orthogonal** du point M sur la droite (Δ), l'unique point H de (Δ) tel que les droites (Δ) et (MH) soient perpendiculaires.

On dit aussi que H est le **pied de la perpendiculaire à la droite (Δ) passant par M.**



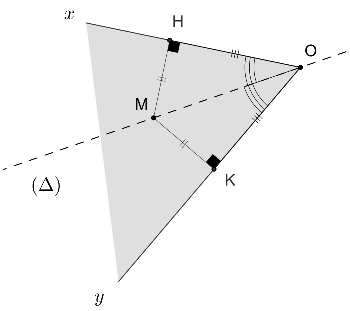
■ **Définition :**

Soit M un point du plan, (Δ) la bissectrice d'un angle $\widehat{xOy}$, H et K les projetés respectifs du point M sur les côtés $[Ox)$ et $[Oy)$.

Les phrases suivantes sont équivalentes :

- $M \in (\Delta)$
- $MH = MK$

On dit aussi que **tout point de la bissectrice d'un angle est situé à égale distance des côtés de cet angle.**

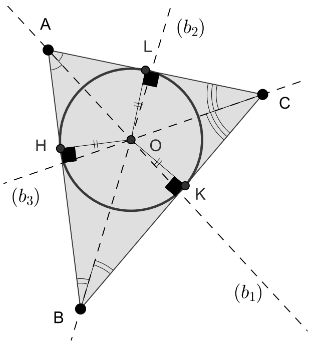


Remarque :

Si $M \in (\Delta)$ alors les triangles MHO et MKO sont **isométriques**.

□ **Propriété :**

Dans un triangle, les bissectrices des trois angles sont concourantes en un point O appelé **centre du cercle inscrit dans le triangle**.



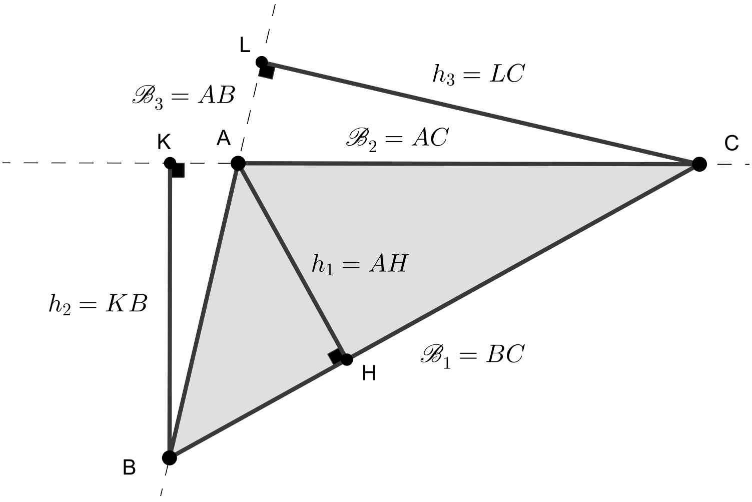
VI. Les triangles

VI.1. Aire du triangle

■ **Aire d'un triangle :**

L'aire $\mathscr{A}$ d'un triangle est égale à : $\mathscr{A} = \dfrac{\mathscr{B}\text{ase} \times \text{hauteur}}{2}$

.



► **Attention :** Dans un triangle, il y a trois hauteurs donc trois calculs possibles pour l'aire du triangle :

$$\mathscr{A} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{AC \times KB}{2} = \frac{AB \times LC}{2}$$

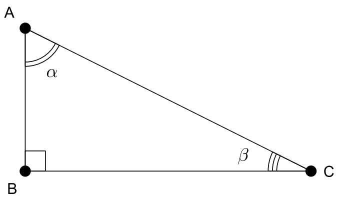
VI.2. Différents triangles

VI.2 a. Triangle rectangle

■ **Définition :**
On appelle **triangle rectangle**, tout triangle vérifiant l'une des propriétés suivantes :

- le triangle possède un angle droit
- le triangle possède **deux angles aigus complémentaires**

Dans un triangle, l'existence d'une des deux propriétés entraîne l'existence de l'autre propriété.



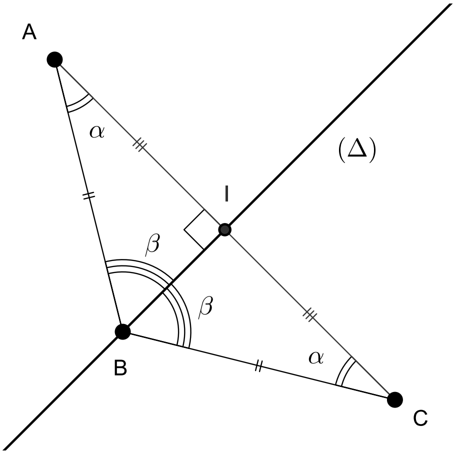
■ **Définition :** Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit s'appelle **l'hypoténuse**. C'est le plus long des trois côtés.

VI.2 b. Triangle isocèle

■ **Triangle isocèle :**
On appelle **triangle isocèle**, tout triangle vérifiant l'une des propriétés suivantes :

1. le triangle possède (au moins) **deux côtés de même longueur**
2. le triangle possède (au moins) **deux angles de même mesure**
3. le triangle possède (au moins) **une médiane comme axe de symétrie**
4. le triangle possède (au moins) **une hauteur comme axe de symétrie**
5. le triangle possède (au moins) **une bissectrice comme axe de symétrie**
6. le triangle possède (au moins) **une médiatrice d'un côté comme axe de symétrie**
7. le triangle possède (au moins) une médiane confondue avec une bissectrice, une hauteur et une médiatrice d'un côté (cette droite est un axe de symétrie pour le triangle).

Dans un triangle, l'existence d'une des sept propriétés entraîne l'existence des six autres propriétés.



■ **Définition :** Si un triangle ABC a ses côtés $[BC]$ et $[BA]$ de même longueur ($BC = BA$) alors on dit que le triangle ABC est **isocèle en B** et que B est le **sommet principal** du triangle isocèle.

