

Pascal Olive

PHYSIQUE CHIMIE

en **PSI/PSI***

Le cours complet



ellipses

PHYSIQUE
CHIMIE
en PSI/PSI*

PHYSIQUE CHIMIE

en PSI/PSI*

Le cours complet

Pascal Olive



ISBN 9782340-054035
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2020
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage aborde l'ensemble du cours de Physique-Chimie de la classe de PSI / PSI*. Il reprend également de nombreux points du programme de PCSI et de MPSI.

- Le cours proposé est très complet. Sa rédaction est particulièrement rigoureuse et soignée, et s'appuie sur de nombreuses illustrations. Les points délicats sont discutés en détail, afin de fournir aux étudiants les plus exigeants des réponses à beaucoup de leurs questions. Les résultats et définitions les plus importants sont indiqués ainsi :

À l'équilibre, à p et T constantes, $\Delta_r G = 0$.

Des résultats intermédiaires, ou un peu moins importants, sont grisés de la façon suivante :

Finalement $\vec{E}_1(M, t) = \frac{1}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) r \vec{e}_0$ dans le conducteur et dans le vide.

Enfin, certaines définitions, ou points sur lesquels il est nécessaire de porter une attention particulière, sont mis en italique :

Les phénomènes ondulatoires, en présence de phénomènes dissipatifs, sont *irréversibles*.

- De très nombreuses applications sont intégrées au cours. Elles sont indiquées à l'aide du symbole ©. Elles ont été choisies pour l'éclairage qu'elles lui apportent, leur intérêt culturel et pour la diversité des techniques de résolution qu'elles font intervenir. Beaucoup d'applications classiques, qui font l'objet de nombreux sujets d'écrits et d'oraux, sont ainsi proposées.
— Si une section entière d'un chapitre est consacrée à des applications, elle est indiquée ainsi :

3. TURBORÉACTEUR ©

— Une sous-section détaillant une application est indiquée ainsi :

3.4 Démodulation d'amplitude par détection de crête ©

- Le livre est scindé en huit parties conformément au programme. Les outils mathématiques nécessaires pour aborder les différents contenus du programme sont regroupés dans la première partie du livre.

- Quelques compléments hors-programmes sont présentés pour leur intérêt culturel, leur utilisation fréquente dans les T.I.P.E, ou pour mieux appréhender certaines notions. Ils peuvent être réservés à une deuxième lecture plus approfondie. Ces compléments sont identifiés à l'aide d'une barre dans la marge de gauche et d'un interligne plus petit :

C'est un cas particulier du théorème de Reynolds :

$$\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\substack{\text{dérivée totale} \\ \text{(Lagrange)}}} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} = \underbrace{\iiint_{M \in \mathcal{V}_c} \frac{\partial \rho_x}{\partial t} d^3\mathcal{V}}_{\text{dérivée locale (Euler)}} + \underbrace{\rho_{x2}(t) \mathcal{S}_2 v_2(t) - \rho_{x1}(t) \mathcal{S}_1 v_1(t)}_{\text{dérivée convective}}$$

Cet outil de travail complet, utile et agréable par la clarté du cours, la rigueur du contenu, la variété et la richesse des applications proposées, est écrit spécialement pour les étudiants qui préparent les concours d'entrée aux E.N.S. et aux plus grandes écoles d'ingénieurs, les étudiants en Master et les candidats aux concours d'enseignement (CAPES, Agrégation).

Je souhaite remercier ma compagne, Nathalie Martinez, qui m'a soutenu sans faiblir lors des neuf mois d'écriture intense de cet ouvrage, m'a prodigué de précieux conseils, et m'a fait bénéficier d'une relecture pointilleuse.

Ma fille Natalia a fait preuve également de beaucoup de patience et de compréhension, merci !

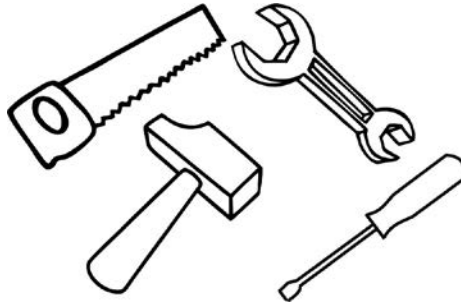
Je leur dédie ce livre, ainsi qu'à mon fils Pierre et à mes parents Suzanne et Pierre.

Je n'oublie pas mon collègue et ami de 25 ans, Lionel « Cocosinus » Cozar, qui a relu et amélioré les parties les plus mathématiques de l'ouvrage.

Je remercie enfin mes élèves Axel, Léo, Paul, Pierre, Quentin et Romain qui m'ont fait l'honneur de lire certains chapitres et de me donner leurs impressions.

[PREMIÈRE PARTIE]

BOÎTE À OUTILS



Les chapitres :

1. Différentielles & formes différentielles	3
2. Les systèmes de coordonnées	13
3. Analyse de Fourier	19
4. Champs & opérateurs différentiels	33
5. Grandeurs physiques : dimensions & unités	61

Dans cette première partie du livre sont exposés les outils nécessaires à l'étude des parties suivantes.

Le chapitre sur les champs et les opérateurs différentiels introduit de nouveaux opérateurs ainsi que la notion de bilan local. Il doit impérativement être maîtrisé avant d'aborder les parties portant sur l'électromagnétisme, les phénomènes de transport et les bilans, la Physique des ondes et la conversion de puissance.

Remarquons qu'en mathématiques, une fonction est notée f ou bien $x \mapsto f(x)$, pour la distinguer de l'image $f(x)$ de x par f . En Physique, la notation $g(x,t)$ est souvent utilisée pour indiquer que la grandeur g ne dépend que des variables x et t .

[BOÎTE À OUTILS 1]

DIFFÉRENTIELLES & FORMES DIFFÉRENTIELLES

1. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1.1 Dérivées partielles

On raisonne sur une fonction f de deux variables réelles : $(x, y) \mapsto f(x, y)$, à valeurs réelles, de classe C^1 .

On note $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ la dérivée de la fonction f par rapport à la variable x , les autres variables (ici y) étant fixées.

On note simplement $\frac{\partial f}{\partial x}$ cette dérivée partielle lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

En thermodynamique, une fonction d'état d'un corps pur sous une seule phase, comme l'entropie S , peut être décrite comme une fonction de deux variables : la température T et la pression p , mais également comme une fonction de T et du volume V .

Dès lors, il faut absolument distinguer les dérivées partielles $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$ et $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$, qui sont *a priori* différentes.

1.2 Théorème de Schwarz

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est encore une fonction de deux variables, qui peut elle-même être dérivée par rapport à x et à y si elle est de classe C^1 .

On peut donc former $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$.

De même, si $\frac{\partial f}{\partial y}$ est de classe C^1 , on peut former $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe C^1 , f est de classe C^2 et le *théorème de Schwarz* s'applique :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \text{ soit } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \text{ peu importe l'ordre des dérivations.}$$

Par exemple : $(x, y) \mapsto x^2 \ln(y)$ est de classe C^2 sur son domaine de définition.

$$\text{On calcule } \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \ln(y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{y}.$$

$$\text{On a bien } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{2x}{y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

2. DIFFÉRENTIELLES

2.1 Fonction d'une seule variable

La fonction $f : x \mapsto f(x)$ étant suffisamment régulière, elle admet au voisinage de x un développement de Taylor :

$$f(x + \delta x) = f(x) + \delta x \cdot f'(x) + \frac{(\delta x)^2}{2!} \cdot f''(x) + O[(\delta x)^3].$$

Intéressons-nous à la différence $f(x + \delta x) - f(x)$, quand δx est très petit :

$$f(x + \delta x) - f(x) = \delta x \cdot f'(x) + \frac{(\delta x)^2}{2!} \cdot f''(x) + O[(\delta x)^3]. \text{ D'où :}$$

$$\frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x) + \frac{\delta x}{2!} \cdot f''(x) + O[(\delta x)^2].$$

On note dx un accroissement δx *infinitement petit* :

$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x), \text{ ce qu'on écrit sous la forme :}$$

$$f(x + dx) - f(x) = f'(x) dx.$$

La différence $df = f(x + dx) - f(x)$ est appelée **différentielle** de f en x .

On a $df = f'(x) dx$ pour une fonction d'une seule variable.

Ceci fait tout l'intérêt de la notation de Leibniz : $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

$df = f(x + dx) - f(x)$ est la variation infinitésimale de f au voisinage de x , due à une variation infinitésimale dx de x .

Remarquons que contrairement au cas d'un accroissement fini δx , il n'y a pas de termes en $(dx)^2$, $(dx)^3$, dans df . Ceci n'est pas une approximation car :

$$A dx + B(dx)^2 = dx[A + B dx] = dx \cdot \lim_{\delta x \rightarrow 0} [A + B \delta x] = A dx.$$

Un infiniment petit du premier ordre dx est infiniment plus grand qu'un infiniment petit du second ordre $(dx)^2$. Des termes en $(dx)^2$ n'interviennent que s'il n'y a pas de termes en dx ($A = 0$).

Pour le calcul de différentielles, on utilise souvent les dérivations composées.

Si $x \mapsto F(x) = f[g(x)]$ alors $\frac{dF}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \Rightarrow dF = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} dx$. On retrouve la for-

mule de dérivation $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

Par exemple, si $F(x) = \exp(2\sqrt{x}) = \exp[g(x)] = f[g(x)]$, avec $g(x) = 2\sqrt{x}$, on a $dF = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} dx = \exp[g(x)] \cdot g'(x) \cdot dx = \frac{\exp(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$.

2.2 Fonction de plusieurs variables

On raisonne sur une fonction f de deux variables réelles : $(x, y) \mapsto f(x, y)$, de classe C^2 , à valeurs réelles.

La fonction f étant suffisamment régulière, elle admet au voisinage de (x, y) un développement de Taylor à l'ordre 2 (à des termes d'ordre 3 près, comme $(\delta x)^3$ ou $\delta x(\delta y)^2$) :

$$f(x + \delta x, y + \delta y) = f(x, y) + \delta x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \delta y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2!} \left[(\delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\delta x \cdot \delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (\delta y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right],$$

En notant dx et dy les infiniment petits d'ordre 1, on a :

$$df = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \text{ différentielle de } f \text{ en } (x, y).$$

$df = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$ est la variation infinitésimale de f au voisinage de (x, y) , due à une variation infinitésimale dx de x et dy de y .

Par exemple, si $f : (x, y) \mapsto x^2 \ln(y)$, on a :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 2x \ln(y) dx + \frac{x^2}{y} dy.$$

2.3 Intégration

Pour une fonction d'une seule variable, découpons l'intervalle $[a, b]$ en N intervalles de longueur $\delta x = \frac{b-a}{N}$. Cette longueur devient infiniment petite quand $\delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow N \rightarrow \infty$. Elle est alors notée dx . On a donc :

$$\int_{x=a}^{x=b} df = \int_{x=a}^{x=b} [f(x+dx) - f(x)] = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^{N=\frac{b-a}{\delta x}} [f(a+i\delta x) - f(a+(i-1)\delta x)] \right].$$

La somme discrète intervenant ici se simplifie :

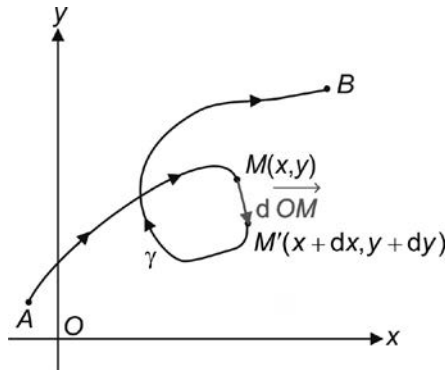
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N=\frac{b-a}{\delta x}} [f(a+i\delta x) - f(a+(i-1)\delta x)] &= f(b) - \underbrace{f(b-\delta x)}_0 + \underbrace{f(b-\delta x) - f(b-2\delta x)}_0 + \underbrace{f(b-2\delta x) - \dots}_{\dots} \\ &\quad \dots - \underbrace{f(a+\delta x) + f(a+\delta x) - f(a)}_0 \\ &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Ce résultat est bien traduit par la notation de Leibniz :

$$\int_{x=a}^{x=b} df = \int_{x=a}^{x=b} f'(x) dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$$

Pour une fonction de deux variables, $\int_{A(x_A, y_A)}^{B(x_B, y_B)} df$ prend le sens suivant : on somme,

le long d'un chemin γ menant de A à B , les différences $df = f(x+dx, y+dy) - f(x, y)$ entre des points M et M' de coordonnées respectives (x, y) et $(x+dx, y+dy)$.



Comme pour le cas d'une fonction d'une seule variable :

$$\int_A^B df = f(B) - f(A) = f(x_B, y_B) - f(x_A, y_A), \text{ résultat ne dépendant que des points } A \text{ et } B,$$

et pas des points intermédiaires.

La somme continue $\int_A^B df = f(B) - f(A)$ ne dépend pas du chemin γ suivi pour aller de A à B .

3. FORMES DIFFÉRENTIELLES

3.1 Définition

Pour un système décrit par deux variables x et y , une **forme différentielle** s'écrit $\delta W = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Attention : malgré la notation qui est la même que celle d'un accroissement fini, δW désigne bien une grandeur infinitésimale.

Par exemple, dans un champ de force $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{e}_x + Q(x, y)\vec{e}_y$, le travail reçu par une particule se déplaçant de $M(x, y)$ à $M'(x + dx, y + dy)$ vaut :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

C'est un travail *élémentaire*, ou *infinitésimal*, défini pour un déplacement élémentaire $d\vec{OM} = \vec{MM}' = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$ de la particule, se produisant entre les dates t et $t + dt$.

Une forme différentielle est donc définie pour une *transformation infinitésimale* correspondant à une variation dx de x et dy de y au voisinage de (x, y) .

Lorsqu'on somme les formes différentielles δW le long d'un chemin γ entre deux points A et B , on obtient la grandeur $W_{A \rightarrow B}^\gamma$ (par exemple, le travail de la force s'exerçant sur la particule qui se déplace entre A et B le long de γ).

La grandeur $W_{A \rightarrow B}^\gamma = \int_A^B \delta W$ dépend *a priori* du chemin γ suivi entre A et B .

3.2 Théorème de Poincaré

À quelle condition $W_{A \rightarrow B}^\gamma$ ne dépend-il que de A et de B et pas de γ ?

Autrement dit : à quelle condition existe-t-il une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$, telle que $W_{A \rightarrow B}^\gamma = f(B) - f(A)$?

Pour un déplacement élémentaire la relation précédente s'écrit : $\delta W = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$, soit $\delta W = df$.

On cherche donc la condition pour qu'il existe une fonction f telle que :

$$\delta W = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy .$$

Si c'est le cas, on identifie $\begin{cases} P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \\ Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$ et d'après le théorème de Schwarz on

a nécessairement $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

La réciproque n'est pas toujours vraie (elle l'est à certaines conditions sur le domaine des valeurs prises par x et y , conditions généralement vérifiées en Physique).

Retenons l'implication suivante (théorème de Poincaré) :

$$\exists f : (x, y) \mapsto f(x, y) / \delta W = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = df \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Prenons des exemples :

(i) La forme différentielle $\delta W = ydx$ n'est pas une différentielle puisque :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 . \text{ En conséquence } W_{A \rightarrow B}^\gamma \text{ dépend du chemin } \gamma .$$

(ii) La forme différentielle $\delta W = 2x \sin(y)dx + [x^2 \cos(y) - 1]dy$ peut être une différentielle puisque $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cos(y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Cherchons donc s'il existe une fonction $f(x, y)$ telle que $\delta W = df$. On identifie pour cela les dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(y) - 1 \end{cases}$$

On intègre alors une quelconque de ces deux relations, par exemple la première : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin(y) \Rightarrow f(x, y) = x^2 \sin(y) + \varphi(y)$.

Attention ! On a intégré à y constant, donc φ n'est pas une constante, mais n'importe quelle fonction de y à ce stade. En effet, la dérivée de $y \mapsto \varphi(y)$ par rapport à x donne bien 0.

En reportant $f(x, y) = x^2 \sin(y) + \varphi(y)$ dans la deuxième relation, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(y) + \frac{d\varphi}{dy} \underset{\text{aussi}}{=} x^2 \cos(y) - 1 \Rightarrow \varphi(y) = -y + Cte .$$

Finalement, on a bien $\delta W = df$ avec $f(x, y) = x^2 \sin(y) - y + Cte$.

Revenons sur les différentes notations :

Pour une transformation infinitésimale, on note δW une forme différentielle et df une différentielle.

Pour une transformation finie (intégrale), on note $W_{A \rightarrow B}^y = \int_A^B \delta W$, ou simplement

W s'il n'y a pas d'ambiguïté, et $\Delta f = \int_A^B df = f(B) - f(A)$.

Par exemple, on écrit souvent le premier principe de la thermodynamique sous la forme $dU = \delta W + \delta Q$ pour une transformation infinitésimale, et $\Delta U = W + Q$ pour une transformation finie.

4. APPLICATIONS ☉

4.1 Fonctions implicites ☉

Considérons trois variables x , y et z liées par une relation $f(x, y, z) = 0$ (*), par exemple $f(x, y, z) = yx^3 + z \ln(x) + 1 = 0$.

x , y et z ne sont donc pas indépendantes. Si par exemple on fixe les valeurs de y et de z , x ne peut prendre que certaines valeurs, solutions de l'équation (*).

Cependant, on ne peut pas dans cet exemple exprimer analytiquement la fonction $(y, z) \mapsto x(y, z)$: x est donc une fonction *implicite* de y et de z .

On peut néanmoins obtenir des relations entre les dérivées partielles. En effet, comme f est une constante, on a, en prenant la différentielle de (*) :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz = 0.$$

Si l'on maintient z constant ($dz = 0$), on a $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} dy = 0$ à z constant. Or $\frac{dy}{dx}$ à z constant est par définition la dérivée partielle par rapport à x de la

fonction implicite de deux variables $(z, x) \mapsto y(z, x)$. On a donc $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}}$.

De même $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}}$, d'où la relation $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}$.

On peut aussi remarquer que $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$

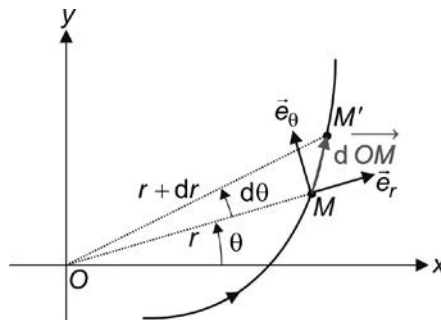
Un certain nombre de résultats peuvent être ainsi démontrés sans avoir à connaître explicitement les fonctions $(x, y) \mapsto z(x, y)$, $(y, z) \mapsto x(y, z)$ et $(z, x) \mapsto y(z, x)$.

4.2 Calculs intégraux ©

Le calcul de grandeurs finies se ramène souvent au découpage du domaine d'intégration en parties infinitésimales. Prenons quelques exemples.

Exemple 1 : longueur d'une courbe dont on connaît l'équation polaire $r(\theta)$

On découpe la courbe en segments élémentaires $[MM']$, où M a pour coordonnées polaires (r, θ) et $M' : (r + dr, \theta + d\theta)$.



Le vecteur position vaut $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ donc on obtient le déplacement élémentaire en prenant la différentielle de \overrightarrow{OM} :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta, \text{ puisque } \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta.$$

La longueur élémentaire vaut :

$$dL = \left\| d\overrightarrow{OM} \right\| = \left\| \overrightarrow{MM'} \right\| = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2} = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}, \text{ en parcourant la courbe dans}$$

le sens des θ croissants afin d'avoir $d\theta > 0$.

On obtient la longueur de la courbe comprise entre θ_{\min} et θ_{\max} en calculant

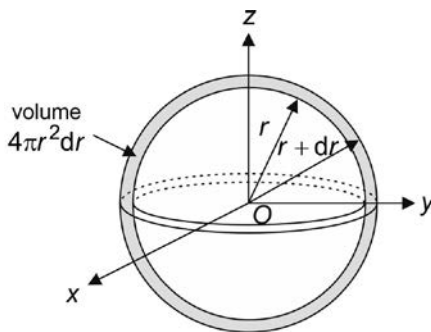
une intégrale :
$$L = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \left\| d\overrightarrow{OM} \right\| = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Exemple 2 : charge d'une sphère

Une sphère de rayon R possède une densité volumique de charges connue $\rho(r)$ qui ne dépend pas des coordonnées sphériques θ et φ : on a *symétrie sphérique* (invariance du système par toute rotation autour du centre O de la sphère).

Si ρ était uniforme, on pourrait calculer la charge Q de la sphère en multipliant son volume par ρ , mais ce n'est pas le cas. On doit donc découper la sphère de façon à ce que $\rho(r)$ reste constant sur un volume élémentaire : on peut prendre le volume compris entre deux sphères de centre O , et de rayons r et $r + dr$.

Ce volume vaut $d\mathcal{V} = \mathcal{V}(r + dr) - \mathcal{V}(r)$ où $\mathcal{V}(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ est le volume d'une sphère de rayon r . On a donc $d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr$. On en déduit $Q = \int_{r=0}^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$



Tout l'intérêt des différentielles est le passage à une variation infiniment petite. Si le rayon de la sphère subissait un accroissement fini, on aurait :

$$\delta\mathcal{V} = \mathcal{V}(r + \delta r) - \mathcal{V}(r) = \frac{4}{3}\pi[(r + \delta r)^3 - r^3] = \frac{4}{3}\pi[3r^2\delta r + 3r(\delta r)^2 + (\delta r)^3] \neq 4\pi r^2\delta r.$$

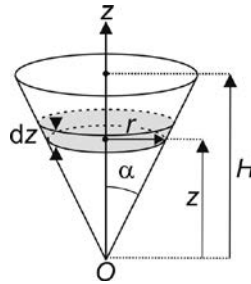
En revanche, pour une variation infinitésimale dr de r , $d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr$ est une relation exacte (comme on l'a vu, un infiniment petit d'ordre 2 « n'existe pas » devant un infiniment petit d'ordre 1).

Exemple 3 : volume d'un cône

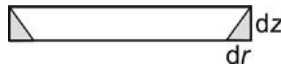
On peut calculer le volume d'un cône de sommet O , d'axe Oz , de hauteur H et de demi-angle au sommet α en le découpant en tranches infinitésimales de hauteur dz .

Le volume d'une telle tranche se confond avec celui d'un cylindre circulaire de

hauteur dz et de rayon r , soit $d\mathcal{V} = \pi r^2 dz$.



Là encore, ce qui ne serait qu'une approximation pour un accroissement petit δz devient rigoureux pour dz infiniment petit. En effet la différence de volume entre le cylindre et le cône de hauteur dz est de l'ordre de $r dr dz$, donc c'est un infiniment petit d'ordre 2 en dz puisque $r = z \tan \alpha$.



