24 JOURS

pour préparer l'oral du concours

AGRO-VÉTO MATHÉMATIQUES

2e ÉDITION ACTUALISÉE

Stevan **BELLEC**

Filière BCPST

- Un **planning optimisé** pour réviser l'ensemble du programme
- Une **sélection d'exercices** les plus représentatifs du concours
- Les **sujets décryptés** afin d'évaluer les points critiques
- Des **corrigés détaillés** avec des extraits des rapports du jury
- Les **méthodes et formules** à retenir

ellipses

AGRO-VÉTO
MATHÉMATIQUES
Filière BCPST

24 JOURS

pour préparer l'oral du concours

collection dirigée par Karine Beaurpère

AGRO-VÉTO MATHÉMATIQUES Filière BCPST

2e ÉDITION ACTUALISÉE

Stevan BELLEC

Professeur agrégé en ECE1
au lycée Prytanée national militaire de La Flèche

ellipses

Dans la collection 24 jours pour préparer l'oral

dirigée par Karine Beaurpère

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits
sur www.editions-ellipses.fr

ISBN9782340-053960

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Sommaire

Présentation du manuel **5**

Conseils **8**

Tableaux récapitulatifs des exercices **10**

Jour n^{o}1 . . . . **13**

Jour n^{o}2 . . . . **22**

Jour n^{o}3 . . . . **29**

Jour n^{o}4 . . . . **38**

Jour n^{o}5 . . . . **48**

Jour n^{o}6 . . . . **56**

Jour n^{o}7 . . . . **66**

Jour n^{o}8 . . . . **75**

Jour n^{o}9 . . . . **84**

Jour n^{o}10 . . . . **92**

Jour n^{o}11 . . . . **101**

Jour n^{o}12 . . . . **109**

Jour n^{o}13 . . . . **117**

Jour n^{o}14 . . . . **126**

Jour n^{o}15 . . . . **132**

Jour n^{o}16 . . . . **142**

Jour n^{o}17 . . . . **151**

Jour n^{o}18 . . . . **158**

Jour n^{o}19 . . . . **167**

Jour n^{o}20 . . . . **173**

Jour n^{o}21 179

Jour n^{o}22 188

Jour n^{o}23 197

Jour n^{o}24 209

Questions de cours données en 2018 217

Présentation du manuel

Ce manuel a pour but de vous préparer efficacement aux oraux de mathématiques du concours Agro-Véto.

Pour commencer, rappelons le déroulement des oraux de mathématiques au concours Agro-Véto comme le stipule le rapport du jury 2018 :

Un sujet d'oral est composé d'un unique exercice imposé au candidat, portant sur le programme de mathématiques et d'informatique de BCPST. Dans la mesure du possible, les sujets ont été choisis pour couvrir l'ensemble du programme des deux années (BCPST1 et BCPST2). Les candidats disposent de 30 minutes de préparation dans une salle dédiée, où ils ont accès à un ordinateur sur lequel sont installés les logiciels Pyzo et Spyder (Python 3), Excel et GeoGebra.
Chaque sujet comporte une question de cours, qui précède l'énoncé de l'exercice à préparer. Cette question est indépendante de l'exercice, dans le sens où elle peut concerner un thème différent de celui abordé dans la suite.

Ce manuel repose sur une méthode originale qui a fait ses preuves.

L'originalité de ce manuel provient de la préparation méthodique à réaliser durant le mois généralement accordé entre les écrits et les oraux du concours Agro-Véto.

Le principe est le suivant.
On se base sur 4 semaines de révision, à raison de 6 jours de travail par semaine et d'une heure par jour de travail, en plus bien évidemment du travail à réaliser au lycée pendant cette période. Durant cette heure, vous devrez chercher un sujet composé d'une question de cours et d'un exercice, pendant une durée de 30 minutes puis vous consacrerez 30 minutes à une analyse minutieuse de tout l'ensemble du « corrigé ».

Concrètement, cela signifie que vous devez suivre, jour après jour, le planning qui vous est proposé ici. Le premier jour de révision, vous vous attaquerez au « Jour n°1 », *etc...*, jusqu'au « Jour n°24 ». Vous aurez alors traité 24 sujets.
Ces sujets sont des sujets tombés aux oraux du concours Agro-Véto entre les années 2015 et 2018.