On a les équivalences suivantes :

1. $BC = BA$

2. $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$

3. la hauteur (Δ) issue de B est aussi bissectrice de l'angle ABC, médiane issue de B et médiatrice du segment $[AC]$

4. La droite Δ est un axe de symétrie pour le triangle ABC

VI.2 c. Triangle rectangle et isocèle

■ **Définition :**
Un triangle est **rectangle et isocèle** si il vérifie l'une des propriétés suivantes :

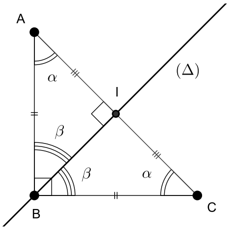
1. le triangle est à la fois un triangle rectangle et triangle un isocèle

2. le triangle possède **un angle droit et deux côtés de même longueur**

3. le triangle possède **deux angles de 45° ou $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ rad**

Dans un triangle, l'existence d'une des trois propriétés entraîne l'existence des deux autres propriétés.

■ **Attention :** Si un triangle est rectangle et isocèle alors il est rectangle et isocèle **pour un même sommet**.



VI.2 d. Triangle équilatéral

■ **Définition :**
On appelle **triangle équilatéral**, tout triangle vérifiant l'une des propriétés suivantes :

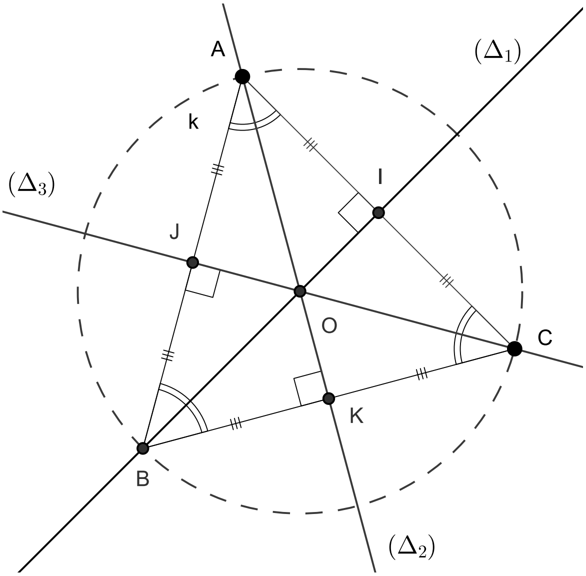
1. le triangle est isocèle en **chacun de ses trois sommets**

2. le triangle possède **trois côtés de même longueur**

3. le triangle possède) **trois angles de même mesure : 60°** ou $\frac{\pi}{3}$ rad

4. la médiane issue d'un sommet est aussi bissectrice de l'angle associé à ce sommet, hauteur issue de ce même sommet et médiatrice du côté opposé à ce sommet
5. chaque médiane (ou hauteur, bissectrice, médiatrice) est un **axe de symétrie** pour le triangle

Dans un triangle, l'existence d'une des cinq propriétés entraîne l'existence des quatre autres propriétés.



Remarque :

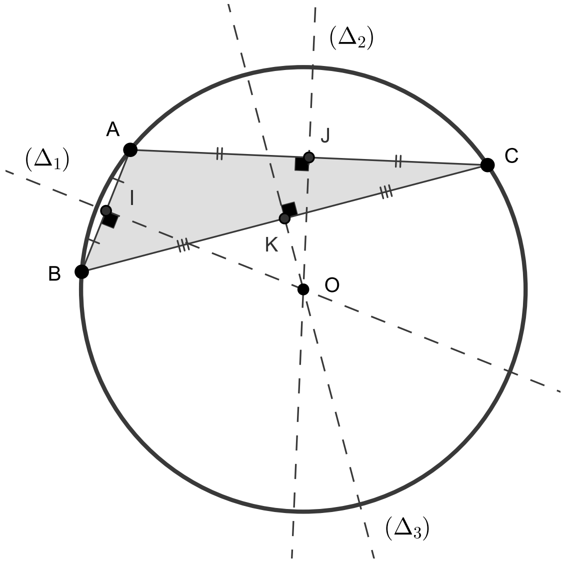
- $AB = AC$ donc le triangle ABC est **isocèle en A**
- $BA = BC$ donc le triangle ABC est **isocèle en B**
- $CA = CB$ donc le triangle ABC est **isocèle en C**

VI.3. Cercle inscrit, cercle circonscrit

■ **Cercle circonscrit au triangle :**
On appelle **cercle circonscrit à un triangle** le cercle passant par les trois sommets du triangle.

Dans un triangle, le centre du cercle circonscrit est situé à **l'intersection des trois médiatrices** des côtés du triangle.

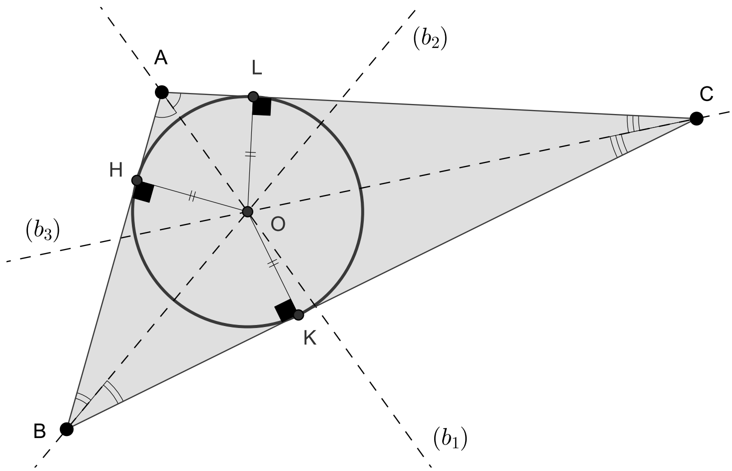
On dit que les médiatrices sont **concourantes** au centre du cercle circonscrit au triangle.



■ **Cercle inscrit dans un triangle :**
On appelle **cercle inscrit dans un triangle** le cercle situé à l'intérieur du triangle et tangent à chaque côté du triangle.

Dans un triangle, le centre du cercle inscrit est situé à **l'intersection des trois bissectrices** des angles du triangle.

On dit que les bissectrices sont **concourantes** au centre du cercle inscrit dans le triangle.



☐ **Propriété :** Si O est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et H, K et L les pieds des perpendiculaires passant par O respectivement aux côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$, alors

$OH = OK = OL$.

VI.4. Triangles isométriques (ou égaux)

VI.4 a. Définition

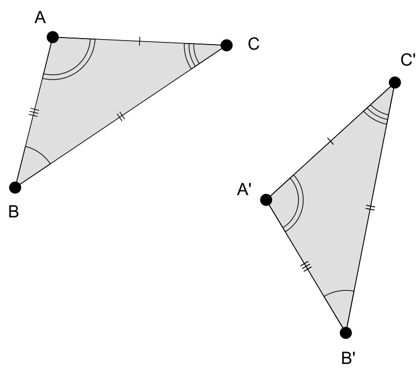
■ **Triangles isométriques :**

Dire que deux triangles **sont isométriques** signifie que leurs côtés sont **deux à deux de même longueur**.