Finalement, le volume du cône est :

$$\mathcal{V} = \int_{z=0}^H \pi r^2 dz = \int_{z=0}^H \pi \tan^2 \alpha \cdot z^2 dz = \frac{1}{3} \pi \tan^2 \alpha \cdot H^3.$$

Exemple 4 : énergie reçue par un conducteur ohmique

Un conducteur ohmique de résistance R parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ reçoit une puissance instantanée $p(t) = Ri^2(t)$.

On passe d'une puissance moyenne $P = \frac{W}{\Delta t}$, où W est le travail reçu pendant la durée Δt , à une puissance instantanée, en considérant une durée infiniment petite dt au voisinage de l'instant t .

Pendant cette durée dt , le conducteur reçoit un travail élémentaire δW (attention : c'est une forme différentielle et pas une différentielle).

La puissance instantanée est donc définie par $p(t) = \frac{\delta W}{dt}$. Ce n'est pas une dérivée puisque W n'est pas une fonction du temps (parler du « travail à la date t » n'a aucun sens ; c'est le travail δW reçu entre t et $t + dt$ qui en a un).

Pour calculer le travail reçu par le conducteur entre t_1 et t_2 il suffit donc de cal-

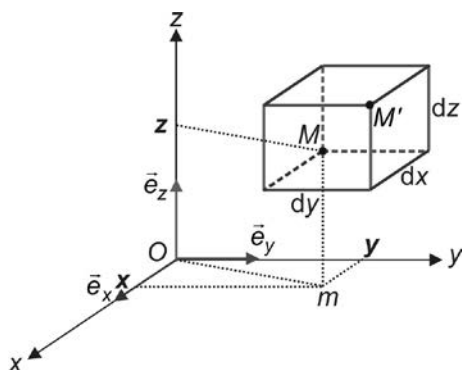
culer une intégrale : $W = \int_{t_1}^{t_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t) dt$.

[BOÎTE À OUTILS 2]

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

1. COORDONNÉES CARTÉSIENNES

1.1 Définition



On définit le repère orthonormé *direct* $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: \vec{e}_z est orienté dans le sens de déplacement d'un tire-bouchon quand on tourne de \vec{e}_x vers \vec{e}_y .

x (abscisse), y (ordonnée) et z (cote) sont les coordonnées cartésiennes du point M . Le vecteur position s'écrit $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

1.2 Déplacement, volume et surfaces élémentaires

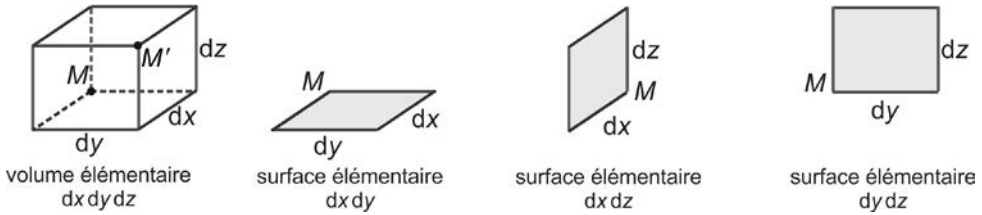
Si x varie de dx , le point se déplace de dx selon le vecteur \vec{e}_x .

Si y varie de dy , le point se déplace de dy selon le vecteur \vec{e}_y .

Si z varie de dz , le point se déplace de dz selon le vecteur \vec{e}_z .

Sous l'effet d'une variation infinitésimale dx, dy, dz de ses coordonnées x, y, z , le vecteur position varie de $d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$

$d\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$ est le *déplacement élémentaire* entre un point M et un point M' infiniment proche.



Le parallélépipède représenté sur la figure ci-dessus permet de calculer l'élément différentiel de volume en coordonnées cartésiennes :

$$d^3\mathcal{V} = dx dy dz.$$

Le volume d'un domaine compact (D) de l'espace est donc :

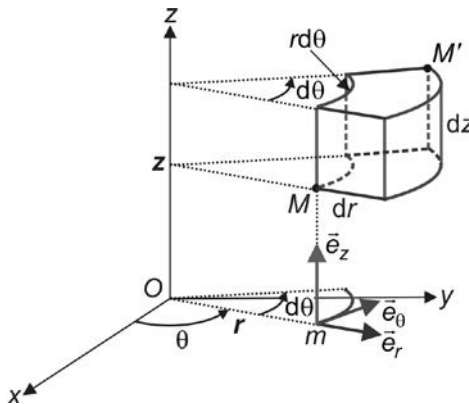
$$\mathcal{V} = \iiint_{P \in (D)} d^3\mathcal{V} = \iiint_{P \in (D)} dx dy dz.$$

On balaie l'espace entier en prenant $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Les différentes surfaces élémentaires se déduisent aussi de la figure.

2. COORDONNÉES CYLINDRIQUES

2.1 Définition



Soit un repère orthonormé direct cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On définit la base *mobile* (elle dépend du point M) $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, orthonormée et directe, ainsi que les coordonnées cylindriques de M , de la manière suivante :

— Si m est le projeté orthogonal de M sur le plan xOy , le vecteur unitaire radial \vec{e}_r est

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{Om}}{r}, \text{ avec } r = \left\| \vec{Om} \right\|.$$

- θ est l'angle *orienté* (\vec{e}_x, \vec{e}_r) dans le plan xOy : cet angle est positif si un tire-bouchon se déplace dans le sens du vecteur \vec{e}_z quand on tourne de \vec{e}_x vers \vec{e}_r .
- Le vecteur unitaire orthoradial \vec{e}_θ se déduit de \vec{e}_r par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Oz .
- Le vecteur unitaire \vec{e}_z complète ainsi le trièdre direct.

r (rayon polaire), θ (angle polaire) et z (cote) sont les coordonnées cylindriques de M . Le vecteur position s'écrit $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ (attention : r n'est pas ici la norme du vecteur position).

2.2 Déplacement, volume et surfaces élémentaires

Si r varie de dr , le point se déplace de dr selon le vecteur \vec{e}_r .

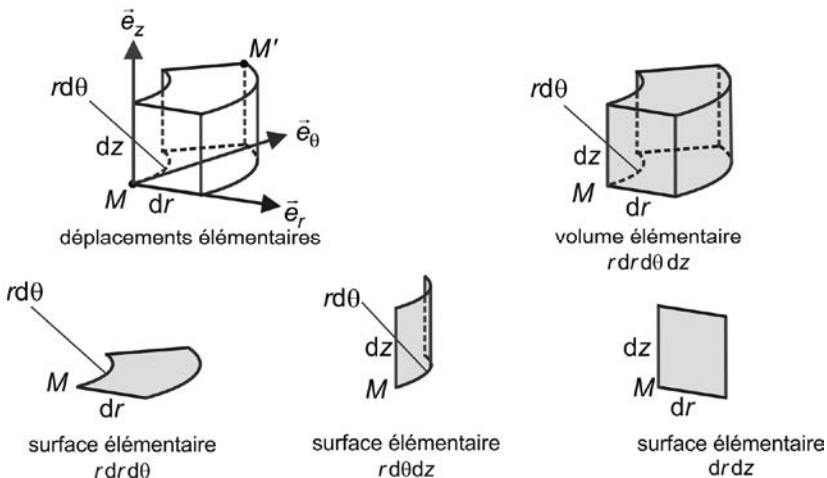
Si θ varie de $d\theta$, le point se déplace de $r d\theta$ selon le vecteur \vec{e}_θ .

Si z varie de dz , le point se déplace de dz selon le vecteur \vec{e}_z .

Remarquons que $d\theta$ étant infiniment petit, l'arc de cercle de longueur $r d\theta$ se confond avec un segment rectiligne (ce qu'on ne peut pas représenter sur une figure où les déplacements sont nécessairement finis).

Sous l'effet d'une variation infinitésimale $dr, d\theta, dz$ de ses coordonnées r, θ, z , le vecteur position varie de $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$

$d\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$ est le *déplacement élémentaire* entre un point M et un point M' infiniment proche.



Le parallélépipède représenté sur la figure précédente permet de calculer l'élément différentiel de volume en coordonnées cylindriques : $d^3\mathcal{V} = r dr d\theta dz$.

Le volume d'un domaine compact (D) de l'espace est donc :

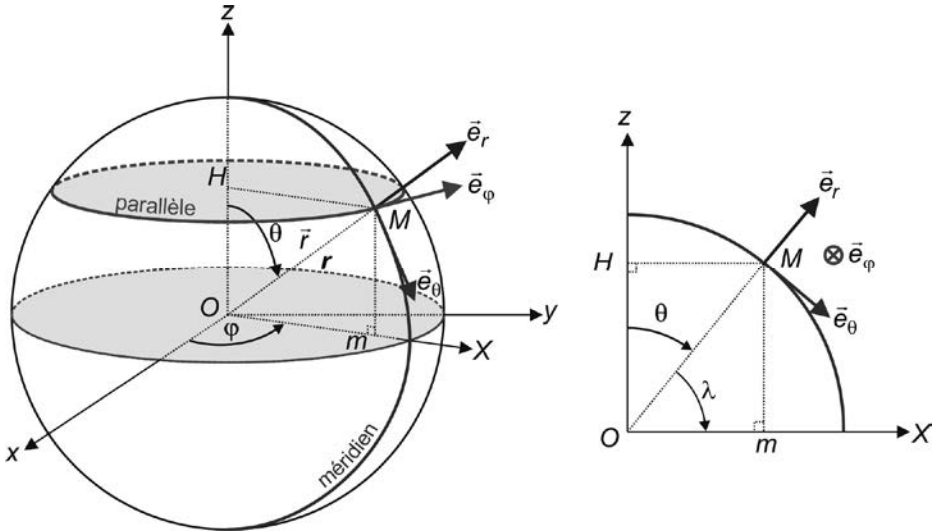
$$\mathcal{V} = \iiint_{P \in (D)} d^3\mathcal{V} = \iiint_{P \in (D)} r dr d\theta dz.$$

On balaie l'espace entier en prenant par exemple $r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $z \in \mathbb{R}$.

Les différentes surfaces élémentaires se déduisent aussi de la figure.

3. COORDONNÉES SPHÉRIQUES

3.1 Définition



Soit un repère orthonormé direct cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On définit la base *mobile* (elle dépend du point M) $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$, orthonormée et directe, ainsi que les coordonnées sphériques de M , de la manière suivante :

— Le vecteur unitaire radial \vec{e}_r est $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$, avec $r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| = \left\| \vec{r} \right\|$.

— $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle (\vec{e}_z, \vec{e}_r) . Lorsque $\theta = 0$, le point M se trouve sur l'axe Oz du côté des z positifs ; lorsque $\theta = \pi$, le point M se trouve sur l'axe Oz du côté des z négatifs.

— Le vecteur unitaire orthoradial \vec{e}_θ est un vecteur du plan vectoriel (\vec{e}_z, \vec{e}_r) se

déduisant de \vec{e}_r par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens des θ croissants.

— Si m est le projeté orthogonal de M sur le plan xOy , l'angle φ est l'angle *orienté* $(\vec{e}_x, \overrightarrow{Om})$ dans le plan xOy : cet angle est positif si un tire-bouchon se déplace dans le sens du vecteur \vec{e}_z quand on tourne de \vec{e}_x vers \overrightarrow{Om} .

— Le vecteur unitaire \vec{e}_φ complète le trièdre direct. C'est un vecteur du plan vectoriel (\vec{e}_x, \vec{e}_y) car il est orthogonal à \vec{e}_z .

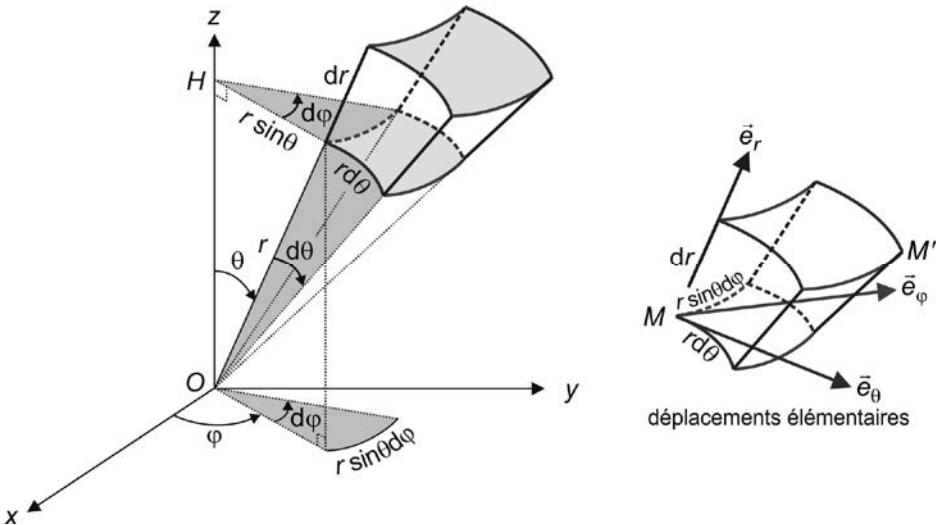
r (rayon), θ (colatitude) et φ (azimut) sont les coordonnées sphériques de M .
Le vecteur position s'écrit $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ (r est bien ici la norme du vecteur position).

Pour visualiser les directions de \vec{e}_θ et \vec{e}_φ , on peut tracer la sphère de centre O et de rayon r . \vec{e}_θ est alors porté par un méridien et \vec{e}_φ par un parallèle.

Ces références au repérage d'un point à la surface de la Terre sont précisément à l'origine du nom colatitude porté par l'angle θ .

La latitude λ est l'angle $(\vec{e}_r, \overrightarrow{Om})$. On a donc $\theta + \lambda = \frac{\pi}{2}$, comme on peut le voir sur la figure dans le plan méridien.

3.2 Déplacement, volume et surfaces élémentaires

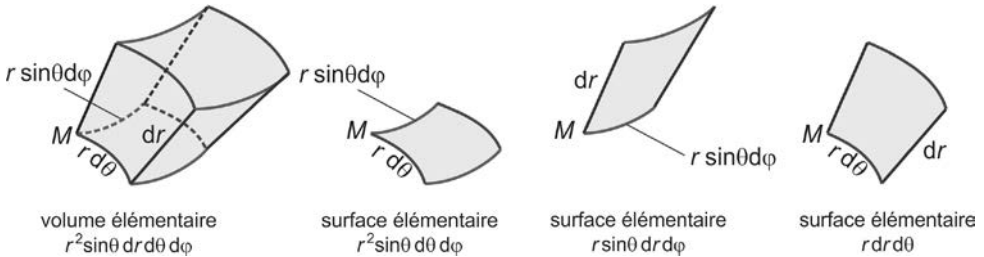


Si r varie de dr , le point se déplace de dr selon le vecteur \vec{e}_r .
Si θ varie de $d\theta$, le point se déplace de $r d\theta$ selon le vecteur \vec{e}_θ .

Si φ varie de $d\varphi$, le point se déplace de $r \sin\theta d\varphi$ selon le vecteur \vec{e}_φ .

Sous l'effet d'une variation infinitésimale dr , $d\theta$, $d\varphi$ de ses coordonnées r , θ , φ , le vecteur position varie de $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$

$d\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$ est le *déplacement élémentaire* entre un point M et un point M' infiniment proche.



Le parallélépipède représenté sur la figure ci-dessus permet de calculer l'élément différentiel de volume en coordonnées sphériques : $d^3\mathcal{V} = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

Le volume d'un domaine compact (D) de l'espace est donc :

$$\mathcal{V} = \iiint_{P \in (D)} d^3\mathcal{V} = \iiint_{P \in (D)} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

On balaie l'espace entier en prenant par exemple :

$r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$. Ainsi l'élément de volume $d^3\mathcal{V}$ est positif.

On aurait également pu choisir $r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $\varphi \in [0, \pi]$, mais il aurait fallu, pour garder un élément de volume positif, prendre $d^3\mathcal{V} = r^2 |\sin\theta| dr d\theta d\varphi$.

Les différentes surfaces élémentaires se déduisent aussi de la figure.

[BOÎTE À OUTILS 3]

ANALYSE DE FOURIER

1. SÉRIE DE FOURIER

1.1 Théorème pour une fonction f à valeurs réelles

Théorème

Toute fonction T -périodique du temps $t \mapsto f(t)$, à valeurs réelles, peut être décomposée en une somme d'un nombre fini, ou infini, de composantes sinusoïdales discrètes, dont les pulsations sont multiples de la pulsation fondamentale $\Omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)] = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t + \psi_n)$$

Puisque $c_n \cos(n\Omega t + \psi_n) = \underbrace{c_n \cos \psi_n}_{a_n} \cos(n\Omega t) - \underbrace{c_n \sin \psi_n}_{b_n} \sin(n\Omega t)$, on a :

$$c_n^2 = a_n^2 + b_n^2.$$

On peut prendre $c_n \geq 0$ (il existe d'autres conventions). On a alors :

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Calcul des coefficients

Le coefficient c_0 est égal à la valeur moyenne de la fonction f , et correspond donc à la pulsation $\omega = 0$ (période $T \rightarrow \infty$) :

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \langle f \rangle$$

Les coefficients a_n et b_n valent :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\Omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\Omega t) dt$$

En conséquence, les coefficients a_n sont tous nuls si f est impaire et les coefficients b_n sont tous nuls si f est paire.

Convergence

Il existe des conditions pour que la série de Fourier (somme infinie) d'une fonction converge bien vers cette fonction. C'est le cas des fonctions de classe C^1 par morceaux : $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t_0 + \psi_n)$ converge bien vers $f(t_0)$ pour toute valeur t_0 où f est continue.

Si f est discontinue en t_0 , la série $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t_0 + \psi_n)$ converge vers :

$$\frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}, \text{ qui peut être différent de } f(t_0).$$

Vocabulaire

$c_1 \cos(\Omega t + \psi_1)$ est le **fondamental** de f (même période T que f)

$c_n \cos(n\Omega t + \psi_n)$ est **l'harmonique de rang n** de f (période $\frac{T}{n}$)

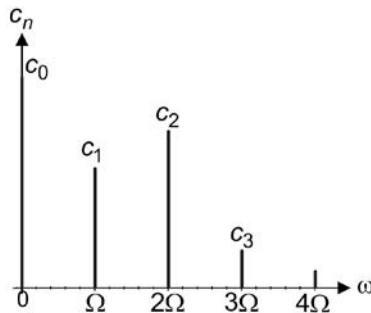
Spectre de f

L'analyse de Fourier permet une représentation de l'amplitude des harmoniques d'un signal en fonction de la fréquence.

Chaque composante sinusoïdale apparaît comme une ligne verticale, appelée *raie*. Sa hauteur représente l'amplitude correspondante, sa position donne la fréquence correspondante.

La représentation du signal dans le domaine fréquentiel est appelée *spectre* du signal.

Il y a plusieurs représentations possibles. On représente souvent les amplitudes c_n des harmoniques en fonction de la pulsation ω (qui ne prend que les valeurs discrètes $\omega = n\Omega$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$).



Approximation de f

Pour toute fonction « physique », $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ce qui permet d'approximer f par une somme finie de sinusoides.

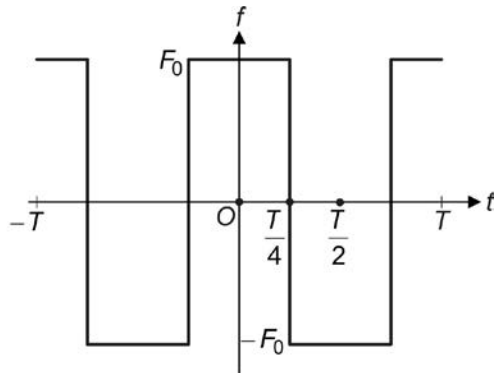
Pour les fonctions qui présentent des discontinuités (créneaux par exemple), donc des variations infiniment rapides, les c_n décroissent lentement avec n puisque ces variations rapides correspondent à de grandes pulsations.

Exemples de calcul

— Fonction « créneaux »

Prenons f paire et :

$$\begin{cases} f(t) = F_0 \text{ pour } 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ f\left(\frac{T}{4}\right) = 0 \\ f(t) = -F_0 \text{ pour } \frac{T}{4} < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$



Il s'agit de créneaux symétriques (sur une période T , le signal prend pendant $\frac{T}{2}$ la valeur « haute » et pendant $\frac{T}{2}$ la valeur basse), de valeur moyenne nulle.

On a donc : $c_0 = \langle f \rangle = 0$ et $b_n = 0 \forall n$ car f est paire.

Il reste à calculer les a_n :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t) \cos(n\Omega t)}_{\text{paire}} dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt$$

$$= \frac{4}{T} \left\{ \int_0^{\frac{T}{4}} \underbrace{f(t)}_{F_0} \cos(n\Omega t) dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)}_{-F_0} \cos(n\Omega t) dt \right\}$$

$$a_n = \frac{4F_0}{T} \left\{ \left[\frac{\sin(n\Omega t)}{n\Omega} \right]_0^{\frac{T}{4}} - \left[\frac{\sin(n\Omega t)}{n\Omega} \right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \right\} = \frac{4F_0}{n\Omega T} \left\{ 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\} = \frac{4F_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \text{ car } \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

On distingue alors les cas n pair et impair :

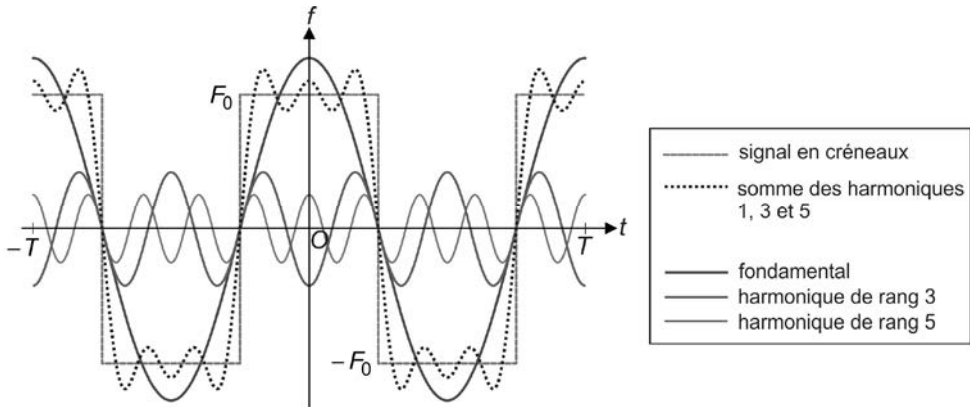
pour $n = 2p$: $a_{2p} = 0$;

pour $n = 2p + 1$: $a_{2p+1} = \frac{4F_0}{(2p+1)\pi} (-1)^p$.

Les conditions de convergence étant vérifiées pour toutes les valeurs de t , on a finalement $f(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos[(2p+1)\Omega t]$.