Je tiens à souligner que la sélection des sujets proposés ici résulte d'un travail réfléchi vous permettant d'optimiser votre préparation aux oraux. En effet, ces sujets ont été choisis de telle sorte que vos révisions vous permettent d'aborder tous les thèmes du programme ainsi que les situations les plus classiques auxquelles vous pouvez être confronté à l'oral.

Je tiens aussi à rajouter que l'ordre choisi pour ces 24 sujets, fruit d'une mûre réflexion, vous permet de revoir en permanence les thèmes majeurs du programme. Le but est ici d'éviter de travailler ces thèmes les uns après les autres. Cette approche pourrait en effet s'avérer négative puisqu'à la fin des 4 semaines de révision, le premier thème révisé serait déjà bien loin.

Chaque jour de révision est construit de la façon suivante.

Une première page comporte la question de cours et le sujet à travailler : dans sa forme, cette page est similaire à celle que vous aurez le jour de l'oral.
Les pages suivantes vont permettre d'entrer dans le détail de l'exercice. Je tiens à insister sur le fait qu'un corrigé seul est finalement assez inutile. Il est inutile à l'étudiant qui sait faire l'exercice mais il est tout aussi inutile à l'étudiant qui ne sait pas le faire puisque c'est l'analyse du problème qui est avant tout essentielle. C'est ce qui explique les différentes parties qui vont être exposées ci-après.

Voici donc le schéma adopté pour chacun des couples d'exercices.

On commence par donner l'année à laquelle l'exercice est tombé ainsi que le niveau de l'exercice. Le codage du niveau est le suivant :
♣ exercice facile qu'il faut savoir traiter sans trop de difficulté ;
♣ ♣ exercice de niveau moyen pouvant comporter des questions un peu délicates ;
♣ ♣ ♣ exercice comportant des questions particulièrement difficiles.

La suite se découpe selon les quatre parties suivantes.

Analyse stratégique de l'énoncé

Cette partie commence par présenter l'objet de l'exercice.

Puis l'analyse de l'énoncé se fait question par question. Il s'agit alors de comprendre la question posée et de voir comment démarrer efficacement sur cette question.
On pourra trouver ici des extraits de rapports de jurys. Ces extraits sont extrêmement importants car ils mettent en avant ce qui est véritablement attendu au concours.
Il est bon de commencer par lire cette partie avant de lire le corrigé « technique » qui va suivre afin de bien analyser les processus conduisant à la solution à venir.

↪ Une conclusion vient ensuite mettre en avant l'essentiel de cette question.

Corrigé

Cette partie correspond bien évidemment au corrigé de l'exercice. Ce corrigé est très détaillé afin de permettre une compréhension rapide. Il est agrémenté de nombreux commentaires provenant des rapports de jurys.

Attention ! Le corrigé donné ici n'est pas une planche optimisée. En effet, toutes les preuves sont volontairement très (trop !) détaillées afin qu'il n'y ait pas de point laissé dans l'obscurité mais à l'oral, prenez l'initiative d'aller plus vite sur certaines questions. Au pire, l'examinateur vous demandera des précisions qu'il vous sera alors toujours possible de donner à ce moment-là.

Techniques à mémoriser

Puisque ce qu'il faut retenir d'un exercice, ce sont avant tout les techniques qui ont été utilisées au cours de cet exercice, une partie complète liste l'ensemble des

techniques à mémoriser issues de l'exercice étudié.
C'est pourquoi cette partie est construite avec une succession de phrases commençant par :

♡ Il faut se souvenir ...

Formulaire

Une dernière partie consiste à lister les formules majeures utilisées dans l'exercice.

Si vous suivez ce planning, vous aurez revu efficacement l'intégralité des thèmes du programme en ayant travaillé sur des sujets récents. C'est donc l'assurance d'une préparation aux oraux réussie.

Bien évidemment, l'oral ne se prépare pas qu'en fin d'année. C'est pourquoi vous pouvez travailler vos oraux tout au long de l'année en vous reportant aux tableaux récapitulatifs des exercices donnés en début d'ouvrage. Vous y trouverez alors les 24 exercices, classés par thème, que vous pourrez travailler tout au long de l'année.