Sur la figure ci-contre on a :

- $AB = A'B'$
- $AC = A'C'$
- $BC = B'C'$

donc les triangles ABC et $A'B'C'$ sont **isométriques**.



VI.4 b. Propriétés

☐ **Propriété :**

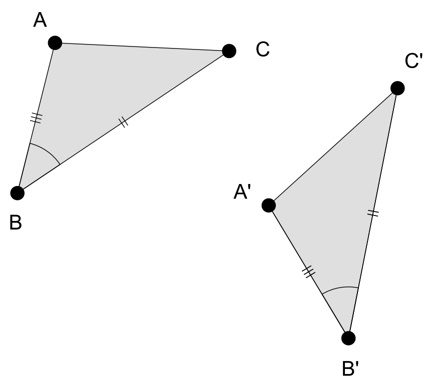
Si deux triangles sont isométriques alors leurs angles respectifs sont égaux deux à deux.

☐ **Propriété :**

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur deux à deux, alors ils sont isométriques.

$$\begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \\ BA = B'A' \\ BC = B'C' \end{cases}$$

donc les triangles ABC et $A'B'C'$ sont **isométriques**.

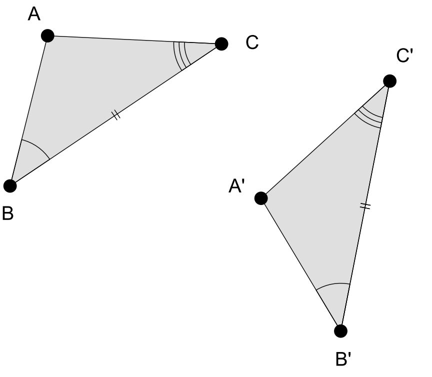


□ Propriété :

Si deux triangles ont un côté de même longueur et adjacent à deux angles égaux deux à deux alors ils sont isométriques.

$$\begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \\ \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'} \\ BC = B'C' \end{cases}$$

donc les triangles ABC et $A'B'C'$ sont **isométriques**.



□ Triangles isométriques et aires :

Deux triangles isométriques ont la même aire.

VI.5. Triangles semblables

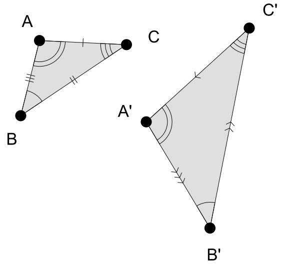
VI.5 a. Définition

■ Triangles semblables (ou de même forme) :
Deux triangles **sont semblables (ou de même forme)** lorsque leurs angles sont de même mesure deux à deux.

Sur la figure ci-contre on a :

- $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$
- $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$
- $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$

donc les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.



VI.5 b. Propriétés

□ Propriétés :

Si deux triangles ont **deux angles de même mesure** alors ils sont semblables.

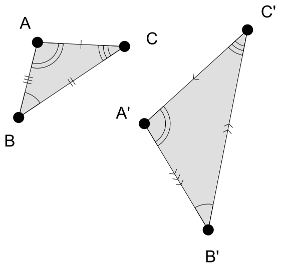
$$\begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \\ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \end{cases} \implies \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} \implies ABC \text{ et } A'B'C' \text{ semblables.}$$

■ **Définition :**

Deux triangles sont **semblables (ou de même forme)** si et seulement si ils ont des côtés **proportionnels deux à deux** .

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si il existe un réel $k > 0$ tel que :

- $AB = k \times A'B' \iff \dfrac{AB}{A'B'} = k$
- $BC = k \times B'C' \iff \dfrac{BC}{B'C'} = k$
- $AC = k \times A'C' \iff \dfrac{AC}{A'C'} = k$



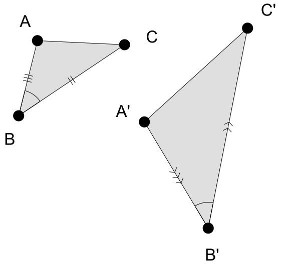
□ **Propriétés :**

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre **deux côtés respectivement proportionnels** alors ils sont semblables.

Si $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et si il existe un nombre réel $k > 0$ tel que :

- $AB = k \times A'B' \iff \dfrac{AB}{A'B'} = k$
- $BC = k \times B'C' \iff \dfrac{BC}{B'C'} = k$

alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.



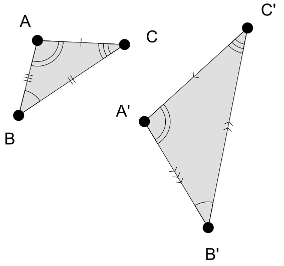
□ **Propriété :**

Si les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables et si il existe un réel $k > 0$ tel que :

- $AB = k \times A'B' \iff \dfrac{AB}{A'B'} = k$
- $BC = k \times B'C' \iff \dfrac{BC}{B'C'} = k$
- $AC = k \times A'C' \iff \dfrac{AC}{A'C'} = k$

alors :

$$\text{Aire } (ABC) = k^2 \times \text{Aire } (A'B'C')$$



VII. Cercle et disque

VII.1. Définitions

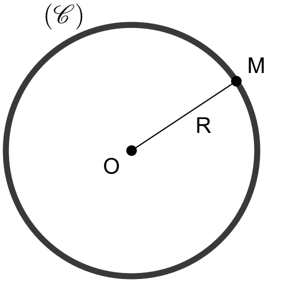
■ Cercle de rayon R :

R est un nombre positif.

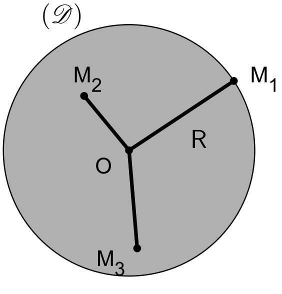
Un **cercle** est formé de tous les points du plan situés à une même distance R d'un point O appelé centre du cercle.

La distance du centre O à un point M du cercle est le **rayon** du cercle.

$$M \in (\mathscr{C}) \iff OM = R$$



■ Disque de rayon R :

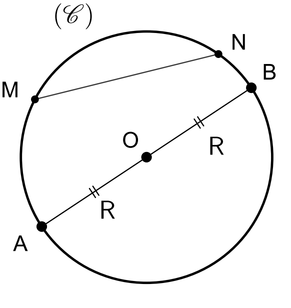


R est un nombre positif.