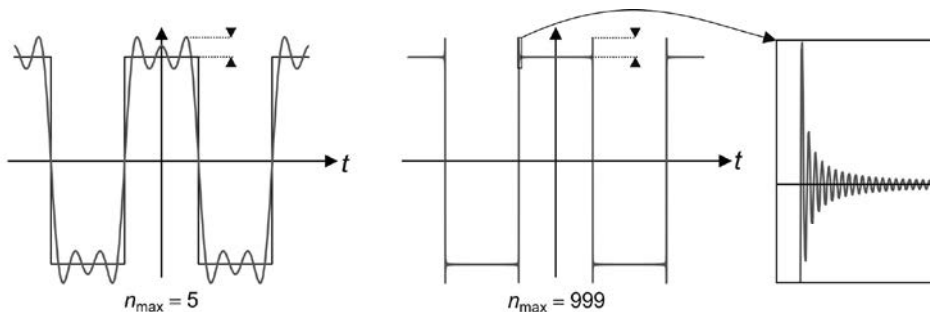
$$f(t) = \frac{4F_0}{\pi} \left[\cos(\Omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\Omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\Omega t) - \frac{1}{7} \cos(7\Omega t) + \dots \right]$$

Le fondamental $\frac{4F_0}{\pi} \cos(\Omega t)$ des créneaux possède une amplitude plus grande que celle des créneaux.



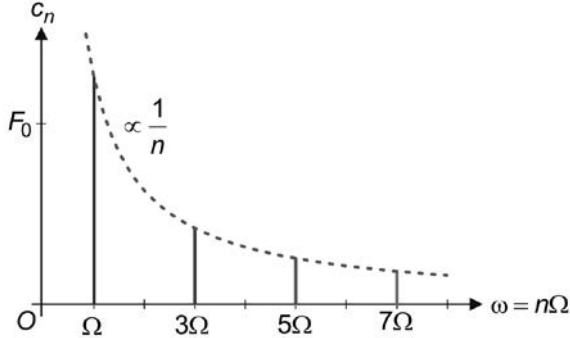
On a représenté ci-dessus le signal temporel, les premiers harmoniques non nuls (rangs 1 : fondamental, 3 et 5), et la somme de ces trois premiers harmoniques.

On constate que la convergence est non uniforme (l'écart entre la somme d'un nombre fini de sinusoïdes, même très grand, et les créneaux reste borné inférieurement). Ceci est dû à la présence de la discontinuité dans les créneaux.



Convergence non uniforme : même en sommant un grand nombre de sinusoïdes, il persiste un écart entre cette somme et les créneaux. C'est le phénomène de Gibbs qui existe dès que la fonction que l'on approxime ainsi présente des discontinuités. En revanche, la série de Fourier converge simplement vers les créneaux : en un point donné, l'écart devient aussi faible que l'on veut en augmentant le nombre d'harmoniques que l'on somme.

Le spectre des créneaux est le suivant :



L'amplitude des harmoniques étant proportionnelle à $1/n$, elle décroît « lentement » avec n et il faut beaucoup d'harmoniques pour bien approximer les créneaux. C'est encore une conséquence de la discontinuité.

— **Fonction « triangles »**

Prenons une fonction g impaire et de valeur moyenne nulle (on a $c_0 = \langle g \rangle = 0$), correspondant à des triangles symétriques (la pente en valeur absolue est la même lorsque le signal croît que lorsqu'il décroît).

Il est possible d'éviter le calcul des coefficients a_n et b_n en remarquant que la dérivée de g est la fonction en créneaux paire, symétrique et de valeur moyenne nulle étudiée précédemment, dont la série de Fourier est connue.

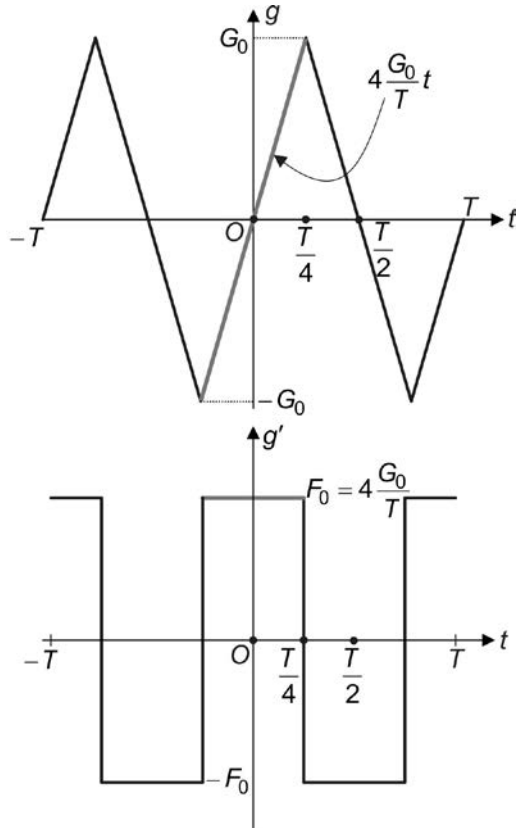
On a ainsi $g'(t) = f(t)$ à tout instant en prenant $g'(T/4) = 0$, avec :

$$f(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos[(2p+1)\Omega t].$$

entre $-\frac{T}{4}$ et $\frac{T}{4}$, $g(t) = 4\frac{G_0}{T} t$.

On en déduit $g'(t) = 4\frac{G_0}{T} = F_0$.

On obtient $g(t)$ par intégration :

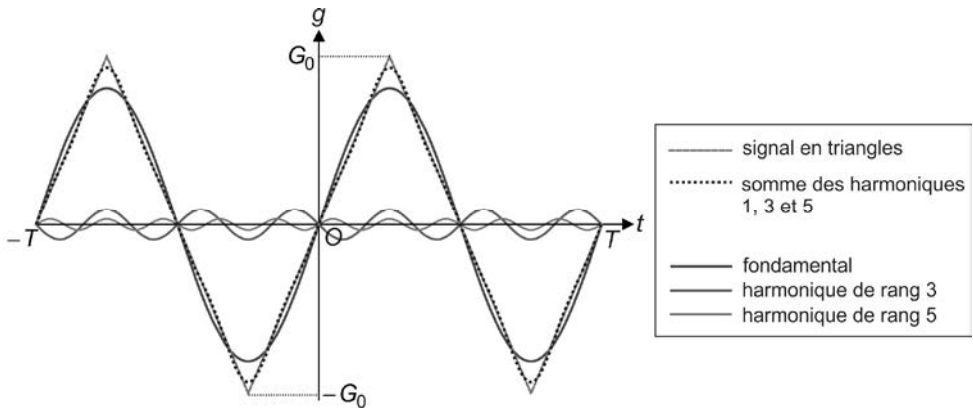


$$g(t) = \underbrace{g(0)}_{=0} + \int_0^t f(t) dt = \frac{16G_0}{\pi\Omega T} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin[(2p+1)\Omega t], \text{ avec } \Omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ soit :}$$

$$g(t) = \frac{8G_0}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin[(2p+1)\Omega t].$$

$$g(t) = \frac{8G_0}{\pi^2} \left[\sin(\Omega t) - \frac{1}{3^2} \sin(3\Omega t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\Omega t) - \frac{1}{7^2} \sin(7\Omega t) + \dots \right]$$

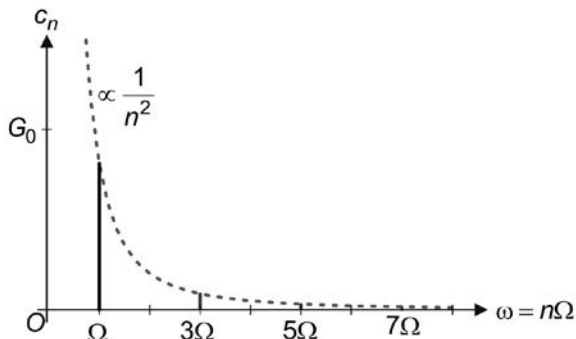
Le fondamental $f(t) = \frac{8G_0}{\pi^2} \sin(\Omega t)$ des triangles possède une amplitude plus petite que celle des triangles.



On a de nouveau représenté ci-dessus le signal temporel ; les premiers harmoniques non nuls (rangs 1 : fondamental, 3 et 5), et la somme de ces trois premiers harmoniques.

On constate que la convergence est cette fois-ci uniforme (l'écart maximal entre la somme d'un nombre fini de sinusoïdes tend vers 0).

Le spectre des triangles est le suivant :



L'amplitude des harmoniques étant proportionnelle à $1/n^2$, elle décroît « rapidement » avec n et il faut peu d'harmoniques pour bien approximer les triangles.

1.2 Théorème pour les fonctions f à valeurs complexes (complément hors-programme)

Théorème

Toute fonction T_0 -périodique du temps f , à valeurs complexes, peut être décomposée en une somme d'un nombre fini, ou infini, de composantes sinusoïdales discrètes, dont les fréquences sont multiples de la fréquence fondamentale $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$.

Le développement en série de Fourier s'écrit $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2i\pi n \nu_0 t}$.

Les coefficients de la série de Fourier se calculent à l'aide de la formule

suivante : $C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-2i\pi n \nu_0 t} dt$.

Le spectre de f fait donc intervenir des fréquences négatives, mais pour une fonction f réelle, on a $C_{-n} = C_n^*$ d'où :

$$\begin{aligned} f(t) &= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} e^{-2i\pi n \nu_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{2i\pi n \nu_0 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [C_n e^{2i\pi n \nu_0 t} + (C_n e^{2i\pi n \nu_0 t})^*] \\ &= C_0 + 2\text{Re} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{2i\pi n \nu_0 t} \right] \end{aligned}$$

On peut donc ne considérer que les fréquences positives. Le spectre est alors par exemple la représentation de $2|C_n| = c_n$ pour $\nu = \nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, \dots, n\nu_0$ et de la valeur

moyenne $C_0 = c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt = \langle f \rangle$ correspondant à la fréquence $\nu = 0$.

Autre forme pour les fonctions à valeurs réelles

Posons $C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ pour $n > 0$ et $\Omega = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu_0$. On a alors :

$$f(t) = C_0 + 2\text{Re} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{in\Omega t} \right] = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)].$$

Comme $C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) [\cos(n\Omega t) - i \sin(n\Omega t)] dt$, d'où les coefficients c_0 , a_n et

$$b_n : c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt = \langle f \rangle \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(n\Omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(n\Omega t) dt$$

On a donc également :

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\Omega t + \psi_n) \quad \text{avec} \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|C_n| \quad (\text{forme vue au 1.1}).$$

2. TRANSFORMÉE DE FOURIER

2.1 Théorème

Toute fonction du temps f , non périodique, à valeurs complexes, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ converge, peut également être représentée dans le domaine fréquentiel par

un spectre, fonction continue de la fréquence, donnée par la transformée de Fourier :

$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(v) e^{2i\pi vt} dv$, où $\tilde{f} = \text{TF}(f)$ est la **transformée de Fourier** de f , donnée par :

$$\tilde{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi vt} dt.$$

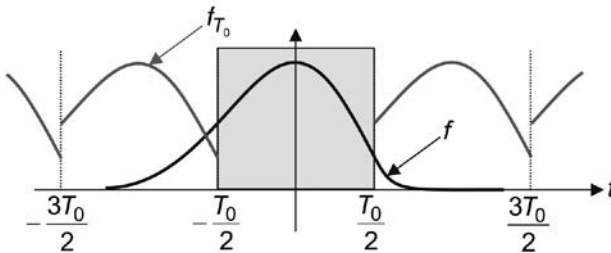
Le spectre de f fait donc intervenir des fréquences négatives, mais pour une fonction f réelle, on a $\tilde{f}(-v) = \tilde{f}^*(v)$, d'où :

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^0 \tilde{f}(v) e^{2i\pi vt} dv + \int_0^{+\infty} \tilde{f}(v) e^{2i\pi vt} dv = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(-v) e^{-2i\pi vt} dv + \int_0^{+\infty} \tilde{f}(v) e^{2i\pi vt} dv \\ &= \int_0^{+\infty} [\tilde{f}(v) e^{2i\pi vt} + (\tilde{f}(v) e^{2i\pi vt})^*] dv = 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{+\infty} \tilde{f}(v) e^{2i\pi vt} dv \right] \end{aligned}$$

On peut donc ne considérer que les fréquences positives. Le spectre est alors par exemple la représentation de $2|\tilde{f}(v)|$ pour $v \geq 0$.

2.2 Démonstration (complément hors-programme)

Considérons f_{T_0} , la « périodisée de f », fonction T_0 -périodique qui s'identifie avec f sur l'intervalle $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$. On peut lui appliquer le théorème de Fourier pour les fonctions périodiques :



On a $f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{2i\pi n v_0 t}$ avec $\underline{C}_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(t) e^{-2i\pi n v_0 t} dt = \underset{\text{d'ef}}{\frac{1}{T_0}} \tilde{f}_{T_0}(n v_0)$.

$\Delta v = (n+1)v_0 - n v_0 = v_0 = \frac{1}{T_0}$ étant l'écart entre deux fréquences consécutives

présentes dans le spectre de $f_{T_0}(t)$, on peut écrire $f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_{T_0}(n v_0) e^{2i\pi n v_0 t} \Delta v$.

Lorsque $T_0 \rightarrow +\infty$, on a $\begin{cases} f_{T_0}(t) \rightarrow f(t) \\ \tilde{f}_{T_0}(n v_0) \rightarrow \tilde{f}(n v_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n v_0 t} dt \\ \Delta v \rightarrow dv \end{cases}$

On a alors $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_{T_0}(n v_0) e^{2i\pi n v_0 t} \Delta v \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(v) e^{2i\pi v t} dv$ puisque, pour $n \in \mathbb{Z}$, $v = n v_0$

varie continûment entre $-\infty$ et $+\infty$ lorsque $v_0 = \Delta v$ devient infiniment petit.

On a bien $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(v) e^{2i\pi v t} dv$, avec $\tilde{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi v t} dt$.

2.3 Propriétés

— La TF est *linéaire* : $\text{TF}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{TF}(f) + \mu \text{TF}(g)$.

— $\text{TF}[\text{TF}(f)](t) = f(-t)$.

— Translation : $\text{TF}[t \mapsto f(t - t_0)](v) = e^{-2i\pi v t_0} \cdot \tilde{f}(v)$.

Démontrons ce résultat : $\text{TF}[t \mapsto f(t - t_0)](v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-2i\pi v t} dt$. On effectue le changement de variables $t' = t - t_0$:

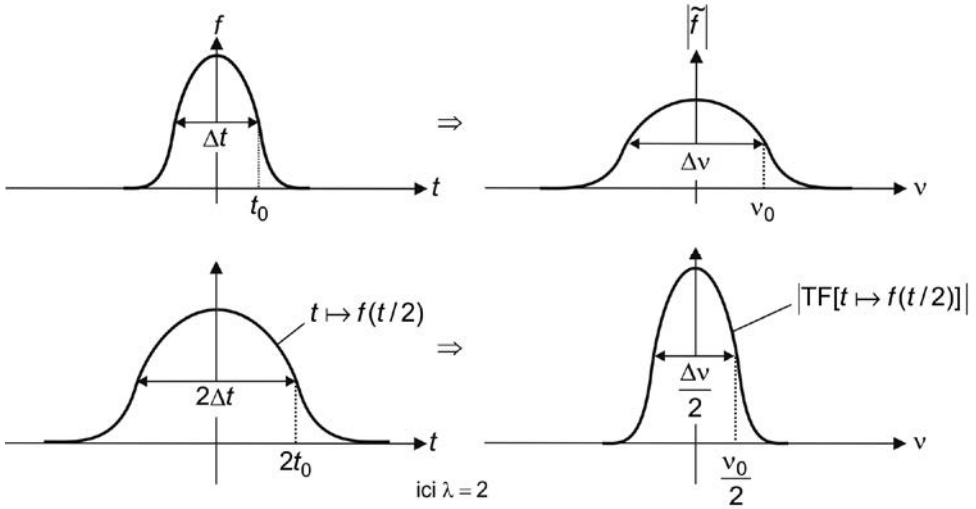
$$\text{TF}[t \mapsto f(t - t_0)](v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-2i\pi v (t' + t_0)} dt' = e^{-2i\pi v t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-2i\pi v t'} dt' = e^{-2i\pi v t_0} \cdot \tilde{f}(v).$$

— Similitude : $\text{TF}\left[t \mapsto f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right](v) = |\lambda| \cdot \tilde{f}(\lambda v)$

Démontrons cela : $\text{TF}\left[t \mapsto f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right](v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) e^{-2i\pi v t} dt$. On effectue le changement de variables $t' = \frac{t}{\lambda}$:

$$\text{TF} \left[t \mapsto f \left(\frac{t}{\lambda} \right) \right] (\nu) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-2i\pi\nu\lambda t'} \lambda dt' & \text{si } \lambda > 0 \\ \int_{+\infty}^{-\infty} f(t') e^{-2i\pi\nu\lambda t'} \lambda dt' & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}, \text{ soit dans tous les cas } |\lambda| \cdot \tilde{f}(\lambda\nu).$$

Cette propriété est fondamentale : une dilatation de l'échelle des temps implique une contraction de celle des fréquences ($\lambda > 1$). Une contraction de l'échelle des temps implique une dilatation de celle des fréquences ($\lambda < 1$).

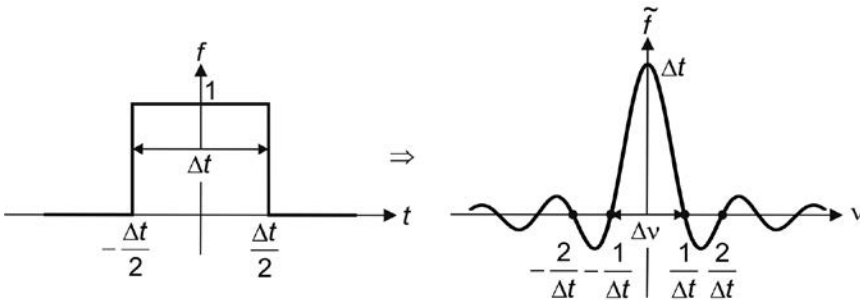


En d'autres termes :

Plus un signal temporel est bref, plus il est riche en fréquences (spectre étalé) ; plus il dure longtemps, moins il contient de fréquences (spectre étroit).

2.4 Exemples

Fonction « fenêtre »



On calcule sa transformée de Fourier :

$$\tilde{f}(v) = \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} e^{-2i\pi vt} dt = \left[\frac{e^{-2i\pi vt}}{-2i\pi v} \right]_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} = \Delta t \frac{e^{i\pi v \Delta t} - e^{-i\pi v \Delta t}}{2i\pi v \Delta t} = \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi v \Delta t).$$

La fonction sinc est la fonction *sinus cardinal*, définie par $\text{sinc}(X) = \frac{\sin X}{X}$ pour $X \neq 0$ et $\text{sinc}(0) = 1$ en prolongeant par continuité.

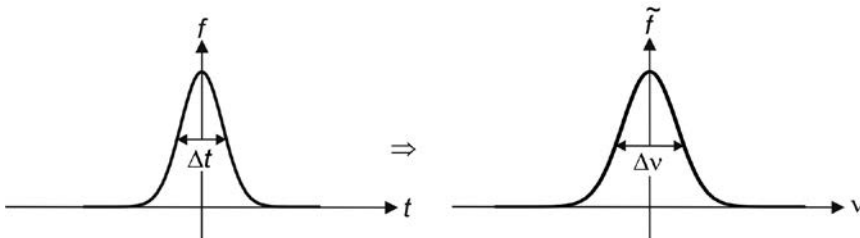
$\tilde{f}(v)$ est ici réelle.

Avec la définition de la largeur de bande spectrale Δv donnée sur la figure ci-avant, on a $\Delta t \cdot \Delta v = 2$.

On retrouve que plus le signal dure longtemps, plus sa bande spectrale est petite.

Fonction « gaussienne »

C'est la fonction $t \mapsto f(t) = e^{-\beta t^2}$.



On calcule sa transformée de Fourier :

$$\tilde{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta t^2} e^{-2i\pi vt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \left[\left(t + \frac{i\pi v}{\beta} \right)^2 + \frac{\pi^2 v^2}{\beta^2} \right]} dt = e^{-\frac{\pi^2 v^2}{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta u^2} du, \text{ où l'on a effectué le}$$

changement de variable $u = t + \frac{i\pi v}{\beta}$ (on admettra sa validité).

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$, on a $\tilde{f}(v) = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{\pi^2 v^2}{\beta}}$, la TF d'une gaussienne est également une gaussienne.

$\tilde{f}(v)$ est ici réelle.

Le calcul des largeurs à mi-hauteur des deux gaussiennes donne $\Delta t = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\beta}}$

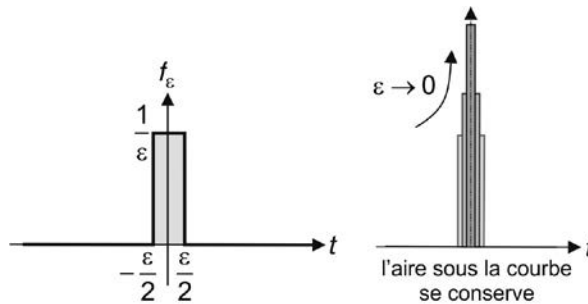
$$\text{et } \Delta\nu = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi} \sqrt{\beta} \text{ d'où } \Delta t \cdot \Delta\nu = \frac{4 \ln 2}{\pi}.$$

On retrouve que plus le signal dure longtemps, plus sa bande spectrale est petite.

2.5 Distribution de Dirac δ

Définition

On obtient une telle distribution en prenant la limite des fonctions f_ε , définies sur le graphe ci-dessous, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$:



On note $\delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon$.

δ correspond donc à une impulsion idéale : $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ +\infty & \text{pour } t = 0 \end{cases}$.

Cependant, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t) dt = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$ (l'aire sous la courbe des fonctions f_ε

est la même quel que soit ε), cette propriété reste vraie pour la distribution :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

La distribution de Dirac n'est pas une fonction car pour une fonction f nulle partout sauf en $t = 0$, on aurait $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0$, alors que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$.

Propriétés

— Si f est une fonction régulière quelconque $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = f(0)$.

En effet l'intégrale est la même que pour une fonction nulle partout sauf en 0 où elle vaut $f(0)$.

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0).$$

— La transformée de Fourier de la distribution de Dirac est :

$$v \mapsto \tilde{\delta}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-2i\pi vt} dt = 1.$$

On retrouve qu'un signal de durée nulle possède une largeur spectrale infinie.

$$- e^{2i\pi v_0 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(v-v_0)e^{2i\pi vt} dv. \text{ Comme } f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(v)e^{2i\pi vt} dv, \text{ on en déduit que la}$$

transformée de Fourier de $t \mapsto f(t) = e^{2i\pi v_0 t}$ vaut $v \mapsto \tilde{f}(v) = \delta(v-v_0)$.

On retrouve que le spectre d'un signal sinusoïdal (de durée infinie) ne contient qu'une raie pour sa fréquence v_0 . Sa largeur spectrale est nulle.

Ainsi, pour qu'un instrument produise un son le plus sinusoïdal possible, il faut qu'il vibre longtemps. C'est ce que réalise approximativement un diapason.

Néanmoins, la durée d'un signal réel étant forcément finie, sa largeur spectrale peut être faible, mais jamais nulle.