Vous trouverez aussi en fin d'ouvrage une liste de questions de cours données lors de l'année 2018 et classées selon trois groupes : les questions très bien traitées par les étudiants, les questions traitées de façon plus approximatives et enfin les questions ayant posé des problèmes.

Conseils

Quelques conseils pour bien utiliser ce livre

L'idéal est de faire deux études de ce livre.

La première étude est une étude de fond, qui commence dès le début de votre année scolaire. Dès qu'un chapitre se termine, travaillez minutieusement les exercices liés au chapitre en question : vous trouverez facilement les exercices en question à partir des tableaux récapitulatifs. Dans ces tableaux, certains exercices sont suivis d'une « * ». Cela signifie que la résolution de ces exercices nécessite des notions de plusieurs domaines (algèbre linéaire, analyse ou probabilités). N'hésitez pas à faire vivre le livre en l'annotant. Toutefois, n'annotez pas les pages où figurent les énoncés d'exercices. Ces pages doivent en effet rester vierges pour être retravaillées plus tard, de façon tout à fait neutre.

La deuxième étude est une étude plus intense dans le temps, puisqu'il s'agit, pendant vos 24 jours de révision avant les oraux, de travailler attentivement l'exercice du jour. Le fait de travailler deux fois un même exercice n'est pas gênant et ces deux passages sur un même exercice peuvent même s'avérer très fructueux. Je m'explique. La raison majeure qui pourrait être avancée pour ne faire qu'un seul passage est la suivante. Au deuxième passage, n'est-ce pas avant tout la mémoire qui va jouer ? La réponse est non, dans une large mesure, puisque les deux passages sont suffisamment éloignés dans le temps. Mais, même si la mémoire se met à jouer, cela signifie que l'on a retenu un principe important sur lequel on avait peut-être eu des difficultés la première fois. Bref, le travail fourni la première fois se consolide encore davantage la seconde fois.

Vous l'aurez sans doute remarqué, je suis adepte des passages multiples sur les mêmes notions. Pour la plupart d'entre vous, plusieurs passages sur une même notion sont effectivement nécessaires avant l'assimilation complète de cette notion. C'est pourquoi ce livre comporte plusieurs fois les mêmes commentaires de jurys, les mêmes techniques à retenir, les mêmes formules... Plus on pratique, plus on est à l'aise face à toutes les situations.

Quelques conseils pour bien réussir son oral

Rappelez-vous qu'un oral est un échange avec l'examinateur à l'issue duquel l'examinateur va vous attribuer une note.

> Rapport du jury 2018
>
> Un dialogue entre le candidat et l'examinateur s'instaure. L'oral est un échange, n'est pas un écrit, et en aucun cas n'est une conférence du candidat face à un jury muet. Les interrogateurs posent des questions visant à évaluer les compétences du candidat, et cherchent avec bienveillance à l'aider pour compléter son argumentation ou se rendre compte d'une erreur. Elles ne constituent en aucun cas des pièges tendus. Le jury attend de la bonne volonté et une attitude ouverte pour répondre aux questions.

Plusieurs éléments entrent en ligne de compte dans l'appréciation de l'examinateur.

Non seulement celui-ci évalue vos compétences mathématiques mais il va inconsciemment apprécier d'autres qualités, et ce, dès le début de la planche. Voici, par ordre d'entrée en scène, les points essentiels, indépendants des mathématiques, que l'examinateur va pouvoir apprécier :

— votre expression orale (veillez notamment à votre vocabulaire) ;
— votre capacité d'organisation (organisation du tableau, organisation du temps) ;
— votre capacité à prendre des initiatives ;
— votre enthousiasme, notamment votre volonté de présenter un maximum de résultats (n'hésitez pas à passer sur des questions si vous avez des choses à dire sur la fin d'un exercice) ;
— votre bon sens (signalez tout résultat aberrant sans attendre que l'examinateur vous le fasse remarquer : par exemple, si vous trouvez une variance négative, mentionnez que vous avez nécessairement fait une erreur et n'attendez pas que l'examinateur vous le demande) ;
— votre capacité de dialogue avec l'examinateur, notamment votre capacité à assimiler les indications fournies par l'examinateur.

Vous devez sortir de votre planche en vous disant que vous avez fait le maximum. Pensez bien qu'un tout petit plus par rapport à d'autres candidats peut s'avérer très payant !