Un **disque** de centre O et de rayon R est formé de tous les points du plan situés à une distance $d = OM \leqslant R$.

$$M \in (\mathscr{D}) \iff OM \leqslant R$$

■ Corde et diamètre d'un cercle :



$(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O et de rayon R.

- Une **corde** est un segment $[MN]$ reliant deux points du cercle.
- Un **diamètre** est une corde $[AB]$ passant par le centre O du cercle.

VII.2. Périmètre d'un cercle et aire d'un disque

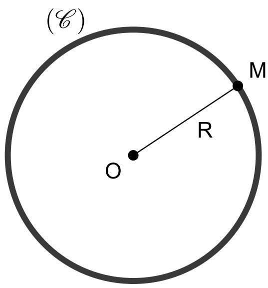
□ **Périmètre et aire :**

- Le **périmètre P** d'un cercle de rayon R est égal à :

$$P = 2\pi R.$$

- **L'aire** A d'un disque de rayon R est égale à :

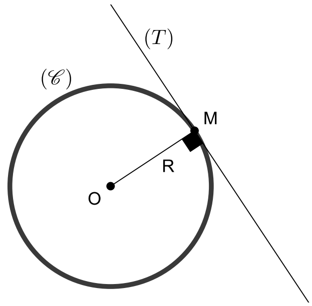
$$A = \pi R^2.$$



VII.3. Tangente à un cercle

■ **Tangente à un cercle :**

Une droite est dite **tangente à un cercle** de centre O lorsqu'elle passe par un point M du cercle tout en étant perpendiculaire au segment $[OM]$ appelé rayon du cercle.



VII.4. Équation d'un cercle

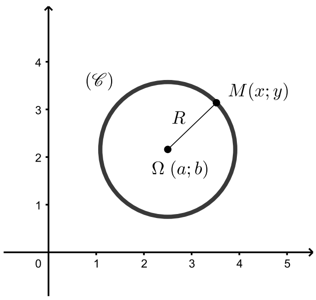
□ **Équation d'un cercle de rayon *R* :**

R est un nombre réel positif.

Le point $M(x\ ;\ y)$ est sur le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(a\ ;\ b)$ et de rayon R lorsque :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (\mathscr{C}) &\iff \Omega M = R \\ &\iff \Omega M^2 = R^2 \\ &\iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \end{aligned}$$



▶ **Préciser si les équations suivantes sont des équations de cercle :**

A. $x^2+4x+y^2+2y+1=0$ **B.** $x^2-6x+y^2+4=0$ **C.** $x^2+y^2-1=0$

D. $x^2+y^2-5=0$ **E.** $x^2-6x+y^2-4y+14=0$ **F.** $x^2+2x+y^2+3=0$

✓ **Éléments de réponse :**

A. x^2+4x est le début du développement de l'identité remarquable $(x+2)^2$:

$$(x+2)^2=x^2+4x+4 \iff x^2+4x=(x+2)^2-4$$

De même y^2+2y est le début du développement de l'identité remarquable $(y+1)^2$:

$$(y+1)^2=y^2+2y+1 \iff y^2+2y=(y+1)^2-1$$

On remplace dans l'équation de départ :

$$\begin{aligned} x^2+4x+y^2+2y+1=0 &\iff \left(x^2+4x\right)+\left(y^2+2y\right)+1=0 \\ &\iff \left((x+2)^2-4\right)+\left((y+1)^2-1\right)+1=0 \\ &\iff (x+2)^2+(y+1)^2-4=0 \\ &\iff (x+2)^2+(y+1)^2=4=2^2 \\ &\iff (x-(-2))^2+(y-(-1))^2=4=2^2 \end{aligned}$$

L'équation $x^2+4x+y^2+2y+1=0$ est donc l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(-2\ ;\ -1)$ et de rayon $R=2$

B. x^2-6x est le début du développement de l'identité remarquable $(x-3)^2$:

$$(x-3)^2=x^2-6x+9 \iff x^2-6x=(x-3)^2-9$$

De plus, $y^2=(y-0)^2$

On remplace dans l'équation de départ :

$$\begin{aligned} x^2-6x+y^2+4=0 &\iff \left(x^2-6x\right)+\left(y^2\right)+4=0 \\ &\iff \left((x-3)^2-9\right)+\left((y-0)^2\right)+4=0 \\ &\iff (x-3)^2+(y-0)^2-5=0 \\ &\iff (x-3)^2+(y-0)^2=5=\left(\sqrt{5}\right)^2 \end{aligned}$$

L'équation $x^2-6x+y^2+4=0$ est donc l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(3\ ;\ 0)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$

C. $x^2+y^2=1 \iff (x-0)^2+(y-0)^2=1$ est donc l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(0\ ;\ 0)$ et de rayon $R=1$

D. $x^2 + y^2 = 5 \iff (x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$ est donc l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(0\,;\,0)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$

E. $x^2 - 6x$ est le début du développement de l'identité remarquable $(x-3)^2$:

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \iff x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$$

De même $y^2 - 4y$ est le début du développement de l'identité remarquable $(y-2)^2$:

$$(y-2)^2 = y^2 - 4y + 4 \iff y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$$

On remplace dans l'équation de départ :

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 4y + 14 = 0 &\iff \left(x^2 - 6x\right) + \left(y^2 - 4y\right) + 14 = 0 \\ &\iff \left((x-3)^2 - 9\right) + \left((y-2)^2 - 4\right) + 14 = 0 \\ &\iff (x-3)^2 + (y-2)^2 + 1 = 0 \\ &\iff (x-3)^2 + (y-2)^2 = -1 \end{aligned}$$

Ce qui est **impossible** car une somme de deux carrés est toujours positive.
L'équation $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 14 = 0$ ne représente donc **aucun cercle**.

F. $x^2 + 2x$ est le début du développement de l'identité remarquable $(x+1)^2$:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \iff x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$$

De plus, $y^2 = (y-0)^2$

On remplace dans l'équation de départ :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 + 3 = 0 &\iff \left(x^2 + 2x\right) + \left(y^2\right) + 3 = 0 \\ &\iff \left((x+1)^2 - 1\right) + \left((y-0)^2\right) + 3 = 0 \\ &\iff (x+1)^2 + (y-0)^2 + 2 = 0 \\ &\iff (x+1)^2 + (y-0)^2 = -2 \quad \textbf{ce qui est IMPOSSIBLE} \end{aligned}$$

L'équation $x^2 + 2x + y^2 + 3 = 0$ ne représente donc **aucun ensemble**.