La composante sinusoïdale d'un signal n'a donc pas de réalité physique.

— Lorsqu'une fonction est T_0 -périodique, elle admet un développement en série de

$$\text{Fourier : } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2i\pi n v_0 t} \text{ avec } v_0 = \frac{1}{T_0} \text{ et } C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)e^{-2i\pi n v_0 t} dt.$$

Comme $e^{2i\pi n v_0 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi vt} \delta(v-nv_0) dv$, on en déduit que la transformée de Fourier de $t \mapsto e^{2i\pi n v_0 t}$ est $v \mapsto \delta(v-nv_0)$.

Ainsi, la transformée de Fourier de $t \mapsto f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2i\pi n v_0 t}$ est :

$$v \mapsto \tilde{f}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(v-nv_0).$$

On retrouve que le spectre d'une fonction périodique est discontinu, c'est un spectre de raies qui ne contient que les fréquences multiples de $v_0 = \frac{1}{T_0}$.

L'amplitude des raies est infinie et proportionnelle aux coefficients $|C_n|$.

Le spectre est par convention la représentation de $2|C_n|$ pour les fréquences $\nu = \nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, \dots, n\nu_0$, et de $\underline{C}_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt = \langle f \rangle$ pour $\nu = 0$.

2.6 Réponse d'un système linéaire à une entrée quelconque ©

La représentation usuelle d'une grandeur physique est la représentation temporelle. Comme les systèmes physiques linéaires possèdent la particularité de donner à une excitation sinusoïdale une réponse forcée sinusoïdale de même fréquence, on voit tout l'intérêt que peut avoir la décomposition d'un signal quelconque en une somme de sinusoïdes de fréquences différentes (représentation fréquentielle). On peut grâce à cette représentation fréquentielle déterminer la réponse d'un système linéaire à une excitation quelconque.

Soit $t \mapsto R(t)$ la réponse à une entrée $t \mapsto f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$.

La réponse à une entrée sinusoïdale $t \mapsto e^{2i\pi\nu t}$ est sinusoïdale et de même fréquence : elle s'écrit $t \mapsto H(\nu) e^{2i\pi\nu t}$, où $\nu \mapsto H(\nu)$ est la fonction de transfert du système linéaire, souvent notée $\omega \mapsto H(j\omega)$.

D'après la linéarité du système, qui implique que la réponse à une somme d'entrée est égale à la somme des réponses, on a :

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu.$$

Étudions maintenant la réponse à une impulsion. On a dans ce cas :

$$f(t) = \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\delta}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu, \text{ or on a vu que } \tilde{\delta}(\nu) = 1. \text{ On en déduit :}$$

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu. \text{ D'où :}$$

$H(\nu) = \tilde{R}(\nu) = \text{TF}[t \mapsto R(t)](\nu)$. La fonction de transfert d'un système linéaire est égale à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

On peut expérimentalement obtenir la fonction de transfert d'un circuit linéaire à l'aide d'un générateur d'impulsions et d'un analyseur de spectre.

[BOÎTE À OUTILS 4]

CHAMPS & OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

1. DÉFINITIONS ET OPÉRATIONS DE BASE

1.1 Définitions

Un **champ de scalaire** $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{V} \mathbb{R}$ (par exemple un champ de température) est une fonction du point M et de l'instant t :

$$(M, t) \mapsto V(M, t), \text{ soit, en coordonnées cartésiennes : } (x, y, z, t) \mapsto V(x, y, z, t)$$

Un **champ de vecteur** $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\vec{A}} \mathbb{R}^3$ (par exemple un champ de force) est une fonction du point M et de l'instant t :

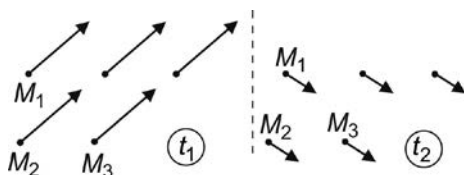
$$(M, t) \mapsto \vec{A}(M, t), \text{ soit, en coordonnées cartésiennes : } (x, y, z, t) \mapsto \vec{A}(x, y, z, t)$$

Ces champs peuvent n'être définis que dans un domaine restreint de l'espace.

Un champ est **uniforme** s'il est indépendant du point M . Par exemple, en coordonnées cartésiennes, on a pour un champ uniforme $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$ ou

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \vec{0}, \text{ avec } \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{pmatrix}, \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ \frac{\partial A_y}{\partial y} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

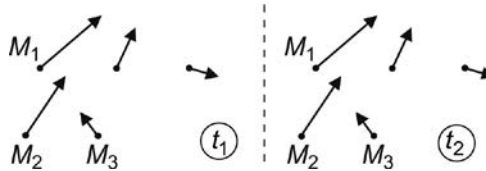
On peut représenter en quelques points un champ vectoriel uniforme à deux instants différents :



Un champ est **stationnaire** (ou *permanent*) s'il garde la même valeur en un point M donné au cours du temps, soit $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, ou $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$, avec en coordonnées car-

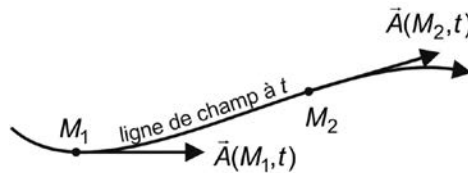
tésiennes :
$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ \frac{\partial A_y}{\partial t} \\ \frac{\partial A_z}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

On peut représenter en quelques points un champ vectoriel stationnaire à deux instants différents :

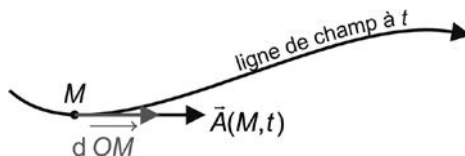


1.2 Lignes, tubes et cartes de champ pour un champ de vecteur

À un instant t fixé, une *ligne de champ* relie les points M tels que le champ $\vec{A}(M, t)$ soit *tangent* à la ligne. On l'oriente dans le sens du champ.



Si l'on note \overrightarrow{dOM} un déplacement élémentaire le long d'une ligne de champ, \overrightarrow{dOM} est colinéaire au point M à $\vec{A}(M, t)$, soit $\overrightarrow{dOM} \wedge \vec{A}(M, t) = \vec{0}$, ce qui fournit un *système d'équations différentielles* permettant de trouver l'équation d'une ligne de champ.



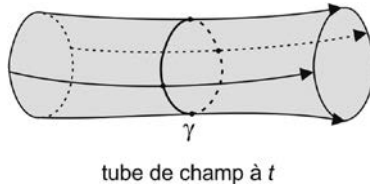
Par exemple pour un champ à deux dimensions en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x(x, y, t) \\ A_y(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_y(x, y, t)dx - A_x(x, y, t)dy = 0$$

Un ensemble de lignes de champ passant par un réseau de points donnés constitue une *carte de champ*.

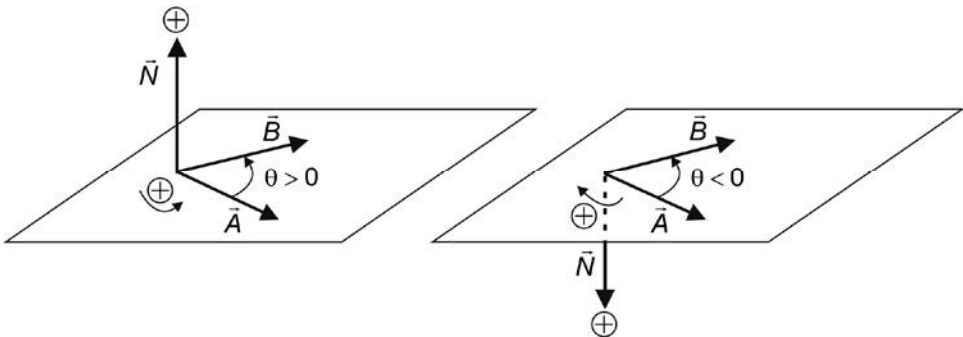


L'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé γ constitue un **tube de champ** (c'est donc une surface).



1.3 Opérations de base sur les vecteurs

Considérons deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} non colinéaires. On peut choisir deux orientations différentes pour un vecteur \vec{N} normal au plan vectoriel engendré par ces deux vecteurs. Lorsqu'on a choisi l'une des deux orientations, l'angle $\theta = (\vec{A}, \vec{B})$ est alors orienté selon la règle du tire-bouchon : $\theta > 0$ si un tire-bouchon se déplace dans le sens du vecteur \vec{N} quand on tourne de \vec{A} vers \vec{B} ; $\theta < 0$ si un tire-bouchon se déplace dans le sens du vecteur $-\vec{N}$ quand on tourne de \vec{A} vers \vec{B} .



— *Produit scalaire* dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

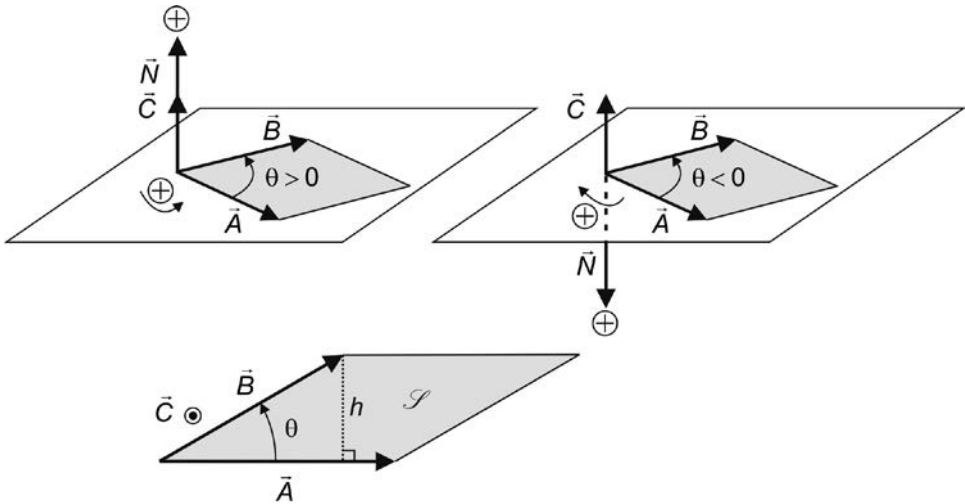
$$V = \vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\vec{A}, \vec{B}) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3.$$

— *Produit vectoriel* dans une base orthonormée *directe* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: \vec{e}_3 est orientée dans le sens de déplacement d'un tire-bouchon quand on tourne de \vec{e}_1 vers \vec{e}_2 .

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ A_3 B_1 - A_1 B_3 \\ A_1 B_2 - A_2 B_1 \end{pmatrix}.$$

\vec{C} est orthogonal à \vec{A} et à \vec{B} , tel que $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ soit direct, et en norme :

$$\|\vec{C}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot |\sin(\vec{A}, \vec{B})| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot |\sin \theta|.$$



La projection C de \vec{C} sur \vec{N} dépend de l'orientation choisie pour \vec{N} .

Comme l'aire \mathcal{S} du parallélogramme formé par \vec{A} et \vec{B} vaut $\mathcal{S} = \|\vec{A}\| \cdot h$ (base \times hauteur), on a aussi $\mathcal{S} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot |\sin \theta|$, donc :

La norme du produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est l'aire du parallélogramme formé par \vec{A} et \vec{B} .

— *Double produit vectoriel* : $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$ est orthogonal à $\vec{B} \wedge \vec{C}$. Il est donc dans le plan vectoriel généré par \vec{B} et \vec{C} , soit $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \beta \vec{B} + \gamma \vec{C}$.

On retient alors facilement la formule :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

— Un *produit mixte* $[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] \stackrel{\text{déf}}{=} (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$ est invariant par permutation circulaire :

$$[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B} = (\vec{B} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{A}.$$

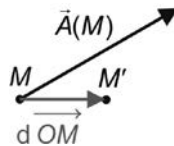
1.4 Circulation d'un champ de vecteur

On définit la circulation d'un champ de vecteur à un instant t si le champ n'est pas stationnaire.

On omettra le temps t dans $\vec{A}(M, t)$ pour ne pas alourdir les notations.

Considérons un déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ à partir du point M .

Par définition, la **circulation élémentaire** du champ de vecteur $\vec{A}(M)$ le long de ce déplacement élémentaire est le produit scalaire $\delta \mathcal{E} = \vec{A}(M) \cdot d\vec{OM}$



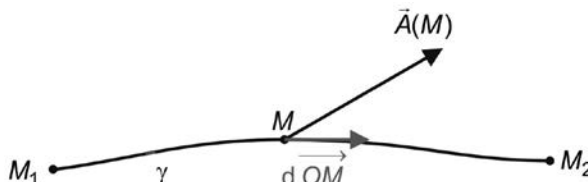
Attention ! ce n'est pas *a priori* une différentielle, c'est-à-dire la variation élémentaire d'une fonction du point f : $\delta \mathcal{E} \neq df = f(M') - f(M)$ avec $\vec{MM}' = d\vec{OM}$

Par exemple, le travail élémentaire d'une force $\vec{F}(M)$ s'exerçant sur un point matériel qui se déplace de $d\vec{OM}$ est une circulation : $\delta W = \vec{F}(M) \cdot d\vec{OM}$.

La circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour orienté γ allant de M_1 à M_2 est la somme des circulations élémentaires sur ce chemin :

$$\mathcal{E}_{M_1 \rightarrow M_2}^\gamma = \int_{M_1}^{M_2} \vec{A}(M) \cdot d\vec{OM}.$$

Elle dépend *a priori* du chemin γ choisi pour aller de M_1 à M_2 .



On a en conséquence $\mathcal{E}_{M_1 \rightarrow M_2}^\gamma = -\mathcal{E}_{M_2 \rightarrow M_1}^\gamma$

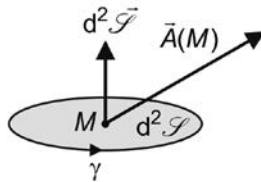
Si γ est fermé, on note $\mathcal{E}^\gamma = \oint_\gamma \vec{A}(M) \cdot d\vec{OM}$ la circulation *a priori* $\neq 0$.

1.5 Flux d'un champ de vecteur

On définit le flux d'un champ de vecteur à un instant t si le champ n'est pas stationnaire. On omettra de nouveau le temps t dans $\vec{A}(M, t)$ pour ne pas alourdir les notations.

Considérons une surface élémentaire $d^2\mathcal{S}$ autour d'un point M . Cette surface est limitée par un contour élémentaire fermé γ dont l'orientation détermine grâce à la règle du tire-bouchon celle du vecteur surface $d^2\vec{\mathcal{S}}$ (de norme $d^2\mathcal{S}$, orthogonal à l'élément de surface).

Le **flux élémentaire** du champ $\vec{A}(M)$ à travers $d^2\mathcal{S}$ est égale au produit scalaire $d^2\Phi = \vec{A}(M) \cdot d^2\vec{\mathcal{S}}$. Son signe dépend de l'orientation de $d^2\vec{\mathcal{S}}$.



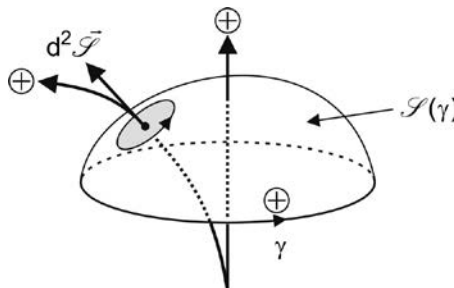
Le flux $\Phi_{\mathcal{S}}$ d'un champ de vecteur à travers une surface finie \mathcal{S} est défini de la façon suivante :

— Si la surface s'appuie sur un contour fermé γ orienté :

$$\Phi_{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}(\gamma)} \vec{A}(M) \cdot d^2\vec{\mathcal{S}}$$

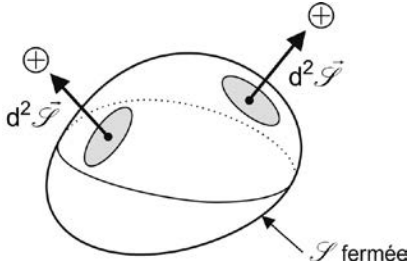
Ce flux dépend *a priori* de la surface \mathcal{S} choisie s'appuyant sur γ .

Comme la figure ci-après le montre, les vecteurs surface élémentaires sont orientés grâce à la règle du tire-bouchon dès que le contour γ l'est.



— Si la surface \mathcal{S} est fermée, tous les vecteurs surface élémentaires sont orientés par convention de l'intérieur vers l'extérieur, et l'on note :

$$\Phi_{\mathcal{S}} = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}(M) \cdot d^2\vec{\mathcal{S}}.$$



2. LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

2.1 Gradient

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

L'opérateur gradient noté $\vec{\text{grad}}$ est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de scalaire $V(M)$.

$\vec{\text{grad}}V \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur.

$$\vec{\text{grad}}V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ sur la base de coordonnées cartésiennes } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z).$$

Remarque : on introduit parfois l'opérateur « nabla » noté $\vec{\nabla}$ dont l'expression

en coordonnées cartésiennes est $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ si bien que $\vec{\text{grad}}V = \vec{\nabla}V$.

Définition intrinsèque

Lorsqu'on passe du point $M(x,y,z)$ au point $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ infiniment voisin, la fonction V varie de :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{OM}.$$

Cette relation fournit la définition *intrinsèque* (indépendante du système de

coordonnées choisi) de l'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$:

Lors d'un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$, V varie de dV , avec :

$$dV = \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Expression dans un système de coordonnées cylindriques

Puisque $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$, on a :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} r d\theta + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot d\overrightarrow{OM}. \text{ D'où :}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z).$$

Expression dans un système de coordonnées sphériques

Puisque $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$, on a :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} r d\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} r \sin\theta d\varphi = \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot d\overrightarrow{OM}.$$

D'où :

$$\overrightarrow{\text{grad}V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi).$$

Interprétation physique de l'opérateur gradient

$\|\overrightarrow{\text{grad}V}\|$ « mesure » les variations *spatiales* locales de V : plus V varie fortement au voisinage de M , plus $\|\overrightarrow{\text{grad}V}\|$ est grand.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}V}$ indique dans quelles direction et sens varie localement V .

2.2 Rotationnel

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

L'opérateur rotationnel noté $\overrightarrow{\text{rot}}$ est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de vecteur $\vec{A}(M)$.

$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur.

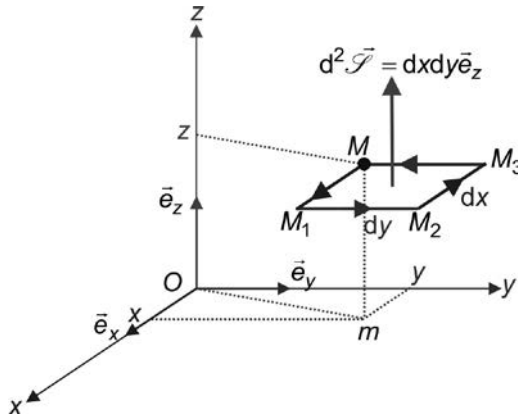
$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z).$$

Remarque : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$.

Définition intrinsèque

Pour donner une définition intrinsèque de $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$, on calcule la circulation élémentaire $\delta^2 \mathcal{C}$ de \vec{A} le long d'un contour fermé.

Ce contour étant élémentaire, peu importe sa forme : on choisit un rectangle de côtés dx et dy .



$$\delta^2 \mathcal{C} = \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{MM_1} + \vec{A}(M_1) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} + \vec{A}(M_2) \cdot \overrightarrow{M_2M_3} + \vec{A}(M_3) \cdot \overrightarrow{M_3M}. \text{ Or :}$$

$$\vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{MM_1} = \vec{A}(M_1) \cdot \overrightarrow{MM_1}, \text{ puisque } \overrightarrow{MM_1} = dx \vec{e}_x \text{ est déjà d'ordre 1 en } dx.$$

De même $\vec{A}(M_1) \cdot \vec{M_1M_2} = \vec{A}(M_2) \cdot \vec{M_1M_2}$. On a donc :

$$\delta^2 \mathcal{E} = [\vec{A}(M_1) - \vec{A}(M_2)] \cdot dx \vec{e}_x + [\vec{A}(M_2) - \vec{A}(M_3)] \cdot dy \vec{e}_y.$$

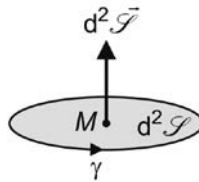
$$\delta^2 \mathcal{E} = \left[-\frac{\partial A_x}{\partial y} dy \right] dx + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} dx \right] dy = \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] dx dy, \text{ terme qui est d'ordre 2.}$$

$$\text{Finalement } \delta^2 \mathcal{E} = \left[\left(\vec{\text{rot}} \vec{A} \right) \cdot \vec{e}_z \right] dx dy = \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot dx dy \vec{e}_z = \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d^2 \vec{\mathcal{F}}.$$

Cette relation fournit la définition *intrinsèque* de l'opérateur $\vec{\text{rot}}$:

On considère un contour élémentaire orienté γ , au voisinage du point M , et $d^2 \vec{\mathcal{F}}$ le vecteur surface élémentaire d'une surface quelconque s'appuyant sur γ .

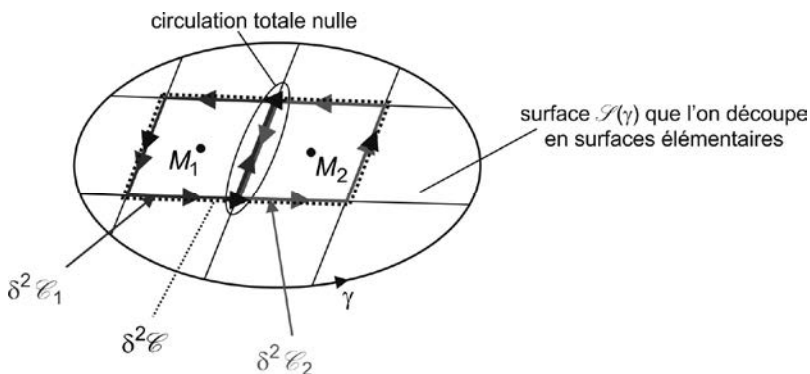
La circulation du champ vectoriel \vec{A} sur ce contour est $\delta^2 \mathcal{E} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d^2 \vec{\mathcal{F}}$.



Théorème de Stokes

On obtient la forme intégrale de cette relation, appelée théorème de Stokes, en découpant une surface quelconque \mathcal{S} , s'appuyant sur un contour fermé γ , en surfaces élémentaires.

On considère deux de ces surfaces élémentaires voisines (elles possèdent un bout de contour commun) autour de M_1 et M_2 :



Les contours élémentaires sur lesquels elles s'appuient sont orientés dans le même sens que γ , si bien que la circulation sur le segment commun est comptée avec

des signes opposés dans le calcul des circulations élémentaires $\delta^2\mathcal{C}_1$ et $\delta^2\mathcal{C}_2$.