Pour conclure, je vous invite à lire les introductions des différents rapports de jurys que l'on trouve sur le site du concours. Vous comprendrez alors ce que l'on attend de vous et vous assimilerez ainsi comment facilement faire de votre oral un véritable atout !

Je termine par un extrait très représentatif des rapports de jurys.

> Rapport du jury 2017
>
> Il n'est pas indispensable d'avoir traité la totalité de l'exercice pour obtenir une excellente note. Il est préférable d'avoir mené un raisonnement rigoureux et argumenté, reposant sur des connaissances solides, plutôt que d'avoir donné tous les résultats (même justes), trop vite et sans explication réelle.

Je remercie vivement Karine Beaurpère pour ses conseils, sa relecture minutieuse et sa grande disponibilité.

Bon courage !

Tableaux récapitulatifs des exercices

Tableau récapitulatif des exercices de géométrie

	Géométrie dans l'espace	Projection orthogonale
Jour n^{o}14	•	•

Tableau récapitulatif des exercices d'analyse

	Suites et séries	Étude de fonctions	Intégration	Équations différentielles
Jour n^{o}2	•	•		
Jour n^{o}5 *	•			
Jour n^{o}6		•	•	
Jour n^{o}9 *		•	•	
Jour n^{o}10 *	•			
Jour n^{o}11	•	•		
Jour n^{o}15 *	•		•	
Jour n^{o}16				•
Jour n^{o}17 *	•			
Jour n^{o}19	•		•	
Jour n^{o}21	•			
Jour n^{o}23	•	•		

Tableau récapitulatif des exercices d'algèbre linéaire

	Espaces vectoriels sans la réduction	Espaces vectoriels avec la réduction	Polynômes et complexes
Jour n^{o}4		•	
Jour n^{o}8		•	•
Jour n^{o}12	•		
Jour n^{o}18 *	•		
Jour n^{o}22		•	•

Tableau récapitulatif des exercices de probabilités discrètes

	Probabilités finies élémentaires	Couples de variables aléatoires	Indépendance	Variables discrètes infinies
Jour n^{o}1	•			
Jour n^{o}5 *	•			
Jour n^{o}7	•	•	•	
Jour n^{o}10 *	•			•
Jour n^{o}13				•
Jour n^{o}17 *	•			
Jour n^{o}20	•			

Tableau récapitulatif des exercices de probabilités continues

	Variables à densité	Produit de convolution	Théorèmes limites
Jour n^{o}3	•	•	
Jour n^{o}9 *	•		
Jour n^{o}15 *	•		
Jour n^{o}18 *			•
Jour n^{o}24	•	•	

Jour n^{o}1

Énoncé

Question de cours
Donner la formule permettant de calculer le projeté orthogonal d'un vecteur x de $\mathbf{R}^n$ sur un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^n$ muni d'une base orthonormale.

♦

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère N urnes, numérotées de 1 jusqu'à N, sachant que pour chaque i, l'urne numérotée i contient i jetons numérotés de 1 à i. On considère l'épreuve aléatoire consistant en une suite de tirages selon les règles suivantes :

- le premier tirage est effectué dans l'urne numérotée N ;
- si le jeton obtenu au k-ème tirage porte le numéro i, alors le $(k+1)$-ème tirage est effectué dans l'urne numérotée i ;
- les différents jetons d'une même urne sont tirés équiprobablement.

On note, pour chaque k entier naturel non nul, X_k la variable aléatoire donnant le numéro du jeton obtenu au k-ème tirage.

1) Quelle est la loi de X_1 ?

2) Écrire une fonction (en Python), prenant en argument un entier N, qui simule l'expérience ci-dessus, et renvoie le nombre de tirages nécessaires à l'obtention du premier 1.

3) Établir, pour k entier naturel non nul et $i \in [\![1, N]\!]$:

$$P(X_{k+1} = i) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j} P(X_k = j).$$

4) Montrer que pour tout k entier naturel non nul, la suite finie $(P(X_k = i))_{1 \leq i \leq N}$ est décroissante.

5) a) Montrer que la suite $(P(X_k = 1))_{k \in \mathbf{N}^*}$ est croissante, puis justifier qu'elle est convergente.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$P(X_{k+1} = 1) \geq P(X_k = 1) + \frac{1}{N}\left(1 - P(X_k = 1)\right).$$

c) En déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = 1) = 1$.