Cas particulier :

L'équation $x^2 + 2x + y^2 + 1 = 0 \iff (x+1)^2 + y^2 = 0$ est bien une équation de la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ avec $R = 0$.

Dans ce cas, il n'y a qu'un **unique** point qui vérifie cette équation, le point $\Omega(-1\,;\,0)$.

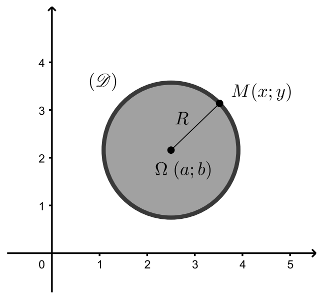
VII.5. Équation d'un disque

□ Équation d'un disque de rayon R :

R est un nombre réel positif.

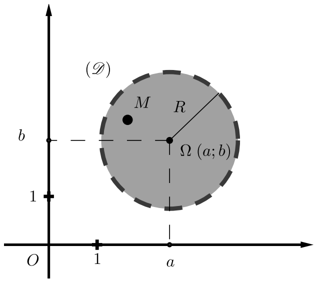
Le point $M(x\,;y)$ est sur le disque $(\mathscr{D})$ de centre $\Omega(a\,;\,b)$ et de rayon R lorsque i:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant R^2$$



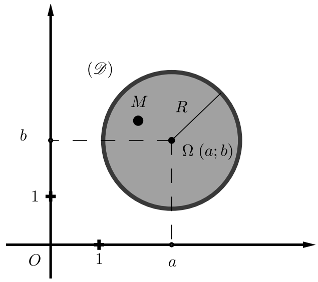
$$\begin{aligned} M(x;y)\in(\mathscr{D}) &\iff \Omega M \leqslant R \\ &\iff \Omega M^2 \leqslant R^2 \\ &\iff (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant R^2 \end{aligned}$$

➡ 4 cas à retenir :



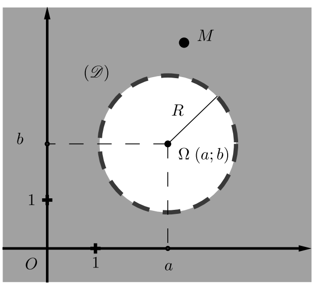
$$(x-a)^2+(y-b)^2 < R^2$$

Le point M est situé à l'intérieur du disque $(\mathscr{D})$.



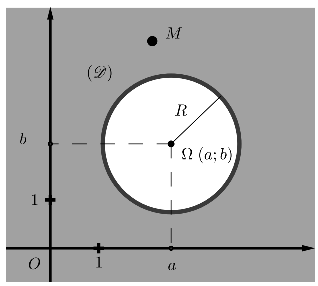
$$(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant R^2$$

Le point M est situé à l'intérieur du disque $(\mathscr{D})$ ou sur le cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et de rayon R .



$$(x-a)^2+(y-b)^2 > R^2$$

Le point M est situé à l'extérieur du disque $(\mathscr{D})$.



$$(x-a)^2+(y-b)^2 \geqslant R^2$$

Le point M est situé à l'extérieur du disque $(\mathscr{D})$ ou sur le cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et de rayon R .

► Représenter les ensembles suivants :

A. $x^2+4x+y^2+2y+1 \leqslant 0$ **B.** $x^2-6x+y^2+4 \geqslant 0$ **C.** $x^2+y^2-1<0$

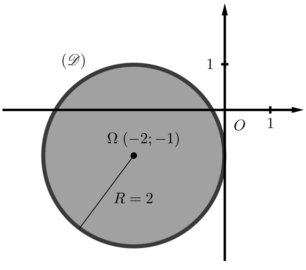
D. $x^2+y^2-5>0$ **E.** $(x+1)^2+(y+2)^2 \leqslant 0$ **F.** $(x+1)^2+(y+2)^2 \geqslant 0$

G. $x^2+y^2>0$ **H.** $x^2+y^2<0$ **I.** $x^2+y^2 \geqslant 0$

J. $x^2+y^2 \leqslant 0$

✓ Éléments de réponse :

A.



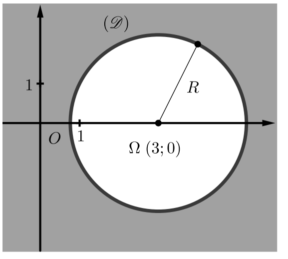
$x^2+4x+y^2+2y+1 \leqslant 0$

$\iff (x+2)^2+(y+1)^2 \leqslant 4$

$\iff (x-(-2))^2+(y-(-1))^2 \leqslant 2^2$

Le point M est situé à l'intérieur du disque $(\mathscr{D})$ ou sur le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(-2\ ;\ -1)$ et de rayon $R=2$.

B.



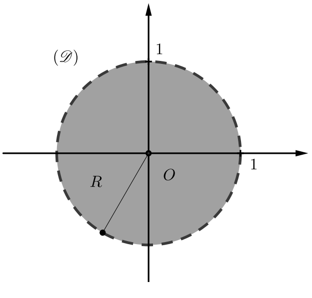
$x^2-6x+y^2+4 \geqslant 0$

$\iff (x-3)^2+y^2 \geqslant 5$

$\iff (x-3)^2+(y-0)^2 \geqslant \left(\sqrt{5}\right)^2$

Le point M est situé à l'extérieur du disque $(\mathscr{D})$ ou sur le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(3\ ;\ 0)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

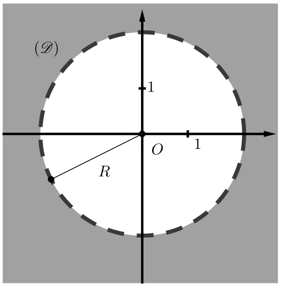
C.



$x^2+y^2-1<0 \iff (x-0)^2+(y-0)^2<1^2$

Le point M est situé à l'intérieur du disque $(\mathscr{D})$ de centre $O(0\ ;\ 0)$ et de rayon $R=1$.

D.