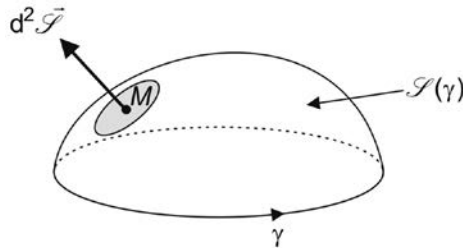
La circulation $\delta^2\mathcal{C}$ sur le contour qui entoure les deux surfaces élémentaires vaut donc :

$$\delta^2\mathcal{C} = \delta^2\mathcal{C}_1 + \delta^2\mathcal{C}_2 = (\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}})(M_1) \cdot d^2\vec{\mathcal{F}}_1 + (\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}})(M_2) \cdot d^2\vec{\mathcal{F}}_2.$$

En sommant les circulations sur tous les contours élémentaires, on obtient :

$$\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\overrightarrow{OM} = \iint_{\mathcal{S}(\gamma)} \overrightarrow{\text{rot } \vec{A}} \cdot d^2\vec{\mathcal{F}}. \text{ C'est le théorème de Stokes.}$$

La circulation du champ \vec{A} sur un contour fermé γ est égale au flux de $\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}}$ sur une surface quelconque $\mathcal{S}(\gamma)$ s'appuyant sur γ .



Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur rotationnel, on trouve, après calculs, les expressions de $\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} [rA_\theta] - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z).$$

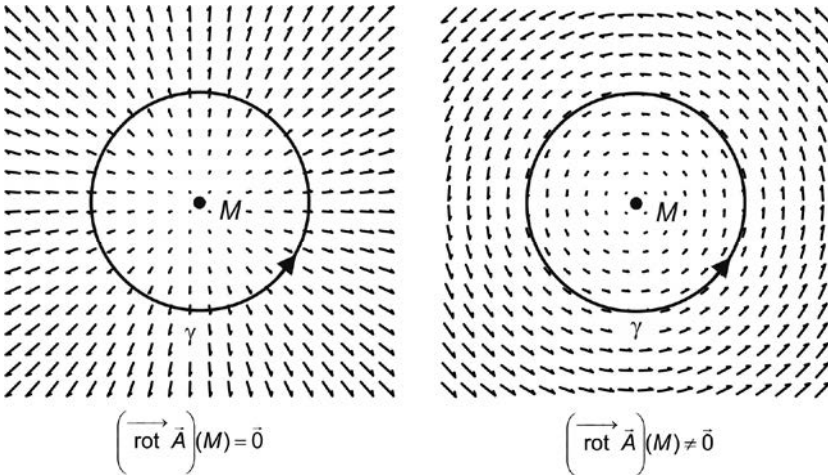
Expression dans un système de coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [A_\varphi \sin \theta] - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rA_\varphi] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} [rA_\theta] - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi).$$

Interprétation physique de l'opérateur rotationnel

De $\delta^2 \mathcal{C} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d^2 \mathcal{F}$, on déduit que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ permet de quantifier le caractère *tourbillonnaire* d'un champ vectoriel au voisinage d'un point M .

Prenons l'exemple d'un champ localement radial, $\delta^2 \mathcal{C} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{0}$, alors que pour un champ orthoradial $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \neq \vec{0}$.



2.3 Divergence

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

L'opérateur divergence noté div est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de vecteur $\vec{A}(M)$.

$\text{div} \vec{A} \in \mathbb{R}$ est un scalaire.

$$\text{div} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

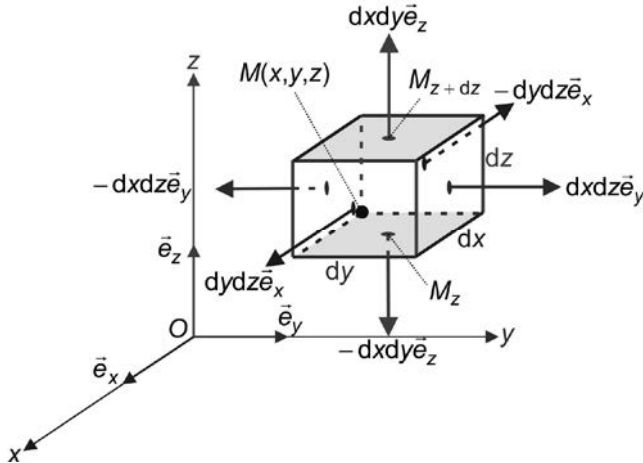
Remarque : $\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.

Définition intrinsèque

Pour donner une définition intrinsèque de $\text{div} \vec{A}$, on calcule le flux $d^3 \Phi$ de \vec{A} à

travers une surface fermée élémentaire entourant un volume $d^3\mathcal{V}$.

Ce volume étant élémentaire, peu importe sa forme : on choisit un parallélépipède de côtés dx , dy et dz . On a donc $d^3\mathcal{V} = dx dy dz$.



Considérons les flux $\vec{A}(M_{z+dz}) \cdot dx dy \vec{e}_z$ à travers la surface supérieure (qui se trouve dans le plan de cote $z + dz$) et $\vec{A}(M_z) \cdot (-dx dy \vec{e}_z)$ à travers la surface inférieure (qui se trouve dans le plan de cote z). Leur somme vaut $[A_z(M_{z+dz}) - A_z(M_z)] \cdot dx dy$.

Les surfaces $dx dy$ étant d'ordre 1 en dx et d'ordre 1 en dy , le calcul de cette somme donne $\frac{\partial A_z}{\partial z} dz \cdot dx dy$: elle est d'ordre 3.

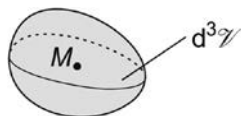
Le flux *total* vaut donc :

$$d^3\Phi = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} dx \right] \cdot dy dz + \left[\frac{\partial A_y}{\partial y} dy \right] \cdot dx dz + \left[\frac{\partial A_z}{\partial z} dz \right] \cdot dx dy = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] dx dy dz$$

Finalement $d^3\Phi = \text{div} \vec{A} d^3\mathcal{V}$

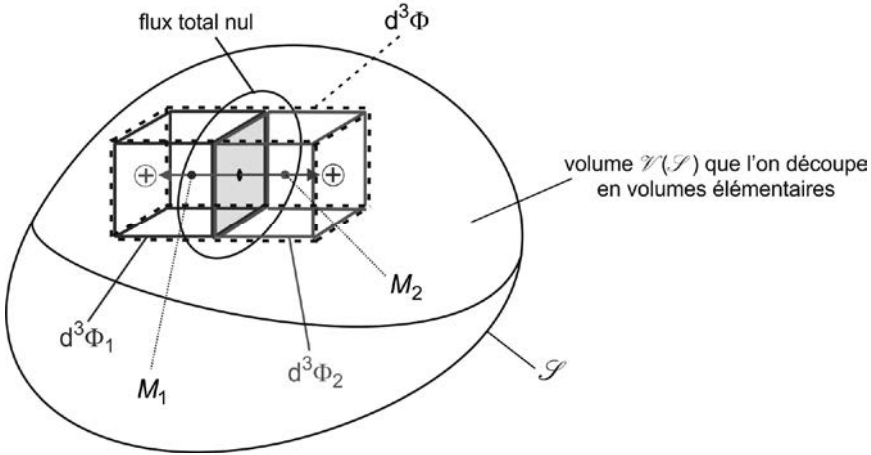
Cette relation fournit la définition *intrinsèque* de l'opérateur *div* :

On considère une surface élémentaire fermée entourant le point M . On note $d^3\mathcal{V}$ le volume élémentaire à l'intérieur de cette surface. Le flux $d^3\Phi$ d'un champ vectoriel \vec{A} à travers cette surface est $d^3\Phi = \text{div} \vec{A} d^3\mathcal{V}$.



Théorème de Green-Ostrogradski

On obtient la forme intégrale de cette relation, appelée théorème de Green-Ostrogradski, en découpant un volume \mathcal{V} à l'intérieur d'une surface fermée \mathcal{S} en volumes élémentaires.



On considère deux de ces volumes élémentaires voisins (ils possèdent une surface commune) autour de M_1 et M_2 . Les surfaces élémentaires entourant ces volumes sont orientées de l'intérieur vers l'extérieur, si bien que le flux à travers la surface commune est compté avec des signes opposés dans le calcul des flux élémentaires $d^3\Phi_1$ et $d^3\Phi_2$.

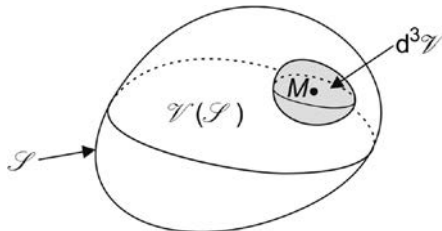
Le flux $d^3\Phi$ à travers la surface qui entoure les deux volumes élémentaires vaut donc :

$$d^3\Phi = d^3\Phi_1 + d^3\Phi_2 = (\operatorname{div}\vec{A})(M_1)d^3\mathcal{V}_1 + (\operatorname{div}\vec{A})(M_2)d^3\mathcal{V}_2$$

En sommant les flux à travers toutes les surfaces élémentaires, on obtient :

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} = \iiint_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} \operatorname{div}\vec{A} d^3\mathcal{V}. \text{ C'est le théorème de Green-Ostrogradski.}$$

Le flux du champ \vec{A} à travers une surface fermée \mathcal{S} est égal à l'intégrale de $\operatorname{div}\vec{A}$ sur le volume $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ à l'intérieur de \mathcal{S} .



Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur divergence, on trouve après

calculs les expressions de $\text{div}\vec{A}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rA_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Expression dans un système de coordonnées sphériques

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 A_r] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [A_\theta \sin \theta] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}.$$

Interprétation physique de l'opérateur divergence

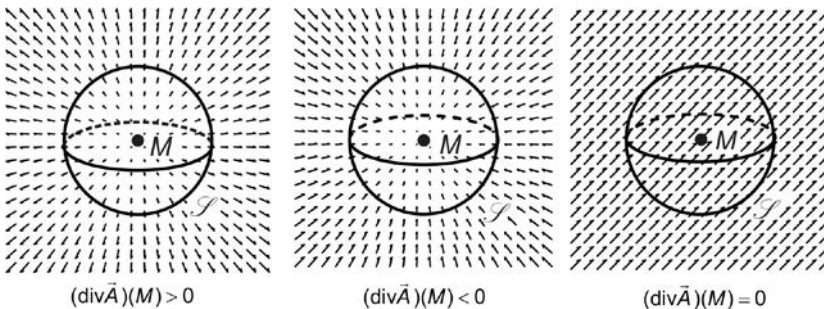
De $d^3\Phi = \text{div}\vec{A} d^3\mathcal{V}$, on déduit que $\text{div}\vec{A}$ permet de quantifier le caractère *divergent* d'un champ vectoriel au voisinage d'un point M .

Prenons l'exemple d'un champ localement radial et divergent :

$d^3\Phi > 0 \Rightarrow \text{div}\vec{A} > 0$, alors que pour un champ localement radial et convergent :

$\text{div}\vec{A} < 0$, et que pour un champ localement uniforme $\text{div}\vec{A} = 0$.

Par souci de lisibilité, le champ n'est représenté que dans un plan passant par M .



2.4 Laplacien scalaire

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

L'opérateur laplacien scalaire noté Δ est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de scalaire $V(M)$.

$\Delta V \in \mathbb{R}$ est un scalaire.

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Définition intrinsèque

On a $\Delta V = \operatorname{div} \left[\overrightarrow{\operatorname{grad} V} \right]$, relation qui constitue la définition *intrinsèque* du laplacien de V .

Remarque : $\Delta V = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V)$.

Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur laplacien scalaire, on trouve les expressions de ΔV dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial V}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \text{ ou } \Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Expression dans un système de coordonnées sphériques

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

$$\text{On a aussi } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] = \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rV]$$

2.5 Laplacien vectoriel

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

L'opérateur laplacien vectoriel noté Δ ou $\vec{\Delta}$ est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de vecteur $\vec{A}(M)$.

$\Delta \vec{A} \in \mathbb{R}^3$ est un *vecteur*.

$$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z).$$

Remarque : on peut trouver également la notation $\vec{\Delta} \vec{A}$, plus explicite quant au caractère vectoriel du résultat obtenu, mais moins utilisée.

Définition intrinsèque

On en déduit après calcul la définition intrinsèque :

$$\Delta \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div} \vec{A}] - \overrightarrow{\text{rot}} \left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right].$$

Cette relation permet de trouver l'expression de $\Delta \vec{A}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques et sphériques

Attention ! Sauf dans un système de coordonnées cartésiennes, les composantes du laplacien vectoriel ne sont pas égales au laplacien scalaire des composantes de \vec{A} :

$$\Delta \vec{A} \neq \begin{pmatrix} \Delta A_r \\ \Delta A_\theta \\ \Delta A_z \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z) \text{ et } \Delta \vec{A} \neq \begin{pmatrix} \Delta A_r \\ \Delta A_\theta \\ \Delta A_\varphi \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi).$$

L'expression la plus générale est lourde et très rarement utilisée. En revanche on calcule plus facilement $\Delta \vec{A}$ dans des cas particuliers.

Par exemple en coordonnées sphériques, si $\vec{A} = A_\varphi(r, \theta) \vec{e}_\varphi$:

$$\Delta \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div} \vec{A}] - \overrightarrow{\text{rot}} \left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right], \text{ avec ici } \text{div} \vec{A} = 0 \text{ et :}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [A_\varphi \sin \theta] \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r A_\varphi] \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_r(r, \theta) \\ a_\theta(r, \theta) \\ a_\varphi = 0 \end{pmatrix}. \text{ Alors :}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left[-\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} [r a_\theta] - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r A_\varphi] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [A_\varphi \sin \theta] \right] \end{pmatrix}.$$

Finalement, dans ce cas, on a :

$$\Delta \vec{A} = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r A_\varphi] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [A_\varphi \sin \theta] \right] \right\} \vec{e}_\varphi.$$

2.6 Formules utiles

Les formules intrinsèques suivantes peuvent par exemple être démontrées en coordonnées cartésiennes.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left[\overrightarrow{\text{grad}} V \right] = \vec{0}.$$

$$\text{div} \left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right] = 0.$$

$$\text{div}(V\vec{A}) = V \text{div} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{A}.$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(V\vec{A}) = V \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \wedge \vec{A}.$$

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}.$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right] = \overrightarrow{\text{grad}} [\text{div} \vec{A}] - \Delta \vec{A} \quad (\text{définition intrinsèque du laplacien vectoriel}).$$

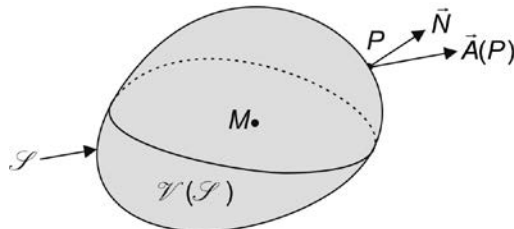
Deux théorèmes intégraux dérivés respectivement des théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradski peuvent être démontrés en utilisant les formules ci-dessus :

$$\oint_{\gamma} V \cdot d\vec{OM} = \iint_{\mathcal{S}(\gamma)} d^2 \vec{\mathcal{F}} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} V.$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} V \cdot d^2 \vec{\mathcal{F}} = \iiint_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d^3 \mathcal{V}.$$

2.7 Théorème de Helmholtz (complément hors-programme)

Ce théorème (hors-programme) assure l'*unicité* d'un champ de vecteur dont on connaît le *rotationnel* et la *divergence* pour tout point M d'un volume \mathcal{V} contenu dans une surface fermée \mathcal{S} , à condition que l'on connaisse les *conditions aux limites* : $\vec{A}(P) \cdot \vec{N}$ en tout point P de \mathcal{S} , où \vec{N} est la normale extérieure à \mathcal{S} en P .



Pour un champ de *scalaire*, le théorème de Helmholtz assure l'*unicité* de $V(M)$ dont on connaît le *laplacien* en tout point M de \mathcal{V} , à condition que l'on connaisse les *conditions aux limites* : $V(P)$ ou $\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{N}$ en tout point de \mathcal{S} .

Ces théorèmes d'unicité fonctionnent également quand le volume \mathcal{V} est infini, à condition de connaître les conditions aux limites en l'infini.

En revanche, il n'y pas unicité quand les conditions aux limites portent sur un domaine doublement connexe (comme un tore, ou un cylindre infini).

3. CHAMPS PARTICULIERS

3.1 Champ à circulation conservative

Définition et propriétés

Les propositions suivantes sont équivalentes :

Un champ de vecteur \vec{A} est à circulation conservative.

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{M_1 \rightarrow M_2}^\gamma = \int_{M_1}^{M_2} \vec{A}(M) \cdot d\vec{OM} \text{ est indépendante du chemin } \gamma \text{ suivi entre } M_1 \text{ et } M_2.$$

M_2 .

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}^\gamma = \oint_\gamma \vec{A}(M) \cdot d\vec{OM} = 0 \text{ sur tout contour fermé } \gamma.$$

$$\Leftrightarrow \exists V(M) / \delta \mathcal{E} = -dV \Leftrightarrow \vec{A} = -\vec{\text{grad}}V ; V(M) \text{ est appelé potentiel scalaire.}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{0} \text{ en tout point.}$$

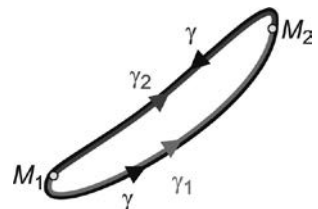
Les démonstrations de ces équivalences ne sont pas au programme. Nous allons nous limiter à démontrer quelques implications :

— Supposons $\mathcal{E}_{M_1 \rightarrow M_2}^\gamma$ indépendant du chemin suivi γ (d'où la dénomination : « champ \vec{A} à circulation conservative »).

Considérons un contour fermé γ quelconque et deux points distincts M_1 et M_2 sur ce contour. En suivant γ on a alors deux chemins différents γ_1 et γ_2 permettant d'aller de M_1 à M_2 . D'après notre hypothèse :

$$\mathcal{E}_{M_1 \rightarrow M_2}^{\gamma_1} = \mathcal{E}_{M_1 \rightarrow M_2}^{\gamma_2}.$$

Avec l'orientation de γ précisée sur le schéma ci-contre, on a :



$$\mathcal{E}^\gamma = \mathcal{E}_{M_1 \rightarrow M_2}^{\gamma_1} - \mathcal{E}_{M_1 \rightarrow M_2}^{\gamma_2} = 0, \text{ ce qui montre bien que } \mathcal{E}^\gamma = \oint_\gamma \vec{A}(M) \cdot d\vec{OM} = 0 \text{ pour tout}$$

contour fermé.

— Supposons de nouveau que $\mathcal{E}_{M_1 \rightarrow M_2}^\gamma$ est indépendant du chemin suivi γ . Ceci signifie que la circulation entre M_1 et M_2 ne dépend que de ces deux points, donc qu'il existe une fonction V du point M telle que $\mathcal{E}_{M_1 \rightarrow M_2}^\gamma = V(M_1) - V(M_2)$, soit :

$$\delta \mathcal{E} = \vec{A} \cdot d\vec{OM} = -dV \text{ pour une circulation entre deux points infiniment proches.}$$

Comme on a aussi $dV = \vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{OM}$, on en déduit :

$\vec{A} \cdot d\vec{OM} = -\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{OM}$ pour tout déplacement élémentaire $d\vec{OM}$, ce qui n'est possible que si $\vec{A} = -\vec{\text{grad}}V$.

— Supposons $\mathcal{E}^\gamma = \oint_\gamma \vec{A}(M) \cdot d\vec{OM} = 0$ sur tout contour fermé. Le théorème de Stokes

implique alors que $\oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{OM} = \iint_{\mathcal{S}(\gamma)} \text{rot } \vec{A} \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} = 0$ quelle que soit la surface \mathcal{S} s'appuyant sur γ , ce qui n'est possible que si $\text{rot } \vec{A} = \vec{0}$ en tout point.

Une conséquence fondamentale de ces équivalences est la suivante : quel que soit le champ scalaire $V(M)$, le champ $\vec{A} = -\vec{\text{grad}}V$ est à circulation conservative, donc son rotationnel est nul en tout point.

$$\text{On démontre ainsi l'identité } \text{rot} \left[\vec{\text{grad}}V \right] = \vec{0}.$$

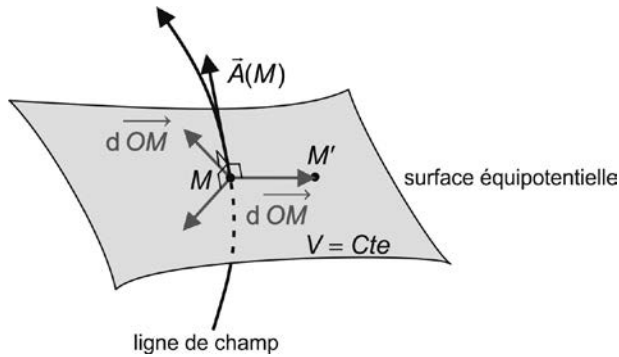
Surfaces équipotentielles et autres propriétés

L'ensemble des points M vérifiant $V(M) = Cte$ forme une surface appelée surface équipotentielle

Nous allons établir deux propriétés supplémentaires d'un champ à circulation conservative.

Les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles.

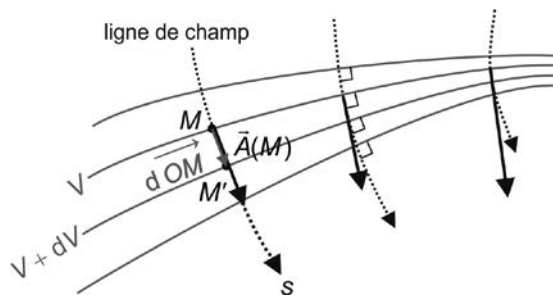
Démontrons ce résultat. Soit M un point de la surface équipotentielle \mathcal{S} et M' un autre point de \mathcal{S} , infiniment proche de M : \vec{MM}' est tangent à \mathcal{S} .



Entre M et M' , la variation de potentiel $dV = -\vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{MM'} = -\vec{A}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$ est nulle : $\vec{A}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} = 0$, quel que soit $d\overrightarrow{OM}$ tangent à \mathcal{S} en M . On en conclut que $\vec{A}(M)$ est orthogonal au plan tangent à \mathcal{S} en M : la ligne de champ passant par M est bien orthogonale au plan tangent à \mathcal{S} en M .

Les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels V décroissants. En conséquence, les lignes d'un champ à circulation conservative ne peuvent pas être fermées.

Considérons pour démontrer ce résultat une ligne de champ quelconque. On repère un point M le long de cette ligne, orientée dans le sens du champ \vec{A} , grâce à son abscisse curviligne s qui est la distance parcourue *le long de la ligne* entre un point O et le point M .



Entre M et un point M' sur la même ligne de champ, infiniment proche de M , le potentiel passe de V à $V + dV$, avec $dV = -\vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{MM'} = -\vec{A}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{A}(M)$. Supposons le dans le même sens : la distance algébrique $ds = MM'$ le long de la ligne de champ est positive.