Que peut-on dire de l'événement « Tous les tirages donnent un numéro différent de 1 » ?

6) On fixe i un entier naturel compris entre 2 et N.
Déduire de la question précédente que, pour tout $i \in [\![2, N]\!]$:

$$\lim_{k \to +\infty} P(X_k = i) = 0.$$

7) On note Y_N le rang du tirage pour lequel on obtient le jeton 1 pour la première fois. On peut démontrer, et nous l'admettons, que :

$$E(Y_N) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}.$$

Réaliser une simulation qui confirme graphiquement cette expression de $E(Y_N)$ en fonction de N.

Analyse stratégique de l'énoncé

C'est un exercice de probabilités discrètes qui est construit à partir de la modélisation et de la simulation d'une situation concrète.

1) On doit retrouver une loi connue.

$\hookrightarrow$ C'est une question simple qu'il faut traiter sans perdre de temps.

2) Le programme attendu ne contient pas de difficulté en soi. Il faut bien penser à changer le nombre de jetons pour prendre en compte le changement d'urnes.

> Rapport du jury 2018
>
> Lorsqu'un programme utilise des simulations aléatoires, il est naturel que les candidats exécutent leur programme devant l'examinateur plusieurs fois, rien que pour témoigner que les résultats peuvent varier d'une exécution à l'autre. À cette fin, nous encourageons les candidats à se familiariser de façon optimale à l'usage de Pyzo ou Spyder, en particulier la gestion de la console et les commandes rapides d'exécution de leurs programmes, afin de gagner du temps lors de l'oral.

$\hookrightarrow$ C'est une question qui ne présente aucune difficulté.

3) On applique la formule des probabilités totales en choisissant $(X_k = j)_{1 \leq j \leq N}$ comme système complet d'événements.

> Rapport du jury 2016
>
> Dans la question **3)**, on attendait des candidats qu'ils utilisent la formule des probabilités totales, en indiquant un système complet d'événements adapté. Les examinateurs ont donc systématiquement interrogé les candidats sur cette formule du cours, notamment lorsque le candidat avait établi la relation sans utiliser d'événements dans son raisonnement.

$\hookrightarrow$ Il est important d'appliquer la formule des probabilités totales avec soin.

4) On réutilise la relation obtenue dans la question **3)** pour calculer la différence entre deux termes consécutifs. Attention à bien faire attention à l'indice de la suite qui est ici i.

$\hookrightarrow$ C'est une question qui peut perturber du fait que l'on considère une suite finie.

5) a) De nouveau, on réutilise la relation obtenue dans la question **3)** pour calculer la différence entre deux termes consécutifs. Attention, l'indice de la suite est k cette fois-ci.

$\hookrightarrow$ Une étude classique qui ne doit pas poser de problème.

Rapport du jury 2016

Dans les questions **4)** et **5) a)**, les candidats ont parfois mal compris quels étaient les indices qui variaient dans les suites en question.

b) Pour cette question, on reprend la relation de la question **3)**. On minore le terme $1/j$, puis on cherche à réécrire la somme restante sous la forme d'une probabilité.

$\hookrightarrow$ C'est une question un peu technique qui nécessite des méthodes de calculs classiques qu'il faut maîtriser.

c) C'est une question en deux temps. Pour commencer, on utilise le résultat de la question **5) b)** pour déterminer la limite de la suite en utilisant le théorème des gendarmes. Ensuite, il faut utiliser cette limite pour déterminer la probabilité demandée en utilisant les événements $(X_k = 1)_{k\in\mathbf{N}^*}$. On pourra, par exemple, trouver une inclusion entre les événements $(X_k = 1)_{k\in\mathbf{N}^*}$ et l'événement « Tous les tirages donnent un numéro différent de 1 ».

Rapport du jury 2016

La question **5) c)** a toujours été abordée par les examinateurs, même lorsque les candidats n'avaient pas abordé la question **5) b)**, pour voir si les candidats pouvaient effectuer le passage à la limite dans l'inégalité.

$\hookrightarrow$ C'est une question difficile. Il faut être capable de proposer des idées de résolution.

6) On relie les événements $(X_k = i)$ et l'événement contraire de $(X_k = 1)$. On utilise ensuite le résultat obtenu dans la question **5) c)** pour conclure. C'est une résolution qui ressemble à la question **5) c)**.