$x^2+y^2-5>0 \iff (x-0)^2+(y-0)^2>\left(\sqrt{5}\right)^2$

Le point M est situé à l'extérieur du disque $(\mathscr{D})$ de centre $\Omega(0\ ;\ 0)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

E. $(x+1)^2+(y+2)^2 \leqslant 0$

$\iff (x-(-1))^2+(y-(-2))^2 \leqslant 0$

$\iff (x-(-1))^2+(y-(-2))^2 = 0$

$\iff (x;y) = (-1\ ;\ -2)$

L'ensemble recherché est le point de coordonnées $(-1\ ;\ -2)$.

F. $(x+1)^2+(y+2)^2 \geqslant 0$

$\iff (x-(-1))^2+(y-(-2))^2 \geqslant 0$

$\iff x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ car l'inéquation est **toujours vérifiée**.

L'ensemble recherché correspond à la totalité du plan (xOy).

G. $x^2+y^2>0$

$\iff (x-0)^2+(y-0)^2>0$

$\iff x \neq 0$ et $y \neq 0$

L'ensemble recherché correspond au plan (xOy) privé de l'origine $O(0\ ;\ 0)$ du repère.

H. Il est **impossible** d'avoir $x^2+y^2<0$.

Il n'y a aucun ensemble à représenter.

I. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, nous avons toujours : $x^2+y^2 \geqslant 0$

L'ensemble recherché correspond à la totalité du plan (xOy).

J. $x^2+y^2 \leqslant 0$

$\iff x^2+y^2=0$

$\iff (x;y)=(0\ ;\ 0)$

L'ensemble recherché est l'origine du repère $O(0\ ;\ 0)$.

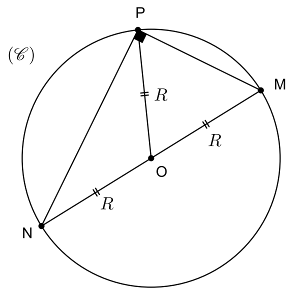
VIII. Triangle rectangle et cercle

☐ **Propriété :**

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de diamètre $[MN]$, P un point du plan distinct des points M et N et O le milieu du segment $[MN]$.

Les phrases suivantes sont équivalentes :

- $P \in (\mathscr{C})$
- le triangle MNP est rectangle en P
- $OM = OP = ON$

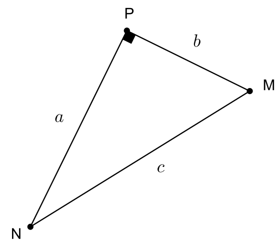


IX. Théorème de Pythagore et réciproque

☐ **Théorème de Pythagore :**

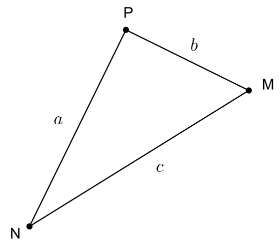
Si le triangle MNP est rectangle en P alors :

$$MN^2 = MP^2 + NP^2$$



☐ **Réciproque du théorème de Pythagore :**

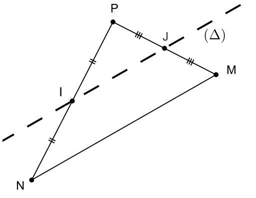
Si le triangle MNP vérifie la relation $MN^2 = MP^2 + NP^2$ alors il est rectangle en P et admet le segment $[MN]$ comme hypoténuse.



X. Théorèmes sur la droite des milieux

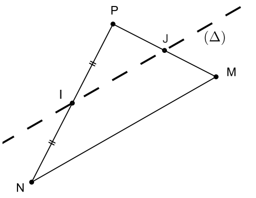
□ **Théorème n°1 :**

Si une droite passe par les milieux respectifs des deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté.



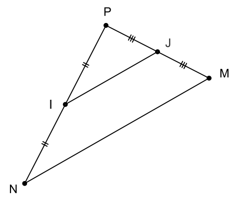
□ **Théorème n°2 :**

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un deuxième côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.



□ **Théorème n°3 :**

Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors il est parallèle au troisième côté et a pour longueur la moitié de celui-ci.

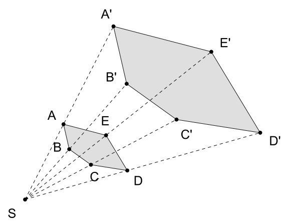


XI. Agrandissement-réduction

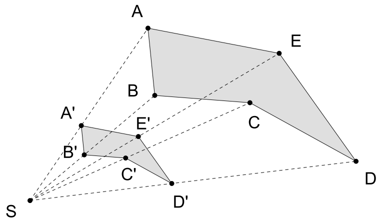
■ **Définition :**

Soit $(\mathscr{F})$ le polygone $ABCDE$ et $(\mathscr{F}')$ le polygone $A'B'C'D'E'$.

- $(\mathscr{F}')$ est un **agrandissement** de $(\mathscr{F})$ si et seulement toutes les longueurs de $(\mathscr{F})$ sont multipliées par un réel $k > 1$.
- $(\mathscr{F}')$ est une **réduction** de $(\mathscr{F})$ si et seulement toutes les longueurs de $(\mathscr{F})$ sont multipliées par un réel $0 < k < 1$.



$k > 1$



$0 < k < 1$

☐ **Propriété :** dans un agrandissement ou la réduction d'une figure d'un coefficient $k > 0$:

- les angles sont inchangés
- les longueurs sont multipliées par k
- les aires sont multipliées par k^2
- les volumes sont multipliés par k^3

Remarque :

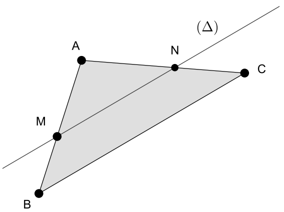
Si le triangle $A'B'C'$ est un agrandissement ou une réduction d'un triangle ABC alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont **semblables**.