On a donc $dV = -\|\vec{A}(M)\| \cdot ds < 0$: le potentiel décroît bien le long d'une ligne de champ.

D'autre part, $\|\vec{A}(M)\| = \left| \frac{dV}{ds} \right|$:

Un champ à circulation conservative est intense là où les équipotentielles sont resserrées.

3.2 Champ à flux conservatif

Définition et propriétés

Les propositions suivantes sont équivalentes :

Un champ de vecteur \vec{B} est à flux conservatif.

$\Leftrightarrow \Phi_{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}(\gamma)} \vec{B}(M) \cdot d^2\vec{\mathcal{S}}$ est indépendante de la surface qui s'appuie sur γ .

$\Leftrightarrow \Phi_{\mathcal{S}} = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{B}(M) \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} = 0$ à travers toute surface fermée \mathcal{S} .

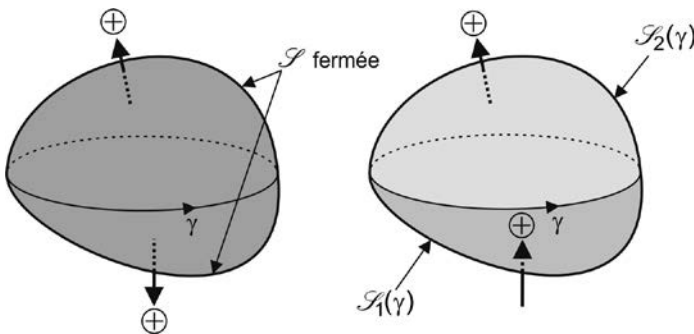
$\Leftrightarrow \exists \vec{A}(M) / \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$; $\vec{A}(M)$ est appelé potentiel vecteur.

$\Leftrightarrow \text{div} \vec{B} = \vec{0}$ en tout point.

Les démonstrations de ces équivalences ne sont pas au programme. Nous allons nous limiter à démontrer quelques implications :

— Supposons que $\Phi_{\mathcal{S}}$ ne dépend pas de la surface \mathcal{S} qui s'appuie sur un contour fermé γ indépendant du chemin suivi γ , mais seulement de γ .

Considérons une surface fermée \mathcal{S} quelconque et un contour fermé γ orienté, tracé sur cette surface. Sur ce contour s'appuient deux surfaces distinctes \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 dont \mathcal{S} est la réunion.



Les vecteurs surface élémentaires de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont orientés en accord avec l'orientation de γ en suivant la règle du tire-bouchon. On a d'après notre hypothèse $\Phi_{\mathcal{S}_1} = \Phi_{\mathcal{S}_2}$.

En revanche, les vecteurs surface élémentaires de \mathcal{S} sont orientés de l'intérieur vers l'extérieur.

Avec l'orientation de γ précisée sur le schéma ci-avant, on a :

$\Phi_{\mathcal{S}} = \Phi_{\mathcal{S}_2} - \Phi_{\mathcal{S}_1} = 0$, ce qui montre bien que $\Phi_{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B}(M) \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} = 0$ à travers toute surface fermée.

— Supposons qu'il existe un champ de vecteur $\vec{A}(M)$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$. On a alors d'après le théorème de Stokes :

$\iint_{\mathcal{S}(\gamma)} \vec{B} \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}(\gamma)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} = \oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\overrightarrow{OM}$: le flux de \vec{B} à travers une surface \mathcal{S} s'appuyant sur un contour fermé γ ne dépend pas de \mathcal{S} mais seulement de γ .

— Supposons que $\Phi_{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B}(M) \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} = 0$ à travers toute surface fermée. Le théorème de Green-Ostrogradski implique alors que :

$\Phi_{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} = \iiint_{\mathcal{V}(\mathcal{S})} \text{div} \vec{B} \, d^3\mathcal{V} = 0$ dans tout volume \mathcal{V} limité par une surface fermée, ce qui n'est possible que si $\text{div} \vec{B} = \vec{0}$ en tout point.

Une conséquence fondamentale de ces équivalences est la suivante : quel que soit le champ $\vec{A}(M)$, le champ $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ est à flux conservatif, donc sa divergence est nulle en tout point.

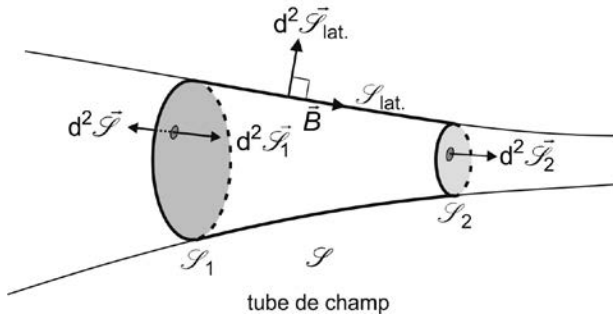
On démontre ainsi l'identité $\text{div} \left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right] = 0$.

Tubes de champ et autres propriétés

Le flux de \vec{B} se conserve le long d'un tube de champ, d'où la dénomination « le champ \vec{B} est à flux conservatif ».

Démontrons cette propriété.

\vec{B} étant à flux conservatif, le flux de \vec{B} à travers la surface \mathcal{S} fermée, réunion de deux sections \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 d'un tube de champ et de la surface latérale du tube entre ces deux sections, est nul.



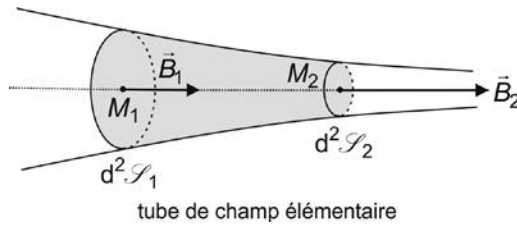
\vec{B} étant par définition tangent au tube, $\vec{B} \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}}_{\text{lat}} = 0$ sur la surface latérale donc son flux à travers la surface latérale est nul.

Les vecteurs surface élémentaires de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont orientés dans le sens du champ \vec{B} alors que les vecteurs surface élémentaires de \mathcal{S} sont orientés de l'intérieur vers l'extérieur. On a donc bien avec l'orientation de γ précisée sur le schéma ci-dessus : $\Phi_{\mathcal{S}} = \Phi_{\mathcal{S}_2} - \Phi_{\mathcal{S}_1} + \underbrace{\Phi_{\mathcal{S}_{\text{lat}}}}_0 = 0 \Rightarrow \Phi_{\mathcal{S}_2} = \Phi_{\mathcal{S}_1}$

Considérons maintenant un tube de champ *élémentaire* qui entoure une ligne de champ entre deux points M_1 et M_2 . Les sections droites $d^2 \mathcal{S}_1$ et $d^2 \mathcal{S}_2$ de ces tubes passant par M_1 et M_2 sont infiniment petites.

La conservation du flux de \vec{B} le long de ce tube de champ implique que : $\vec{B}_1 \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}}_1 = \vec{B}_2 \cdot d^2 \vec{\mathcal{S}}_2$ or \vec{B} et $d^2 \vec{\mathcal{S}}$ sont colinéaires pour un tube de champ élémentaire : $\|\vec{B}_1\| \cdot d^2 \mathcal{S}_1 = \|\vec{B}_2\| \cdot d^2 \mathcal{S}_2$.

On en déduit que si $d^2 \mathcal{S}_2 < d^2 \mathcal{S}_1$ alors $\|\vec{B}_2\| > \|\vec{B}_1\|$

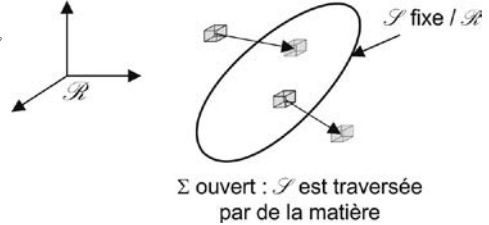


Un champ à flux conservatif est intense là où les lignes de champ sont resserrées.

4. BILAN LOCAL D'UNE GRANDEUR EXTENSIVE x

4.1 Bilan global

Le système étudié Σ se trouve dans le volume \mathcal{V} à l'intérieur d'une surface \mathcal{S} fermée (au sens géométrique : elle entoure un volume intérieur), fixe par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} .



Si de la matière traverse \mathcal{S} , ce dernier est un système *ouvert* (au sens physique : il échange de la matière avec le milieu extérieur).

On peut effectuer des bilans de n'importe quelle grandeur *extensive* x pour Σ , par exemple un bilan de masse, de quantité de mouvement, d'énergie, d'entropie...

Entre deux instants t_1 et $t_2 > t_1$, cette grandeur varie de $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$.

On distingue deux causes de variation pour x : l'*échange* avec le milieu extérieur, et la *production* de la grandeur x au sein de Σ :

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x^r + x^p.$$

Entre t_1 et t_2 , x^r est la grandeur reçue de la part du milieu extérieur, et x^p la grandeur produite. x^r et x^p sont algébriques (x^r est positif si la grandeur est effectivement reçue par Σ , négatif si la grandeur est cédée au milieu extérieur ; x^p est positif si la grandeur est produite, négatif si elle est détruite) et dépendent de la transformation suivie entre t_1 et t_2 (la notation Δx^r , Δx^p est proscrite), alors qu'il suffit de connaître l'état de Σ à t_1 et t_2 pour calculer $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$.

Dans le cas d'une transformation *élémentaire* entre deux instants *infinitement proches* t et $t + dt$, le bilan s'écrit :

$$dx = x(t + dt) - x(t) = \delta x^r + \delta x^p \text{ (la notation } dx^r, dx^p \text{ est proscrite).}$$

dx est une différentielle. δx^r et δx^p sont des formes différentielles ; elles dépendent du chemin suivi.

En notant $\rho_x = \frac{d^3x}{d^3\mathcal{V}}$ la densité volumique de la grandeur x , on a :

— à la date t : $x(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \rho_x(M, t) d^3\mathcal{V}$

— à $t + dt$: $x(t + dt) = \iiint_{M \in \mathcal{V}'} \rho_x(M, t + dt) d^3\mathcal{V}'$, soit une variation pendant une durée infinitésimale dt :

$$dx = x(t + dt) - x(t) = \left[\iiint_{M \in \mathcal{V}'} \frac{\partial \rho_x}{\partial t} d^3\mathcal{V}' \right] dt .$$

4.2 Grandeur reçue

La grandeur *reçue* pendant dt à travers un élément de surface $d^2\mathcal{S}$ autour d'un point P de la surface \mathcal{S} s'écrit $\delta^3 x^r = \vec{J}_x(P, t) \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} \cdot dt$.

$\vec{J}_x(P, t)$ est le vecteur *densité volumique de courants* de la grandeur x .

En effet :

— La grandeur reçue est proportionnelle à la durée dt de l'échange.

Par exemple, si à un instant donné, une section d'un fleuve est traversée par 300 m^3 d'eau en une seconde, cette même section sera traversée par 600 m^3 d'eau en 2 s. Si la densité de courants $\vec{J}_x(P, t)$ n'est pas stationnaire, la relation de proportionnalité entre la grandeur échangée et la durée n'est rigoureuse que pendant une durée infinitésimale dt (cela reste une bonne approximation dans notre exemple pendant une durée de deux secondes, petite devant la durée caractéristique des variations de débit).

— La grandeur reçue est proportionnelle à la surface d'échange $d^2\mathcal{S}$.

Dans l'exemple précédent, si 1000 m^3 d'eau traversent une surface de 1 m^2 autour d'un point P en une heure, ce sera le triple pour une surface de 3 m^2 autour du même point pendant la même durée. Si la densité de courants $\vec{J}_x(P, t)$ n'est pas uniforme, la relation de proportionnalité entre la grandeur échangée et la surface n'est rigoureuse que pour une surface infinitésimale $d^2\mathcal{S}$ (cela reste une bonne approximation dans notre exemple pour une surface de 3 m^2 si la vitesse du fleuve varie peu d'un point à l'autre de cette surface).

— $\delta^3 x^r$ est proportionnelle au *produit scalaire* $\vec{J}_x(P, t) \cdot d^2\vec{\mathcal{S}}$. Par exemple, si la densité volumique de courants est tangente à la surface d'échange $d^2\mathcal{S}$, on a :

$\vec{J}_x \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} = 0$. La surface $d^2\mathcal{S}$ n'est pas traversée par la grandeur x .

Dans le cas général, on obtient δx^r reçu pendant dt en *sommant* sur \mathcal{S} :

$$\delta x^r = - \left[\iint_{P \in \mathcal{F}} \vec{J}_x \cdot d^2 \vec{\mathcal{F}} \right] dt.$$

Le signe « - » provient de l'orientation des vecteurs surface élémentaires de l'intérieur vers l'extérieur. Par exemple, si $\vec{J}_x \cdot d^2 \vec{\mathcal{F}} > 0$, le système Σ perd localement la grandeur x .

On peut donner une autre forme à cette expression en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski : $\delta x^r = - \left[\iiint_{M \in \mathcal{V}} \text{div} \vec{J}_x d^3 \mathcal{V} \right] dt$.

4.3 Grandeur produite

La grandeur *produite* $\delta^4 x^p$ pendant dt dans un élément de volume $d^3 \mathcal{V}$ autour d'un point M du volume \mathcal{V} s'écrit $\delta^4 x^p = \sigma_x(M, t) \cdot d^3 \mathcal{V} \cdot dt$.

$\sigma_x(M, t)$ est le *taux* (c'est-à-dire par unité de temps) de production *volumique* de la grandeur extensive x .

En effet :

— la grandeur produite est proportionnelle à la durée dt de la production et au volume $d^3 \mathcal{V}$.

Par exemple, si à un moment donné, $5 \cdot 10^{12}$ neutrons sont produits en une seconde dans 1 cm^3 de réacteur nucléaire autour du point M , le double sera produit en 2 s dans le même volume. Si le taux de production volumique $\sigma_x(M, t)$ n'est pas stationnaire, la relation de proportionnalité entre la grandeur produite et la durée n'est rigoureuse que pendant une durée infinitésimale dt .

— la grandeur produite est proportionnelle au volume $d^3 \mathcal{V}$.

Dans l'exemple précédent, 10^{13} neutrons de fission seront produits dans un volume de 2 cm^3 autour de M . Si $\sigma_x(M, t)$ n'est pas uniforme, la relation de proportionnalité entre la grandeur échangée et le volume n'est rigoureuse que pour un volume infinitésimal $d^3 \mathcal{V}$, et l'on obtient la quantité δx^p produite pendant dt par *sommation* sur le volume \mathcal{V} :

$$\delta x^p = \left[\iiint_{M \in \mathcal{V}} \sigma_x d^3 \mathcal{V} \right] dt.$$

4.4 Bilan local

Le bilan global (pour un volume fini) $dx = \delta x^f + \delta x^p$ se traduit finalement par :

$$\iiint_{M \in \mathcal{V}'} \left[\frac{\partial \rho_x}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_x - \sigma_x \right] d^3 \mathcal{V}' = 0 .$$

Si le bilan de la grandeur x est effectué sur le système de volume $d^3 \mathcal{V}'$ autour du point M , il devient un bilan local $\left[\frac{\partial \rho_x}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_x - \sigma_x \right] d^3 \mathcal{V}' = 0$, soit :

$$\frac{\partial \rho_x}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_x = \sigma_x , \text{ bilan local de la grandeur extensive } x .$$

La détermination d'un champ de température dans un solide, celle d'un champ de pression et de vitesse dans un fluide, passent entre autres par l'écriture de bilans locaux d'énergie interne, de masse, etc.

GRANDEURS PHYSIQUES : DIMENSIONS & UNITÉS

1. UNITÉS ET SYSTÈME INTERNATIONAL D'UNITÉS (SI)

1.1 Grandeur mesurable

Une grandeur physique qui caractérise un objet ou un phénomène étant définie, elle sera *mesurable* si l'on sait lui appliquer les opérations élémentaires : addition, soustraction, rapport, multiplication et division par un nombre réel.

Certaines grandeurs comme le temps, une énergie potentielle, sont *repérables* (une origine étant choisie) mais non mesurables.

En revanche, une durée, une énergie reçue, une énergie cinétique sont mesurables car indépendantes du choix arbitraire d'une origine.

1.2 Unités

Pour faire correspondre une valeur numérique à une grandeur X , on choisit arbitrairement une grandeur unité X_u de même espèce.

La valeur numérique de X est alors égale à $x = \frac{X}{X_u}$.

Par exemple, si un phénomène périodique possède une période T_0 , toute durée peut s'exprimer sous la forme $\tau = \lambda T_0$. Si l'on choisit de prendre cette période comme durée unité, la valeur numérique de la durée τ est égale au réel λ .

Plus généralement si X_1 et X_2 sont deux grandeurs de même dimension :

$$x_1 = \frac{X_1}{X_u}, \quad x_2 = \frac{X_2}{X_u} \quad \text{d'où} \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{X_2}{X_1}.$$

Le rapport de deux grandeurs de même espèce est indépendant de l'unité choisie pour exprimer ces deux grandeurs.

Attention : ce n'est pas vrai lorsque deux unités différentes d'une même grandeur ne sont pas proportionnelles.

Par exemple, une température n'est pas directement mesurable en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$) alors qu'elle l'est en kelvin (K).

Dans le calcul d'un rapport de températures, il faut obligatoirement exprimer les températures en kelvin. Ce rapport prend une valeur numérique différente, privée de sens physique, avec des températures en °C.

On rappelle que si T est la température en K et θ en °C, on a $\theta = T - 273,15$.

1.3 Choix des unités / Système international (SI)

Les problèmes liés à l'existence de systèmes d'unités propres à chaque pays, voire à chaque région, ont conduit à l'adoption d'un système international d'unités simplifiant les échanges scientifiques (et commerciaux ...) et les communications.

Il existe sept unités de base, indépendantes, les autres s'en déduisent par des relations entre les grandeurs correspondantes.

Unité de temps : la seconde (s). Symbole dimensionnel : T
Unité de longueur : le mètre (m). Symbole dimensionnel : L
Unité de masse : le kilogramme (kg). Symbole dimensionnel : M
Unité d'intensité de courant électrique : l'ampère (A). Symbole dimensionnel : I
Unité de température thermodynamique : le kelvin (K). Symbole dimensionnel : Θ
Unité de quantité de matière : la mole (mol). Symbole dimensionnel : N
Unité d'intensité lumineuse : la candela (cd). Symbole dimensionnel : J

Ces unités sont définies en fixant la valeur numérique de certaines constantes fondamentales :

<p>La fréquence de transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, $\Delta\nu_{\text{Cs}}$, est égale à 9 192 631 770 Hz.</p> <p>La seconde est donc définie comme la durée pendant laquelle il y a exactement 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à cette transition.</p>
<p>La vitesse c de la lumière dans le vide est égale à 299 792 458 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.</p> <p>Le mètre est donc défini comme la longueur du trajet que parcourt la lumière dans le vide pendant une durée de 1/299 792 458 s.</p>
<p>La constante de Planck h est égale à $h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.</p> <p>Comme $1 \text{ J} \cdot \text{s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, le kilogramme est donc défini en fixant la valeur de h.</p>
<p>La charge élémentaire e est égale à $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.</p> <p>Comme $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$, l'ampère est donc défini en fixant la valeur de e.</p>
<p>La constante de Boltzmann k_B est égale à $k_B = 1,380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.</p> <p>Comme $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, le kelvin est défini en fixant la valeur de k_B.</p>
<p>La constante d'Avogadro \mathcal{N}_A est égale à $\mathcal{N}_A = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.</p> <p>La mole est donc définie en fixant la valeur de \mathcal{N}_A.</p>

La **candela** est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12}$ Hz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de $\frac{1}{683}$ watt par stéradian.

Le stéradian est l'unité d'angle solide (c'est l'équivalent dans l'espace d'un angle dans le plan). *L'intensité lumineuse caractérise la sensation visuelle humaine.* Cette dernière est maximale pour une longueur d'onde de 555 nm (soit une fréquence de l'onde électromagnétique de 540 THz). Deux objets lumineux ponctuels émettant la même puissance et regardés sous le même angle solide, mais à des longueurs d'onde différentes, ne correspondent pas à la même intensité lumineuse.

La dernière modification des définitions des unités fondamentales est entrée en vigueur le 20 mai 2019.

À chaque changement correspond une précision accrue : le critère retenu dans le choix des unités de base est celui de l'exactitude maximale avec laquelle une unité peut être réalisée expérimentalement.

Par exemple, pour définir une unité de temps, il faut une horloge (système évoluant périodiquement). La seconde était avant 1960 définie comme la fraction $1/86\,164\,090\,55$ de la durée de la rotation propre de la Terre. Or, la Terre tournant de moins en moins vite autour de son axe de rotation, il a fallu trouver une meilleure horloge. C'est le cas des horloges atomiques permettant la nouvelle définition et dont on peut penser que la période est une vraie période (invariable dans le temps). Des résultats d'observations sont alors utilisables en tout temps.

Il est à noter que l'utilisateur courant ne doit pas être perturbé par le changement : la « taille » de l'unité reste la même.

La définition du mètre revient à fixer la vitesse de la lumière dans le vide à $299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La définition initiale de 1798 posait $1 \text{ km} =$ longueur d'un méridien terrestre / 40000 (actuellement cette longueur vaut 40008,08 km).

La nouvelle définition du kilogramme obéit à la même logique.

L'ancienne définition était la suivante : « le kilogramme est la masse de l'étalon prototype en platine iridié à 10% réalisé en 1889 sous la forme d'un cylindre dont le diamètre est égal à la hauteur ». Cette définition manquait d'universalité (l'étalon était conservé à Sèvres) et surtout de constance dans le temps (la masse de l'étalon variait dans le temps).

La nouvelle définition permet, grâce à des expériences menées avec une balance de Kibble (ou balance de Watt), de mesurer des masses avec une meilleure précision que celle obtenue par comparaison avec l'étalon. Cette expérience a permis de mesurer la constante de Planck avec une incertitude relative de $5,7 \cdot 10^{-8}$.

2. DIMENSIONS

2.1 Homogénéité

Toute grandeur peut s'exprimer en fonction des grandeurs de base

En mécanique par exemple, toute grandeur s'exprimera en fonction d'un temps T , d'une longueur L et d'une masse M .

La norme d'une force est d'après $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$ le produit d'une masse et d'une longueur et de l'inverse d'un temps au carré et ceci indépendamment du système d'unités dans lequel on l'exprime : on dit qu'une force est homogène à $M \cdot L \cdot T^{-2}$ ou bien on écrit $[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$, où $[F]$ est la dimension de F . Dans le système international d'unités (SI), l'unité de F est le newton (N), unité dérivée valant $1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

On ne peut faire la somme (ou la différence) de deux termes que s'ils ont même dimension, on ne peut appliquer les fonctions sinus, cosinus, tangente, logarithme, exponentielle, etc., qu'à une grandeur sans dimension.

Ces règles permettent de vérifier l'homogénéité d'une formule (une formule non homogène est incorrecte, la réciproque est bien entendu fausse).