$\hookrightarrow$ Le manque de temps est la principale difficulté de cette question si les questions ont été traitées correctement.

7) On va effectuer la représentation graphique *théorique* de $E(Y_N)$ en fonction des valeurs de N à partir de la formule de l'énoncé. Ensuite on trace l'espérance *expérimentale* en déterminant la moyenne empirique des réalisations de la fonction programmée dans la question **2)**.

Rapport du jury 2016

La question **7)** a été mal comprise par les candidats. On attendait simplement ici un tracé expérimental de la suite $(E(Y_N))$ pour certaines valeurs de N à l'aide de la fonction établie à la question **2)**. Cela a donc dans la plupart du temps été le prétexte pour demander au candidat comment il pouvait simuler l'espérance d'une variable aléatoire. De nombreux candidats confondent moyenne empirique et espérance, et savent peu établir leur lien avec la loi faible des grands nombres.

$\hookrightarrow$ Il faut savoir programmer le calcul approché d'une espérance.

Corrigé

Question de cours

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension $q \in \mathbf{N}^*$. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq q}$ une base orthonormale de F. Alors le projeté orthogonal sur F d'un vecteur $x \in \mathbf{R}^n$, noté

$p(x)$, est donné par :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{q} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

♦

1) Le premier tirage se fait dans l'urne numéro N qui contient N jetons numérotés de 1 à N. Ainsi :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } X_1 \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1, N]\!].}$$

2) • On commence par importer la bibliothèque `random` qui est nécessaire pour l'utilisation de la fonction `randint()` :

```
from random import *
```

• Voici un programme répondant à la question :

```
def premier_1(N):
    # Compteur de tirage
    tirage = 0

    # Variable qui contiendra le résultat du tirage
    X = 0

    # Nombre de jetons présents dans l'urne
    i = N
    while X != 1 :
        # On effectue le tirage
        X = randint(1,i)
        # On change le nombre de jetons pour le tirage suivant
        i = X
        # On ajoute un tirage au compteur
        tirage = tirage+1
    return tirage
```

Remarque

Lors de la présentation orale, il ne faut pas oublier d'exécuter son programme et mettre en évidence la cohérence des résultats obtenus.

3) Soit $i \in [\![1, N]\!]$ et k un entier naturel non nul.
On applique la formule des probabilités totales à l'événement $(X_{k+1} = i)$ en utilisant le système complet d'événements non négligeables $(X_k = j)_{1 \leq j \leq N}$:

$$P(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{N} P_{(X_k=j)}\left(X_{k+1} = i\right) P(X_k = j).$$

Soit $j \in [\![1, N]\!]$. Supposons que l'événement $(X_k = j)$ est réalisé, alors, à l'étape $k+1$, on pioche dans l'urne numérotée j qui contient j jetons. C'est un tirage équiprobable, ainsi :

$$P_{(X_k=j)}\left(X_{k+1} = i\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ \dfrac{1}{j} & \text{si } i \leq j. \end{cases}$$

En substituant dans l'expression obtenue avec la formule des probabilités totales, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\boxed{P(X_{k+1} = i) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j} P(X_k = j).}$$

4) On a vu que la variable aléatoire X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On en déduit alors que la suite finie $(P(X_1 = i))_{1 \leq i \leq N}$ est constante et donc décroissante.

Traitons maintenant le cas des suites finies $(P(X_k = i))_{1 \leq i \leq N}$ avec $k \in \mathbf{N}^*$, $k \geq 2$. Soit $k \in \mathbf{N}^*$, $k \geq 2$, alors, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, en utilisant la relation obtenue dans la question **3)**, on a :

$$P(X_k = i) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j} P(X_{k-1} = j).$$

On peut alors calculer la différence entre deux termes consécutifs de la suite.
Pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$:

$$\begin{aligned} P(X_k = i+1) - P(X_k = i) &= \sum_{j=i+1}^{N} \frac{1}{j} P(X_{k-1} = j) - \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j} P(X_{k-1} = j) \\ &= -\frac{1}{i} P(X_{k-1} = i). \end{aligned}$$