XII. Théorème de Thalès et réciproque

☐ **Théorème de Thalès dans un triangle :**

Dans le triangle ABC si on a :

- M un point du segment $[AB]$ distinct des points A et B
- N un point du segment $[AC]$ distinct des points A et C
- les droites (MN) et (BC) parallèles



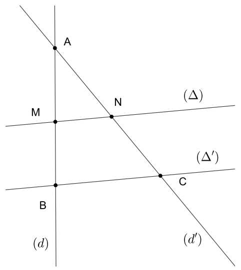
alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC} \iff \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$

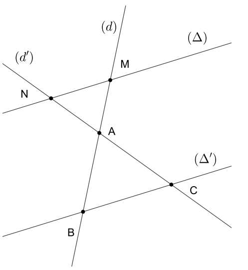
☐ **Théorème de Thalès :**

Si on a :

- (d) et (d') deux droites sécantes en A
- M et B deux points de (d) distincts de A
- N et C deux points de (d') distints de A
- les droites (AM) et (BC) parallèles

$$\text{alors} \qquad \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \iff \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$





☐ **Réciproque du théorème de Thalès :**

Si on a :

- (d) et (d') deux droites sécantes en A
- M et B deux points de (d) distincts de A
- N et C deux points de (d') distints de A
- les points A, M et B alignés dans le même sens que les points A, N et C
- $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

☐ **Propriété :** dans la configuration de Thalès précédente :

- les triangles AMN et ABC sont semblables
- si $k = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} > 1$ alors le triangle AMN est un **agrandissement** du triangle ABC
- si $0 < k = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} < 1$ alors le triangle AMN est une **réduction** du triangle ABC
- si $k = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ alors $\text{Aire}(AMN) = k^2 \times \text{Aire}(ABC)$

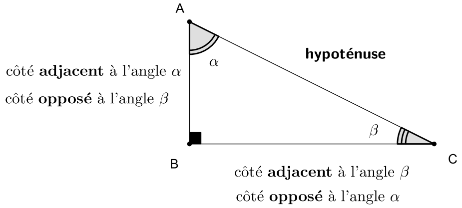
XIII. Trigonométrie dans le triangle rectangle

■ **Définition :** Soit ABC un triangle rectangle en B et x un angle aigu du triangle rectangle.

- $\sin(x) = \dfrac{\textbf{côté opposé}}{\textbf{hypoténuse}}$ *retenir : sin-op-hyp ou soh*
- $\cos(x) = \dfrac{\textbf{côté adjacent}}{\textbf{hypoténuse}}$ *retenir : cos-adj-hyp ou cah*
- $\tan(x) = \dfrac{\textbf{côté opposé}}{\textbf{côté adjacent}}$ *retenir : tan-op-adj ou toa*

Remarque :

le mot **soh-cah-toa** permet de retenir toutes les formules précédentes.



$\cos(\alpha) = \dfrac{AB}{AC}$ $\sin(\alpha) = \dfrac{BC}{AC}$

$\cos(\beta) = \dfrac{BC}{AC}$ $\sin(\beta) = \dfrac{AB}{AC}$

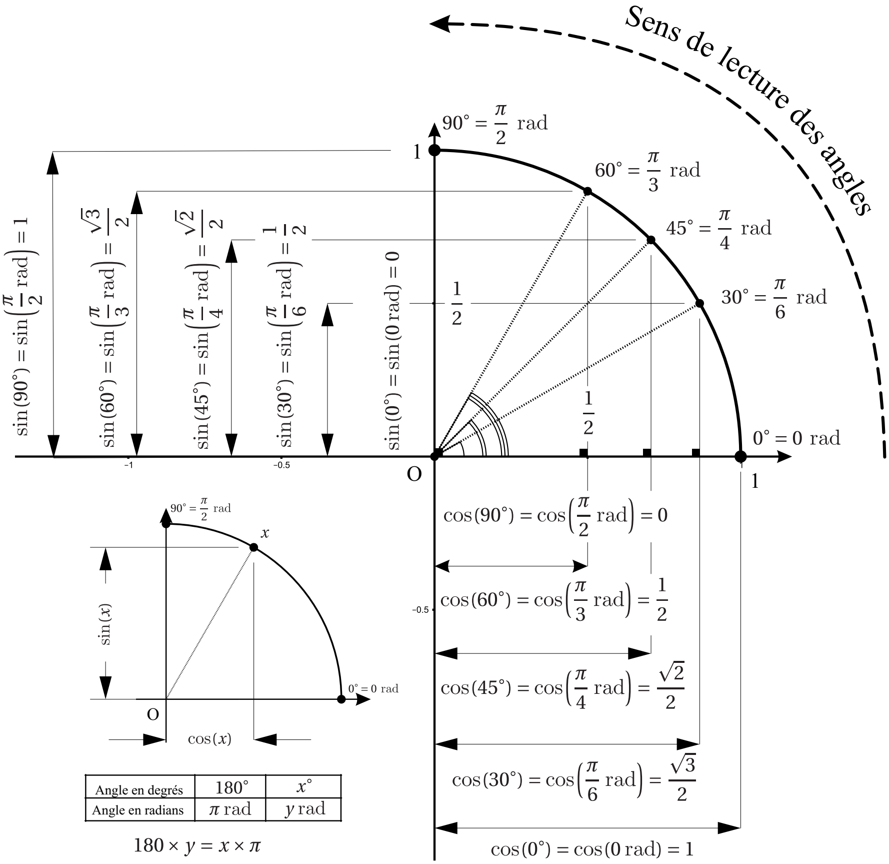
$\tan(\alpha) = \dfrac{BC}{AB}$ $\tan(\beta) = \dfrac{AB}{BC}$

□ **Propriété :** Si ABC est un triangle rectangle en B et β et α deux angles aigus alors :

- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 = \cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)$
- $0 < \cos(\alpha) = \sin(\beta) < 1$

  (le **côté adjacent** de l'angle aigu α est aussi le **côté opposé** de l'angle aigu β)
- $0 < \cos(\beta) = \sin(\alpha) < 1$

  (le **côté adjacent** de l'angle aigu β est aussi le **côté opposé** de l'angle aigu α)
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ de même $\tan(\beta) = \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$



Angle en degrés	180°	$x°$
Angle en radians	π rad	y rad

$$180 \times y = x \times \pi$$

□ **Angles dans le quart de cercle :** pour tout angle aigu x, on a :

angle x en degrés	0°	30°	45°	60°	90°
angle x en radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

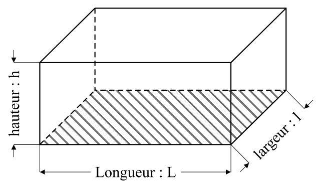
XIV. Solides de l'espace

■ **Pavé droit :**

Un **pavé droit ou parallélépipède rectangle** est un solide ayant 6 faces rectangulaires.

Dans un pavé droit :

- les faces opposées sont **parallèles et superposables**
- chaque arête est **perpendiculaire à deux faces**



Le volume V d'un pavé droit est égal à :

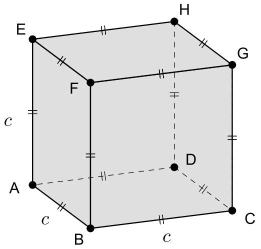
$$V = L \times l \times h$$

■ **Cube :**

Un **cube** est un solide ayant 6 faces carrées.