Prenons quelques exemples :

— Équation différentielle dans un circuit électrique : $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{(RC)^2} = 0$.

RC étant homogène à un temps, l'équation est homogène car tous les termes de la somme sont homogènes à une tension divisée par un temps au carré :

$$\left[\frac{d^2u}{dt^2} \right] = \left[\frac{1}{RC} \frac{du}{dt} \right] = \left[\frac{u}{(RC)^2} \right] = \frac{[u]}{T^2}$$

Il n'est pas nécessaire de revenir aux grandeurs de base pour vérifier l'homogénéité

— Équation différentielle du pendule pesant : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$.

Comme $[g] = L \cdot T^{-2}$ et $[\ell] = L$, l'équation est homogène car tous les termes de la somme sont homogènes à T^{-2} (un angle est par définition un rapport entre deux longueurs donc c'est une grandeur sans dimension).

— Pression de l'atmosphère de température uniforme : $p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$ où M est la masse molaire de l'air.

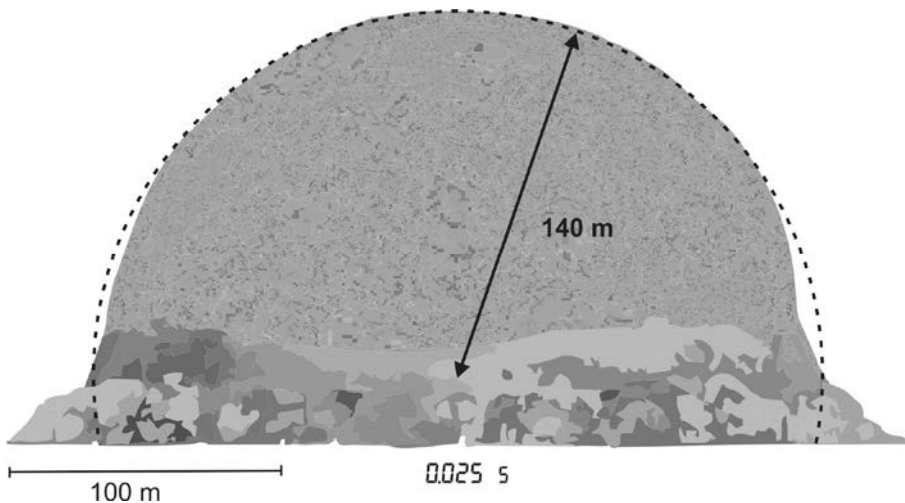
Mgz est homogène à une énergie par mole puisque mgz est une énergie potentielle de pesanteur : $[Mgz] = \frac{[E]}{N}$. Le terme RT est également homogène à une énergie par mole. En effet, d'après la loi des gaz parfaits, $\left[\frac{pV}{n}\right] = [RT]$, or une pression est par définition homogène à une force divisée par une surface, soit $[p] = \frac{[F]}{L^2}$ d'où $[\rho V] = [F]L = [E]$.

Le terme $-\frac{Mgz}{RT}$ est bien sans dimension, on peut prendre son exponentielle (également sans dimension) et on a donc de part et d'autre de l'égalité deux termes homogènes à une pression.

2.2 Équation aux dimensions

Explosion atomique

Le physicien G.I. Taylor estima correctement l'ordre de grandeur de l'énergie dégagée par la première explosion atomique le 16 juillet 1945 dans le désert du Nouveau-Mexique, simplement à l'aide d'une photo de cette explosion (ci-dessous). La valeur officielle ($8,4 \cdot 10^{13}$ J) était pourtant maintenue top-secret...



Il exploita le **théorème de Vaschy-Buckingham, ou théorème II** (hors-programme) que nous exposons ici :

N grandeurs physiques (g_1, \dots, g_N) font intervenir d dimensions de base (D_1, \dots, D_d). Par exemple, pour des problèmes de mécanique, $d = 3$ (temps T , longueur L , masse M).

Les dimensions de ces grandeurs sont de la forme $[g_j] = D_1^{\alpha_{j1}} \cdot D_2^{\alpha_{j2}} \cdot \dots \cdot D_d^{\alpha_{jd}}$ où les coefficients α_{ij} sont des rationnels.

On cherche à former des nombres sans dimensions à partir de (g_1, \dots, g_N) : ces nombres sont de la forme $N_k^* = g_1^{\beta_{k1}} g_2^{\beta_{k2}} \cdot \dots \cdot g_i^{\beta_{ki}} \cdot \dots \cdot g_N^{\beta_{kN}}$ avec $\beta_{ki} \in \mathbb{Q}$.

On a alors $[N_k^*] = (D_1^{\alpha_{11}} \cdot D_2^{\alpha_{12}} \cdot \dots \cdot D_d^{\alpha_{1d}})^{\beta_{k1}} \cdot \dots \cdot (D_1^{\alpha_{N1}} \cdot D_2^{\alpha_{N2}} \cdot \dots \cdot D_d^{\alpha_{Nd}})^{\beta_{kN}} = 1$ puisque N_k^* est sans dimension.

Les β_{ki} sont donc solution du système linéaire de d équations et p inconnues :

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot \beta_{k1} + \dots + \alpha_{N1} \cdot \beta_{kN} = 0 \\ \dots \\ \alpha_{1d} \cdot \beta_{k1} + \dots + \alpha_{Nd} \cdot \beta_{kN} = 0 \end{cases}$$

Si ces équations sont indépendantes (c'est le cas le plus souvent), on peut former $p = N - d$ (le nombre de grandeurs moins le nombre de dimensions) nombres sans dimension indépendants à partir de (g_1, \dots, g_N) .

Il peut cependant arriver que les équations régissant les β_{ki} ne soient pas in-

dépendantes. Si r est le rang de la matrice $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{N1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1d} & \alpha_{2d} & \dots & \alpha_{Nd} \end{pmatrix}$, on n'a que r di-

mensions indépendantes et le nombre de paramètres sans dimension qu'on peut former à partir de (g_1, \dots, g_N) est $p = N - r$.

Soient N grandeurs physiques (g_1, \dots, g_N) faisant intervenir r dimensions indépendantes. On peut former $p = N - r$ nombres N_k^* sans dimension à partir de ces grandeurs. Ces nombres sont de la forme $N_k^* = g_1^{\beta_{k1}} g_2^{\beta_{k2}} \cdot \dots \cdot g_i^{\beta_{ki}} \cdot \dots \cdot g_N^{\beta_{kN}}$ avec $\beta_{ki} \in \mathbb{Q}$.

Si ces grandeurs sont liées par une relation $f(g_1, \dots, g_N) = 0$, les N_k^* sont liés par une relation $F(N_1^*, \dots, N_p^*) = 0$.

C'est le théorème de Vashy-Buckingham.

Revenons à l'explosion atomique.

L'explosion commence à $t = 0$. Taylor identifia (c'est le point délicat !) les grandeurs physiques dont dépend le rayon R du nuage à la date t : l'énergie E dégagée quasi-instantanément, la date t , la masse volumique ρ de l'air extérieur.

Ces 4 grandeurs font intervenir 3 dimensions (M, L et T), et sont liées par $f(R, E, t, \rho) = 0$. On peut donc *a priori* ne peut former qu'un nombre N_1^* sans dimension $N_1^* = E^\alpha t^\beta \rho^\gamma R^\delta$ à partir de ces 4 grandeurs, soit :

$$(M \cdot L^2 \cdot T^{-2})^\alpha T^\beta (M \cdot L^{-3})^\gamma L^\delta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 3\gamma + \delta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\alpha \\ \beta = 2\alpha \\ \delta = -5\alpha \end{cases}, \text{ la valeur de } \alpha \text{ étant}$$

quelconque.

On en déduit $E t^2 \rho^{-1} R^{-5} = N_1^* \frac{1}{\alpha} = Cte$: N_1^* est une constante numérique puisqu'il est solution d'une équation $F(N_1^*) = 0$. D'où $R(t) = K \left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}} \propto t^{\frac{2}{5}}$.

D'après la photo, G.I Taylor estima la valeur du rayon $R = 140$ m au bout de $t = 0,025$ s et pris $\rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Il supposa que, les grandeurs caractéristiques étant bien identifiées, la constante numérique K était de l'ordre de 1, si bien que l'énergie dégagée était de l'ordre de $E \approx \frac{\rho R^5}{t^2} \approx 8,6 \cdot 10^{13}$ J.

Célérité d'une onde transversale le long d'une corde vibrante

Prenons un autre exemple. La célérité de l'onde le long d'une corde dépend de sa tension T_0 et de sa masse linéique μ : on a une relation $f(c, T_0, \mu) = 0$. Ces 3 grandeurs font intervenir 3 dimensions (M, L et T).

Cherchons à former des nombres sans dimension à partir de ces grandeurs : $N_k^* = c^\alpha T_0^\beta \mu^\gamma$. On en déduit :

$$(L \cdot T^{-1})^\alpha (M \cdot L \cdot T^{-2})^\beta (M \cdot L^{-1})^\gamma = 1 \Rightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 0 & (1) \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 & (2) \\ -\alpha - 2\beta = 0 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 0 & (1) \\ \alpha + 2\beta = 0 & (1) + (2) \\ \alpha + 2\beta = 0 & (3) \end{cases}$$

On n'a ici que $r = 2$ dimensions indépendantes : on peut par exemple fixer la valeur de α et on a alors : $\begin{cases} \beta = -\frac{\alpha}{2} \\ \gamma = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$.

On peut former $p = N - r = 3 - 2 = 1$ nombre sans dimension. Ce nombre N_1^* est une constante numérique puisqu'il est solution d'une équation $F(N_1^*) = 0$.

$$N_1^* = \left[c \sqrt{\frac{\mu}{T_0}} \right]^\alpha = Cte \Leftrightarrow c = N_1^* \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = K \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

La constante numérique sans dimension K vaut 1, mais on ne peut pas le montrer à partir de l'analyse dimensionnelle.

En conclusion, si une analyse physique a su dégager les grandeurs intervenant dans un problème donné, il est possible, *sans étude théorique* et donc sans mise en équation du problème, de trouver la relation entre ces grandeurs (c'est le cas quand on ne peut former qu'*un seul* nombre sans dimension comme dans les exemples précédents), ou du moins de réduire l'étude expérimentale à l'établissement de la relation entre quelques nombres sans dimension : $F(N_1^*, \dots, N_p^*) = 0$.

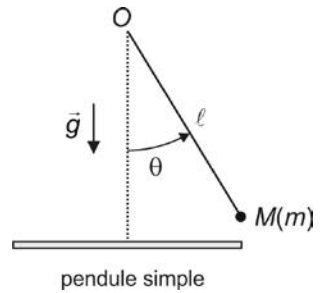
2.3 Intérêt de l'adimensionnalisation / facteur d'échelle ©

Pendule simple

Un point matériel de masse m est attaché à l'extrémité M d'une tige rigide de masse négligeable, de longueur ℓ , dont l'autre extrémité O est fixe dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen.

On note g l'intensité du champ de pesanteur et θ l'angle que fait le fil avec la verticale.

Le pendule est lâché sans vitesse initiale dans la position $\theta = \theta_0 \leq \pi$: il oscille alors autour de la position d'équilibre $\theta = 0$.



On obtient en appliquant dans \mathcal{R} par exemple le P.F.D au point matériel l'équation du mouvement : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$.

Dans l'approximation linéaire $\sin\theta = \theta$, valable aux petits angles, l'équation différentielle peut s'écrire $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$. C'est celle d'un oscillateur harmonique de pé-

riode $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ indépendante des conditions initiales.

Lorsque cette approximation n'est plus vérifiée, la formule précédente n'est plus valable, et on ne sait pas résoudre l'équation différentielle non linéaire qui régit le mouvement du pendule.

Comment varie alors la période du pendule ?

Soit τ une durée *quelconque*. Posons $t^* = \frac{t}{\tau}$. t^* est un temps réduit (sans dimension), et effectuons le changement de variable $t \rightarrow t^*$.

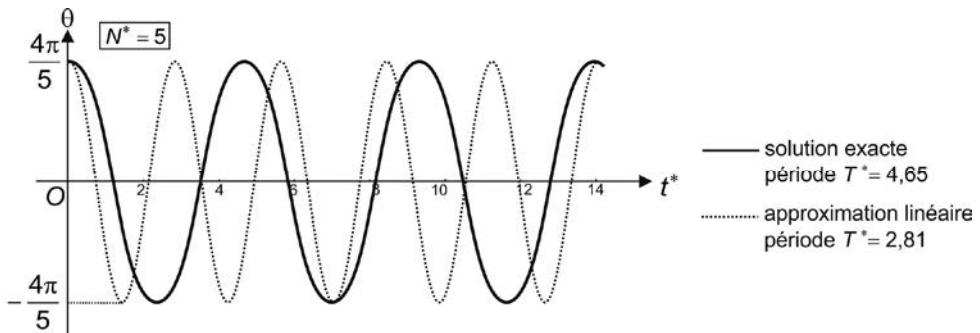
On obtient $\frac{1}{\tau^2} \frac{d^2\theta}{dt^{*2}} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$, soit $\frac{d^2\theta}{dt^{*2}} + \frac{g}{\ell} \tau^2 \sin\theta = 0$, ou :

$$\frac{d^2\theta}{dt^{*2}} + N^* \sin\theta = 0 (*), \text{ avec } N^* = \frac{g}{\ell} \tau^2 \text{ nombre sans dimension.}$$

Comme l'angle θ est sans dimension, l'équation (*) est adimensionnée.

Pour $N^* = \frac{g}{\ell} \tau^2$ fixé, par exemple $N^* = 5$, on peut résoudre numériquement l'équation adimensionnée (non linéaire) avec par exemple les conditions initiales (C.I.) :

$$\theta(t^* = 0) = \frac{4\pi}{5} \text{ et } \frac{d\theta}{dt^*}(t^* = 0) = 0. \text{ La solution est tracée ci-dessous :}$$



Dans l'approximation linéaire, l'équation différentielle adimensionnée devient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^{*2}} + N^* \theta = 0. \text{ Compte tenu des C.I, elle admet une solution analytique :}$$

$$\theta = \theta_0 \cos(\sqrt{N^*} \cdot t^*).$$

La période réduite $T_0^* = \frac{2\pi}{\sqrt{N^*}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2,81$ diffère beaucoup de la période réduite réelle $T^* = 4,65$ car, pour $\theta_0 = \frac{4\pi}{5}$, l'approximation des petits angles n'est pas du tout vérifiée.

Étudions maintenant le mouvement de deux pendules de longueurs différentes, lâchés tous deux sans vitesse initiale dans la position $\theta_0 = \frac{4\pi}{5}$, en prenant $N^* = 5$.

Il suffit pour tracer la courbe donnant $\theta(t)$ d'effectuer le changement de variable $t^* \rightarrow t = t^* \cdot \tau = t^* \sqrt{\frac{N^* \ell}{g}}$, pour passer de l'échelle de temps réduite à l'échelle de temps réelle.

On parle de *similitude*. Ici, il s'agit de dilater ou de contracter la courbe selon l'axe des temps.

Par exemple, pour $\ell = 1,00 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $N^* = 5$, on a $t = 0,714 \cdot t^*$. On en déduit la période $T = 3,32 \text{ s}$ des oscillations, très différente de la période $T_0 = 2,01 \text{ s}$ des oscillations dans l'approximation des petits angles.

Pour le second pendule de longueur différente, on peut procéder de même. La valeur de N^* est sans importance (la changer revient à modifier la définition du temps τ), du moment que c'est la même pour tous les pendules.

On en tire une conséquence fondamentale : la période des oscillations s'écrit

$$T = T^* \sqrt{\frac{N^* \ell}{g}} = K \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Elle est proportionnelle à $\sqrt{\ell}$: lâché dans les mêmes conditions, un pendule de longueur $\ell = 2,00 \text{ m}$ aura une période $\sqrt{2}$ fois plus grande que celle du pendule de $1,00 \text{ m}$.

Ce résultat n'est valable que si les C.I sont les mêmes pour les deux pendules, car K dépend des C.I (par exemple, pour un même pendule lâché sans vitesse initiale, la période augmente avec θ_0 , contrairement au cas des petits angles pour lequel la période $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ est indépendante des C.I).

Diffusion thermique

Prenons maintenant l'exemple de l'équation $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$ de diffusion thermique à une dimension : la température $T(x, t)$ ne varie que selon l'abscisse x et le temps t . Le coefficient a est appelé diffusivité thermique.

On peut à l'aide de grandeurs caractéristiques du problème : amplitude T_0 des variations de température, longueur L , durée τ , définir des grandeurs sans dimension :

$$T^* = \frac{T}{T_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{\tau}.$$

En effectuant les changements de variables $T \rightarrow T^*$, $x \rightarrow x^*$ et $t \rightarrow t^*$, on obtient $\frac{T_0}{L^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{a} \frac{T_0}{\tau} \frac{\partial T^*}{\partial t^*}$, soit :

$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} = \frac{L^2}{a\tau} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = N^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*}$ (*), qui est l'équation adimensionnée, avec $N^* = \frac{L^2}{a\tau}$ nombre sans dimension.

Dans notre exemple, pour N^* fixé, notons $T^*_{N^*}(x^*, t^*)$ la solution de (*) correspondant à certaines conditions initiales (T^* connu à $t^* = 0$) et certaines conditions aux limites (par exemple T^* connu à tout instant sur les frontières du domaine des valeurs de x^*).

La solution recherchée est $T(x, t) = T^*_{N^*}\left(\frac{x}{L}, \frac{aN^*}{L^2}t\right) \cdot T_0$ puisqu'il suffit pour obtenir la solution du problème de multiplier T^* par T_0 , x^* par L et t^* par $\tau = \frac{L^2}{aN^*}$, c'est-à-dire d'appliquer des facteurs d'échelle.

Pour une longueur L fixée, on peut définir la durée caractéristique de la diffusion par $N^* = 1$: on a alors $\tau = \frac{L^2}{a}$.

Supposons un problème défini par :

- Une équation différentielle aux dérivées partielles régissant une grandeur $g(x, y, z, t)$ et contenant des paramètres (ρ_1, \dots, ρ_N) .
- Des conditions initiales.
- Des conditions aux limites.

On peut adimensionner l'équation différentielle en faisant intervenir des grandeurs caractéristiques (G_0 pour g , longueur L , temps τ) :

$$\text{On pose } g^* = \frac{g}{G_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad z^* = \frac{z}{L}, \quad t^* = \frac{t}{\tau} \quad (\text{grandeurs réduites}).$$

L'équation sans dimension régissant $g^*(x^*, y^*, z^*, t^*)$ fait alors intervenir des nombres sans dimension (N_1^*, \dots, N_p^*) qui sont fonction de $\rho_1, \dots, \rho_N, G_0, L$ et τ .

Les solutions du problème correspondant à la même géométrie réduite, les mêmes conditions initiales réduites, les mêmes conditions aux limites réduites, et à la même valeur des nombres sans dimension, se déduisent toutes de la solution de l'équation adimensionnée, en appliquant des facteurs d'échelle.

Les lois d'échelle (ou de similitude) étant connues, on peut expérimenter sur un modèle réduit et avec d'autres matériaux, en en déduire les grandeurs en situation réelle.

Dans le cas le plus général, plusieurs grandeurs physiques sont couplées par des systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles, mais la technique reste la même.

D'autre part, la recherche d'une solution numérique est largement facilitée par une adimensionnalisation préalable des équations.

Équation de Navier-Stokes

L'analyse dimensionnelle est particulièrement utile en mécanique des fluides car les équations qui régissent le champ de vitesse $\vec{v}(M,t)$ et de pression $p(M,t)$ d'un écoulement fluide, même incompressible, admettent rarement des solutions analytiques.

Ces équations sont :

— $\text{div} \vec{v} = 0$, qui traduit l'incompressibilité du fluide.

— $\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = -\rho g \vec{e}_z - \text{grad} p + \eta \Delta \vec{v}$, qui est le P.F.D appliqué à une particule

fluide de masse volumique ρ et de viscosité η (équation de Navier-Stokes). L'axe Oz est vertical ascendant.

Introduisons une longueur caractéristique L , une fréquence caractéristique f (ou une durée caractéristique τ), une vitesse caractéristique u , et une variation de pression caractéristique Δp .

On pose $x^* = \frac{x}{L}$, $y^* = \frac{y}{L}$, $z^* = \frac{z}{L}$, $t^* = f \cdot t$, $\vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{u}$ et $p^* = \frac{p}{\Delta p}$.

Notons $\overset{\longrightarrow}{\text{grad}}^*$ l'opérateur $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^*} \\ \frac{\partial}{\partial y^*} \\ \frac{\partial}{\partial z^*} \end{pmatrix}$, div^* l'opérateur $\frac{\partial A_x}{\partial x^*} + \frac{\partial A_y}{\partial y^*} + \frac{\partial A_z}{\partial z^*}$, et enfin

Δ^* l'opérateur $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \end{pmatrix}$.

Effectuons le changement de variables $x \rightarrow x^*$, $y \rightarrow y^*$, $z \rightarrow z^*$, $t \rightarrow t^*$, $\vec{v} \rightarrow \vec{v}^*$ et $p \rightarrow p^*$. On obtient :

— $\text{div}^* \vec{v}^* = 0$, qui ne fait intervenir aucun nombre sans dimension ;

— $\rho \left[fu \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \frac{u^2}{L} (\vec{v}^* \cdot \overset{\longrightarrow}{\text{grad}}^*) \vec{v}^* \right] = -\rho g \vec{e}_z - \frac{\Delta p}{L} \overset{\longrightarrow}{\text{grad}}^* p^* + \frac{\eta u}{L^2} \Delta^* \vec{v}^*$, soit :

$$\left[\frac{fL}{u} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^* \cdot \text{grad}^*) \vec{v}^* \right] = -\frac{gL}{u^2} \vec{e}_z - \frac{\Delta p}{\rho u^2} \text{grad}^* p^* + \frac{\eta}{\rho Lu} \Delta^* \vec{v}^* .$$

On peut finalement écrire l'équation de Navier-Stokes sous la forme :

$$\left[St \cdot \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^* \cdot \text{grad}^*) \vec{v}^* \right] = -\frac{1}{Fr^2} \vec{e}_z - Eu \cdot \text{grad}^* p^* + \frac{1}{Re} \Delta^* \vec{v}^* .$$

Cette équation fait intervenir 4 nombres sans dimension :

- Le nombre de Strouhal $St = \frac{fL}{u}$.
- Le nombre de Froude $Fr = \frac{u}{\sqrt{gL}}$.
- Le nombre d'Euler $Eu = \frac{\Delta p}{\rho u^2}$.
- Le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho Lu}{\eta}$.

Là encore, tous les écoulements correspondant à la même géométrie réduite, aux mêmes conditions aux limites réduites, aux mêmes conditions initiales réduites, et aux mêmes valeurs données de ces 4 nombres, se déduisent de la résolution numérique des équations adimensionnées (par la méthode des éléments finis quand c'est un écoulement à 3D).