Comme une probabilité est toujours positive ou nulle, on a , pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$:

$$P(X_k = i+1) - P(X_k = i) \leq 0.$$

En conclusion, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\boxed{\text{la suite finie } (P(X_k = i))_{1 \leq i \leq N} \text{ est décroissante.}}$$

5) a) On va de nouveau étudier la différence entre deux termes consécutifs de la suite et utiliser de nouveau le relation obtenue dans la question **3)** pour $i = 1$. On obtient alors, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = 1) - P(X_k = 1) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} P(X_k = j) - P(X_k = 1) \\ &= \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j} P(X_k = j). \end{aligned}$$

L'expression obtenue est positive ou nulle car on somme des termes qui sont tous positifs ou nuls. Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (P(X_k = 1))_{k \in \mathbf{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$0 \leq P(X_k = 1) \leq 1.$$

La suite $(P(X_k = 1))_{k \in \mathbf{N}^*}$ est donc croissante et majorée, donc :

$$\boxed{\text{la suite } (P(X_k = 1))_{k \in \mathbf{N}^*} \text{ converge vers un réel } l \in [0, 1].}$$

b) Dans un premier temps, remarquons que pour tout $j \in [\![1, N]\!]$:

$$\frac{1}{j} \geq \frac{1}{N}.$$

Alors, en utilisant la relation obtenue dans la question **3)** :

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = 1) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} P(X_k = j) \\ &= P(X_k = 1) + \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j} P(X_k = j). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$P(X_{k+1} = 1) \geq P(X_k = 1) + \frac{1}{N} \sum_{j=2}^{N} P(X_k = j).$$

$(X_k = j)_{1 \leq j \leq N}$ est un système complet d'événements. Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\sum_{j=2}^{N} P(X_k = j) = 1 - P(X_k = 1).$$

On remplace alors cette expression dans l'inégalité précédente. En conclusion, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\boxed{P(X_{k+1} = 1) \geq P(X_k = 1) + \frac{1}{N}\Big(1 - P(X_k = 1)\Big).}$$

c) Notons que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$1 - P(X_k = 1) \geq 0.$$

On en déduit alors que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$P(X_k = 1) \leq P(X_k = 1) + \frac{1}{N}\Big(1 - P(X_k = 1)\Big).$$

En utilisant le résultat de la question **5) b)**, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on obtient l'encadrement suivant :

$$P(X_k = 1) \leq P(X_k = 1) + \frac{1}{N}\Big(1 - P(X_k = 1)\Big) \leq P(X_{k+1} = 1).$$

Ainsi :

$$0 \leq \frac{1}{N}\Big(1 - P(X_k = 1)\Big) \leq P(X_{k+1} = 1) - P(X_k = 1).$$

Nous avons démontré dans la question **5) a)** que la suite $(P(X_k = 1))_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge vers un réel $l \in [0, 1]$. Ainsi :

$$\lim_{k \to +\infty} P(X_{k+1} = 1) - P(X_k = 1) = l - l = 0.$$

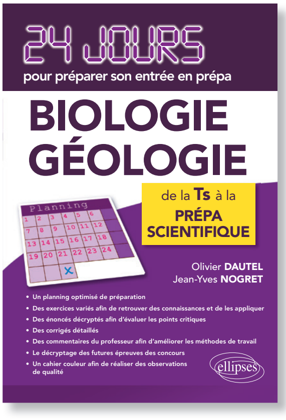
D'après le théorème des gendarmes, appliqué à l'encadrement précédent :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{N}\Big(1 - P(X_k = 1)\Big) = 0.$$

La collection « 24 jours pour préparer l'oral » vous assurera des révisions solides entre les écrits et les oraux grâce au planning de travail fourni par les auteurs expérimentés, enseignants de classes préparatoires. Ce planning est fondé sur 24 séances de travail réparties sur 4 semaines de 6 jours. Durant chaque séance, vous pourrez vous exercer sur un sujet de type concours puis vous consacrer à une analyse minutieuse de tout l'ensemble du corrigé (analyse de l'énoncé, corrigé détaillé, techniques à mémoriser, formulaire et nombreux extraits des rapports de jurys).

Ces ouvrages vous permettront aussi, dès le début de la deuxième année de Prépas, de consolider les pratiques vues en classe.

Pour une préparation efficace aux concours d'entrée dans les Grandes Écoles



www.editions-ellipses.fr
9 782340 036178