Dans un cube :

- toutes les faces sont des **carrés superposables**
- les faces opposées sont **parallèles**
- chaque arête est **perpendiculaire à deux faces**

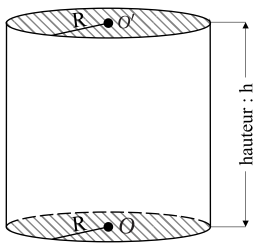


Le volume V d'un pavé droit est égal à :

$$V = c^3$$

■ **Cylindre de révolution:**

Un **cylindre de révolution** est un solide ayant comme bases deux cercles de rayon R perpendiculaires à l'axe de révolution.



Le volume V d'un pavé droit est égal à :

$$V = \pi \times R^2 \times h$$

L'aire latérale A d'un cylindre de révolution est égale à :

$$A = 2 \times \pi \times R \times h$$

■ **Cône de révolution :**

Un **cône de révolution** de sommet S est un solide ayant comme base un disque de centre O de rayon R perpendiculaire à l'axe de révolution (SO).

La longueur a désignant la distance entre le sommet S et un point quelconque du cercle de base est appelée **apothème.**

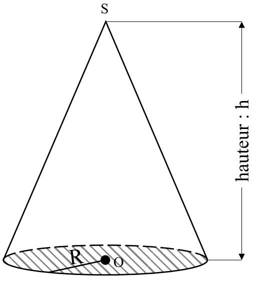
La droite (SO) est perpendiculaire au disque de base.

Le volume V d'un cône de révolution est égal à :

$$V = \frac{1}{3}\text{Aire (Base)} \times h$$

L'aire latérale A d'un cône de révolution est égale à :

$$A = \pi \times a \times R$$



■ **Prisme droit :**

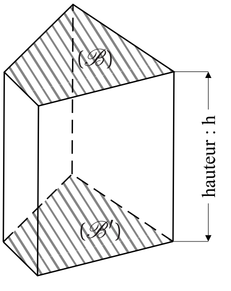
Un **prisme droit** est un solide ayant pour bases deux polygones parallèles et superposables et des faces latérales rectangulaires

Dans un prisme droit :

- toutes les faces latérales sont des **rectangles**
- les **arêtes des faces latérales sont perpendiculaires aux bases**

Le volume V d'un prisme droit est égal à :

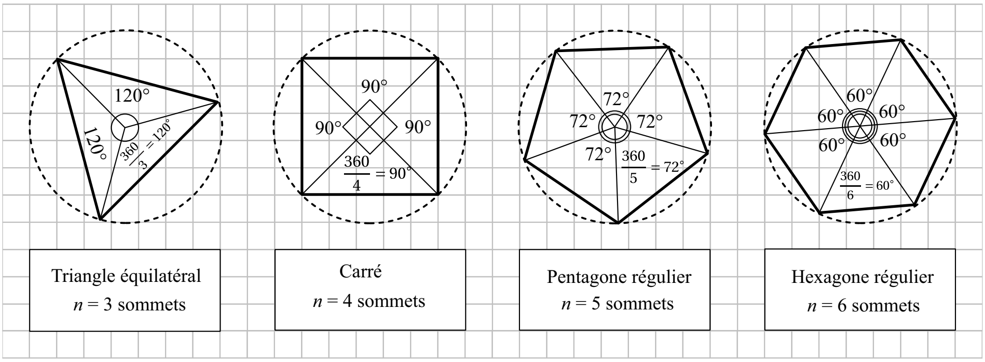
$$V = \text{Aire (Base)} \times h$$



■ **Polygone régulier**

Un **polygone régulier** est un polygone :

- **inscrit dans un cercle** (tous les sommets du polygone sont situés sur un même cercle)
- ayant des **angles au centre de même mesure**



□ **Propriété :**

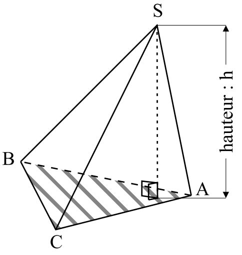
Dans un polygone régulier, les côtés sont tous de même longueur.

■ **Pyramides :**

Une **pyramide** est un solide dont les arêtes latérales sont obtenues en joignant les sommets d'un polygone appelé **base** à un point S appelé **sommet**.

Le volume V d'une pyramide est égal à :

$$V = \frac{1}{3}\text{Aire (Base)} \times h$$



■ **Pyramide régulière :**

Une **pyramide régulière** est une pyramide :

- dont la **base est un polygone régulier** (triangle équilatéral, carré, pentagone régulier, hexagone régulier etc $\cdots$)
- ayant **une hauteur passant par le centre de la base** (si O est le centre de la base et S le sommet de la pyramide, alors la droite (SO) est une hauteur pour cette pyramide).

Dans une pyramide régulière, **les faces sont des triangles isocèles superposables**.

ATOUT CONCOURS

Destiné aux candidats préparant les concours d'entrée des Écoles de Management, **Atout Concours** offre une synthèse par discipline. Véritables outils de révisions et de repères, les ouvrages sont construits autour de fiches thématiques mettant en perspective enjeux, concepts et fondamentaux du programme.
Autant d'atouts décisifs pour une réussite optimale.

43 fiches pour préparer les épreuves écrites

ACCÈS

L'objectif de cet ouvrage est d'aider les candidats dans leur démarche de préparation au Concours ACCÈS, pour **trois épreuves écrites** :

- Épreuve de raisonnement logique et mathématiques,
- Ouverture culturelle,
- Synthèse.

Il permet :

- de **comprendre les modalités et exigences** des trois épreuves,
- d'avoir un **aperçu des programmes et des notions requises**,
- d'**acquérir une méthode** efficace pour réussir,
- de **s'entraîner aux épreuves écrites**, avec des exercices originaux et des annales (2006 à 2018),
- de **s'autoévaluer** avec les corrigés.

Les auteurs

Éric BILINSKI *est professeur certifié de Mathématiques au lycée privé Marcq-Institution et concepteur de l'épreuve de Mathématiques du concours Puissance Alpha.*

Nicole CHEVALIER *est professeur certifié de Lettres Classiques en Classes Préparatoires scientifiques implantées du lycée Frédéric Ozanam, sur les sites des écoles ISEN et ICAM de Lille.*

www.editions-ellipses.fr
9 782340 034945