D'autre part, selon les valeurs numériques des nombres sans dimension, on peut négliger certains termes devant d'autres. Par exemple :

— Pour St suffisamment petit, on peut négliger $St \cdot \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*}$ devant les autres termes :

l'écoulement est quasi-stationnaire.

— Pour Eu suffisamment petit, c'est le terme $-Eu \cdot \text{grad}^* p^*$ que l'on peut négliger : les variations de pression sont négligeables dans l'écoulement.

— Pour Fr suffisamment grand, on peut négliger le terme $-\frac{1}{Fr^2} \vec{e}_z$: la gravitation n'influe pas sur l'écoulement.

— Pour Re suffisamment grand, on peut négliger le terme visqueux $\frac{1}{Re} \Delta^* \vec{v}^*$: l'écoulement est celui d'un fluide parfait.

2.4 Simplification des équations par comparaison des ordres de grandeur

Ordres de grandeur numériques

On peut négliger, dans une équation, certains termes devant d'autres, en comparant leurs valeurs numériques. Par exemple, faut-il tenir compte de l'attraction lunaire pour étudier la chute d'un corps à la surface de la Terre ?

Le P.F.D appliqué à un point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre fournit : $m\vec{a} = m[\vec{g}_T(M) + \vec{g}_L(M)]$.

Comparons la norme du champ de gravitation lunaire $\|\vec{g}_L(M)\| = \frac{GM_L}{r_L^2}$ à celle du champ de gravitation terrestre $\|\vec{g}_T(M)\| = \frac{GM_T}{r_T^2}$, où r_L et r_T sont les distances du point

M respectivement au centre de la Lune et au centre de la Terre, et G la constante de gravitation. On peut pour cela former le rapport des deux normes, qui est un nombre sans dimension $N^* = \frac{\|\vec{g}_L\|}{\|\vec{g}_T\|} = \frac{M_L}{M_T} \cdot \frac{r_T^2}{r_L^2}$.

La distance r_L varie selon la position de M : est-il du côté de la Lune ? du côté opposé ? On peut s'affranchir de cette connaissance, car dans tous les cas, r_L reste de l'ordre de la distance Terre-Lune, soit 400 000 km.

L'ordre de grandeur numérique d'une grandeur physique est exprimé sous la forme d'un entier compris entre 1 et 9 (souvent 1), multiplié par une puissance de 10.

Par exemple :

- l'ordre de grandeur du rayon de la Terre est $6 \cdot 10^3$ km, mais on peut aussi dire qu'il est de l'ordre de $1 \cdot 10^3$ km ;
- l'ordre de grandeur de la masse d'un être humain est $1 \cdot 10^2$ kg ;
- l'ordre de grandeur de la conductivité électrique d'un métal est 10^7 S · m⁻¹.

Moins la grandeur est définie précisément (matériau, conditions expérimentales...), plus les variations sont fortes autour de l'ordre de grandeur (par exemple pour les métaux purs, la conductivité électrique varie de 1 à 88).

Quant à r_T , il est de l'ordre de grandeur du rayon de la Terre : 6 000 km. Les masses valent $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg et $M_L = 7 \cdot 10^{22}$ kg.

On en déduit que N^* est de l'ordre de $3 \cdot 10^{-6}$: l'attraction lunaire est négligeable devant l'attraction terrestre pour un objet à la surface de la Terre.

De façon générale, quand on raisonne par ordre de grandeur, il faut, pour négliger un terme devant un autre, que le rapport entre ces deux termes soit suffisamment petit ou suffisamment grand.

Ordres de grandeur littéraux

Lorsqu'un problème est régi par des équations différentielles, il devient plus difficile de comparer numériquement des termes homogènes entre eux car ces derniers varient dans le temps et dans l'espace.

On donne alors des ordres de grandeurs cette fois-ci littéraux (à l'aide de lettres) et non plus numériques de ces termes. Les lettres qui interviennent sont des grandeurs caractéristiques du système.

La notation « O » signifie « de l'ordre de ».

Dans l'exemple précédent, si D est la distance Terre-Lune, le champ de gravitation lunaire en un point de la Terre est de l'ordre de grandeur de $\frac{GM_L}{D^2}$, ce que l'on

peut noter $\|\bar{g}_L(M)\| = O\left(\frac{GM_L}{D^2}\right)$, ou $\bar{g}_L(M) = O\left(\frac{GM_L}{D^2}\right)$.

Prenons l'exemple d'une équation locale de diffusion thermique : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$.

La température subit des fluctuations temporelles et spatiales. Introduisons une différence de température ΔT caractéristique (pour les variations spatiales et temporelles), une longueur caractéristique L et un temps caractéristique τ .

Par analyse dimensionnelle, on obtient $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = A \cdot \frac{\Delta T}{L^2}$ et $\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = B \cdot \frac{1}{a} \frac{\Delta T}{\tau}$.

A et B sont deux grandeurs sans dimension, dont la valeur numérique est de l'ordre de 1 si les grandeurs caractéristiques sont bien choisies, ce que l'on note :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = O\left(\frac{\Delta T}{L^2}\right), \text{ et } \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = O\left(\frac{1}{a} \frac{\Delta T}{\tau}\right).$$

L'équation $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$ entraîne donc que $\tau = O\left(\frac{L^2}{a}\right)$. Pour une longueur caractéristique donnée, $\frac{L^2}{a}$ est la durée caractéristique de la diffusion thermique. Pour un temps caractéristique donné, $\sqrt{a\tau}$ est la longueur caractéristique de la diffusion thermique.

Par exemple, considérons un cylindre calorifugé d'axe Ox et de longueur L , dont initialement la moitié gauche est à la température T_1 , et la moitié droite à la température $T_2 < T_1$. En régime transitoire, $T(x,t)$ évolue jusqu'à ce qu'elle devienne uniforme et stationnaire. La longueur caractéristique est ici la longueur L du cylindre (mais on aurait aussi pu prendre $L/2$). La différence de température caractéristique est quant à elle $\Delta T = T_1 - T_2$.

Simplifications

Reprenons l'exemple de l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = -\rho g \vec{e}_z - \text{grad} p + \eta \Delta \vec{v}$$

Si l'on introduit une longueur caractéristique L et une vitesse caractéristique u , on peut par exemple comparer les ordres de grandeur des termes suivants :

$$\rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = O\left(\frac{\rho u^2}{L}\right), \text{ et } \eta \Delta \vec{v} = O\left(\frac{\eta u}{L^2}\right).$$

Le rapport des ordres de grandeur de ces termes est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds Re : $Re = \frac{\rho L u}{\eta}$.

Ainsi, dans un écoulement pour lequel $Re \gg 1$, on peut négliger le terme $\eta \Delta \vec{v}$ devant $\rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$, c'est-à-dire considérer que le fluide est parfait (sans viscosité).

Ce raisonnement par ordre de grandeur a bien sûr ses limites, car il introduit des grandeurs caractéristiques *globales* (ici définies pour tout l'écoulement). Une analyse plus fine montre que pour un fluide s'écoulant autour d'un obstacle, la vitesse du fluide devient très faible près des parois solides (elle s'annule sur les parois). Même si $Re \gg 1$, on ne peut pas négliger le terme $\eta \Delta \vec{v}$ dans cette zone appelée couche limite.

D'autre part, les grandeurs caractéristiques peuvent être délicates à estimer. Pour l'écoulement autour d'une sphère de rayon R dont la vitesse u est uniforme loin de la sphère, on sait que la viscosité peut être négligée que si le nombre de Reynolds $Re = \frac{2\rho R u}{\eta}$ est suffisamment grand, et on peut penser que $Re = 10$ convient. L'expérience montre que Re doit être *vraiment* très grand (supérieur à 2000).

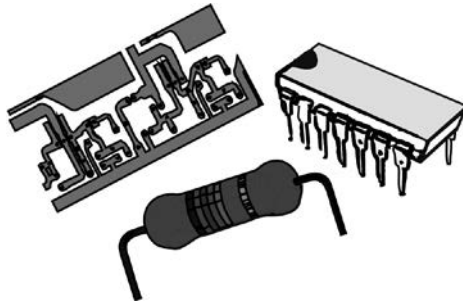
Enfin, selon la géométrie du problème, des longueurs caractéristiques différentes L_x (selon l'axe Ox), L_y (selon l'axe Oy) et L_z (selon l'axe Oz) peuvent intervenir.

Dans une équation différentielle aux dérivées partielles couplant des grandeurs $g_1(x, y, z, t)$, $g_2(x, y, z, t)$, ..., on peut comparer en ordre de grandeur des termes homogènes entre eux en faisant intervenir des grandeurs caractéristiques globales (G_1 pour g_1 , G_2 pour g_2, \dots , longueur L , temps τ).

Un terme sera négligeable devant un autre si le rapport de leurs ordres de grandeur est suffisamment petit (ou grand). Le critère numérique pour pouvoir effectivement négliger un terme devant l'autre dépend de la pertinence du choix des grandeurs caractéristiques et n'est souvent obtenu que grâce à des études expérimentales.

[DEUXIÈME PARTIE]

ÉLECTRONIQUE



Les chapitres :

1. Réponse temporelle d'un système linéaire / stabilité	79
2. A.L.I / rétroaction	113
3. Réponse fréquentielle d'un système linéaire	135
4. Électronique numérique	163
5. Systèmes non linéaires / modulation & démodulation d'amplitude	181
6. Oscillateurs électroniques	203

Deux autres chapitres portent sur l'électronique : « Puissance électrique » et « Conversion électronique ». Ils sont intégrés dans la septième partie du livre qui traite de la conversion de puissance.

RÉPONSE TEMPORELLE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE / STABILITÉ

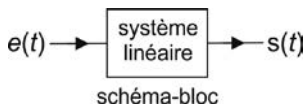
1. PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

1.1 Linéarité

Considérons un système auquel on applique un signal $t \mapsto e(t)$ appelé signal d'entrée (ou : *excitation*). La *réponse* du système à ce signal est un signal de sortie $t \mapsto s(t)$.

Par exemple, pour un microphone, l'entrée est une surpression, pour un accéléromètre, c'est une accélération, pour une thermistance c'est une température, et dans les trois cas la sortie est une tension électrique, alors que pour un moteur à courant continu, l'entrée est une tension et la sortie une vitesse de rotation.

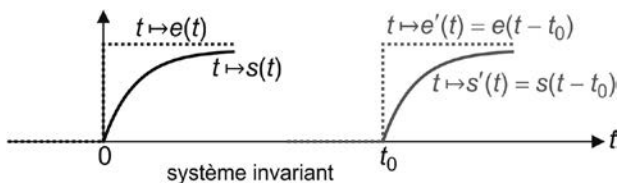
La sortie d'un système est donc une fonction de l'entrée, ce que traduit le schéma-bloc ci-contre.



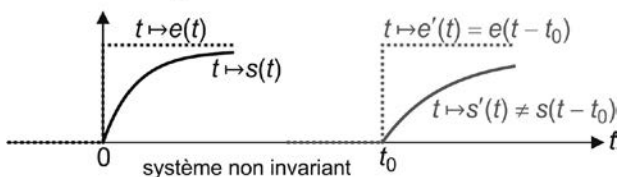
Il y a souvent unidirectionnalité : on n'obtiendra pas e en entrée du système si l'on applique s en sortie (en électronique, on risque même de détruire des composants si l'on procède ainsi). Si $e \rightarrow s$, on n'a pas $e \leftarrow s$.

Soit s_1 la réponse du système à une entrée e_1 , s_2 à une entrée e_2 , le système est *linéaire* si $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la réponse à $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ est $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$.

Le système linéaire est *invariant* si la réponse ne dépend pas de l'instant t_0 où l'on applique le signal d'entrée (qui est nul pour $t < t_0$).



Ce ne serait pas le cas par exemple si le système linéaire contient une résistance électrique qui a varié entre deux expériences suite à une élévation de la température.



Mathématiquement : pour un système invariant, si la réponse à $t \mapsto e(t)$ est $t \mapsto s(t)$, la réponse à $t \mapsto e(t - t_0)$ est $t \mapsto s(t - t_0)$ quel que soit t_0 .

1.2 Régime transitoire / régime forcé

Équation différentielle liant la sortie et l'entrée

Considérons un système linéaire pour lequel la sortie et l'entrée sont reliées par une équation différentielle qui est alors *linéaire* :

$$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n} = b_0 e + b_1 \frac{de}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m e}{dt^m}, \text{ avec } (a_0, b_0) \neq (0, 0), \text{ soit :}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k s}{dt^k} = \sum_{\ell=0}^m b_\ell \frac{d^\ell e}{dt^\ell}. \text{ L'entier } n \text{ s'appelle l'ordre du système.}$$

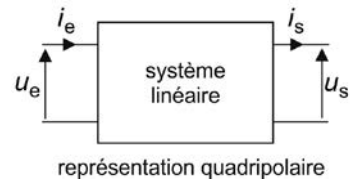
On remarque que si $(a_0, b_0) = (0, 0)$, on pourrait intégrer au moins une fois la relation entre s et e , et l'ordre du système ne serait plus n .

Les coefficients a_k et b_ℓ sont indépendants du temps pour un système invariant (en électronique, c'est le cas si les résistances, inductances, capacités... sont constantes).

Dans le cas le plus général, un système linéaire peut avoir plusieurs grandeurs d'entrée et de sortie.

Par exemple, si l'on représente un système électronique sous la forme d'un *quadripôle* (2 bornes d'entrée et 2 bornes de sortie), on a $e(t) = \begin{pmatrix} u_e(t) \\ i_e(t) \end{pmatrix}$ et

$$s(t) = \begin{pmatrix} u_s(t) \\ i_s(t) \end{pmatrix}.$$



Nous nous limiterons ici au cas où l'entrée et la sortie sont des scalaires.

Résolution

Pour une entrée e donnée, l'équation différentielle linéaire régissant s se met sous la forme : $a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n} = f$, avec $t \mapsto f(t)$ fonction du temps connue.

En se donnant n conditions initiales (C.I) portant sur s , par exemple la donnée de $s(0^+)$, $\frac{ds}{dt}(0^+)$, ..., $\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}}(0^+)$, il y a unicité de la solution s .

La linéarité permet de décomposer la réponse en $s = s_p + s_g$:

- s_p est une solution *particulière* de l'équation $a_0s + a_1 \frac{ds}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n} = f$.
- s_g est la solution *générale* de l'équation *homogène* $a_0s + a_1 \frac{ds}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n} = 0$.

Les solutions de l'équation homogène forment un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , c'est-à-dire qu'elles s'expriment sur une base de n solutions $\{t \mapsto s_k(t)\}$ avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour trouver cette base, on cherche d'abord des solutions complexes de la forme $t \mapsto e^{rt}$, avec $r \in \mathbb{C}$.

En « injectant » $t \mapsto s(t) = Ke^{rt}$ dans l'équation homogène, on trouve que r doit alors être solution de :

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n = 0, \text{ appelée équation caractéristique associée.}$$

Il y a n racines complexes de cette équation (supposées toutes différentes) que l'on note $r_k = \alpha_k + j\beta_k$ avec $(\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{C}^2$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et donc n fonctions indépendantes $t \mapsto e^{r_k t}$ qui forment une base de l'espace des solutions complexes de l'équation homogène.

En formant des combinaisons linéaires des solutions complexes $\{t \mapsto e^{r_k t}\}$ de l'équation homogène, on trouve une base de fonctions réelles $\{t \mapsto s_k(t)\}$, avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, des solutions de cette équation.

La solution la plus générale de l'équation complète $a_0s + a_1 \frac{ds}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n} = f$ se met donc sous la forme $s = s_p + \sum_{k=1}^n \lambda_k s_k$.

Les n coefficients λ_k (constantes d'intégrations) sont déterminés en résolvant un système linéaire de n équations linéaires que l'on obtient grâce à la connaissance des C.I : $s(0^+)$, $\frac{ds}{dt}(0^+)$, ..., $\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}}(0^+)$. On sait calculer s .

Stabilité d'un système linéaire

S'il existe ne serait-ce qu'une seule racine $r_k = \alpha_k + j\beta_k$ de l'équation caractéristique dont la partie réelle est positive : $\alpha_k = \text{Re}(r_k) > 0$, la solution $t \mapsto e^{\alpha_k t} \underbrace{e^{j\beta_k t}}_{\text{bornée}}$ diverge pour $t \rightarrow \infty$.

En pratique, une telle divergence est limitée par des phénomènes non-linéaires, comme la saturation de certains composants électroniques, ou par la destruction de ces composants.

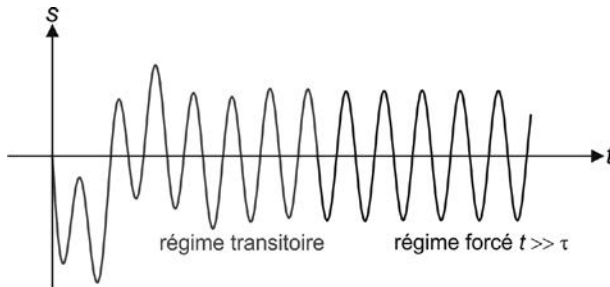
Un système linéaire est défini comme stable si *toutes* les solutions de l'équation caractéristique ont une partie réelle strictement négative : $\alpha_k = \text{Re}(r_k) < 0 \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On a alors $s_g(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.

Remarquons que le cas particulier $\alpha_k = \text{Re}(r_k) = 0$ est un cas critique, dont on verra qu'il correspond aux oscillateurs sinusoïdaux.

Un système stable est caractérisé par une durée τ telle que :

- Pour $t \gg \tau$, $s(t) \approx s_p(t)$: le système est en régime forcé (ou : établi).
- À des temps plus courts, $s(t) = s_p(t) + s_g(t)$: le système est en régime transitoire.



Remarquons qu'il n'y a pas unicité de s_p : on a une infinité de solutions particulières. Une solution particulière étant choisie, il y a en revanche unicité des coefficients λ_k , et de la solution s vérifiant les C.I. Deux solutions particulières différentes correspondent donc à deux jeux différents de coefficients λ_k :

$$s_p(t) = s(t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k s_k(t), \text{ et } s'_p(t) = s(t) - \sum_{k=1}^n \lambda'_k s_k(t). \text{ On a donc :}$$

$$s_p(t) - s'_p(t) = \sum_{k=1}^n (\lambda'_k - \lambda_k) s_k(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 : \text{ toutes les solutions particulières sont équivalentes pour } t \gg \tau.$$

Contrairement aux solutions de l'équation homogène, elles dépendent de la forme de l'excitation $t \mapsto e(t)$.

1.3 Régime sinusoïdal forcé / régime stationnaire

Régime sinusoïdal forcé (r.s.f)

Lorsque l'excitation $t \mapsto e(t)$ est sinusoïdale, de pulsation ω , la réponse $t \mapsto s(t)$ en régime forcé est également sinusoïdale et de même pulsation (elle a la même forme que l'excitation et l'on dit que les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes linéaires).

$$e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t) = \operatorname{Re}[\underline{e}(t)] \rightarrow \boxed{\text{système linéaire}} \rightarrow s(t) = S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[\underline{s}(t)]$$

Les grandeurs E et S sont appelées *valeurs efficaces* des signaux e et s . L'angle φ est l'avance de phase de s par rapport à e , ou déphasage de s par rapport à e .

Le système étant linéaire et invariant, on peut utiliser la notation complexe. La réponse à $t \mapsto \underline{e}(t) = E\sqrt{2}e^{j\omega t}$ est alors $t \mapsto \underline{s}(t) = S\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)}$.

Posons $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (période des signaux) et démontrons ce résultat.

Si la réponse à $t \mapsto e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t)$ est $t \mapsto S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$, la réponse à :
 $t \mapsto e\left(t - \frac{T}{4}\right) = E\sqrt{2} \cos\left[\omega\left(t - \frac{T}{4}\right)\right] = E\sqrt{2} \cos\left[\omega t - \frac{\pi}{2}\right] = E\sqrt{2} \sin(\omega t)$ est :

$$t \mapsto s\left(t - \frac{T}{4}\right) = S\sqrt{2} \cos\left[\omega\left(t - \frac{T}{4}\right) + \varphi\right] = S\sqrt{2} \cos\left[\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right] = E\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi).$$

La réponse à $t \mapsto \underline{e}(t) = E\sqrt{2}e^{j\omega t} = E\sqrt{2} \cos(\omega t) + jE\sqrt{2} \sin(\omega t)$ est donc bien :
 $t \mapsto S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) + jS\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) = S\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{s}(t)$ pour un système linéaire.

On définit la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ (ce qui n'a de sens qu'en régime sinusoïdal forcé). On a donc :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{S}{E} e^{j\varphi} = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{S(\omega)}{E}$, module de la fonction de transfert, est le *gain* : rapport de la valeur efficace du signal de sortie sur celle du signal d'entrée (c'est aussi le rapport des valeurs maximales).

$\varphi(\omega) = \arg[H(j\omega)]$ est le déphasage du signal de sortie par rapport à celui d'entrée.

Ces grandeurs dépendent de la pulsation ω : à valeur efficace E du signal d'entrée fixée, la valeur efficace S du signal de sortie varie avec ω , tout comme le déphasage φ .

Régime stationnaire (ou permanent)

C'est le cas particulier du r.s.f où $\omega \rightarrow 0 \Leftrightarrow T \rightarrow \infty$.

On a alors une entrée $t \mapsto e(t) = E\sqrt{2} = Cte$ dont la réponse vaut :
 $t \mapsto s(t) = S\sqrt{2} \cos \varphi = Cte$.

Cet ouvrage aborde l'ensemble du cours de Physique-Chimie de la classe de CPGE PSI / PSI* avec de nombreux points du programme de PCSI.

Il contient :

- un cours dont la **rédaction** est particulièrement **soignée** en s'appuyant sur de **nombreuses illustrations** ;
- les **points délicats détaillés**, afin que les étudiants trouvent des réponses à la plus grande partie de leurs questions ;
- de **très nombreuses applications** classiques qui ont été choisies pour leur diversité, l'éclairage qu'elles apportent au cours, les techniques de résolution qu'elles font intervenir, et qui font l'objet de **nombreux sujets d'écrits et d'oraux** ;
- les **outils mathématiques** (différentielles, champs de vecteurs et de scalaires, analyse de Fourier, analyse dimensionnelle) ;
- quelques **compléments hors-programmes** pour leur intérêt culturel et leur utilisation fréquente dans les T.I.P.E. Ils sont clairement identifiés afin d'être éventuellement réservés à une deuxième lecture plus approfondie.

Cet **outil de travail complet**, utile et agréable par la clarté du cours, la rigueur du contenu, la variété et la richesse des applications proposées, est écrit spécialement pour les étudiants qui préparent les concours d'entrée aux E.N.S. et aux plus grandes écoles d'ingénieurs, les étudiants en Master et les candidats aux concours d'enseignement (CAPES, Agrégation).

Pascal OLIVE, ancien élève de l'E.N.S. Lyon, est professeur de chaire supérieure. Il enseigne la Physique et la Chimie dans la classe de PSI du Lycée Montaigne de Bordeaux depuis 2007.*

www.editions-ellipses.fr

