

Avant-propos

Un programme linéaire est un problème mathématique consistant à optimiser une fonction linéaire sur un ensemble défini par un nombre fini d'équations et/ou d'inégalités linéaires. La programmation (ou optimisation) linéaire est la branche de la recherche opérationnelle qui se propose d'étudier et de résoudre les programmes linéaires. Son histoire remonte à la fin des années 1940 lorsque l'économiste soviétique L. Kantorovitch posa et résolut un problème de planification de la production. Mais ces travaux ne furent découverts par la communauté scientifique qu'aux alentours de 1960. En parallèle vers 1949, le mathématicien américain G. B. Dantzig, alors qu'il travaillait comme consultant pour l'US Air Force, découvrit une méthode qui fut appelée algorithme du simplexe. Comme c'était l'usage, l'armée américaine appelait tout ce qui était plan, planning, etc., par le terme générique « program ». Ce terme s'est par la suite accolé à l'appellation de cette science.

Assez naturelle, l'analogie de la programmation linéaire avec l'algèbre linéaire concerne au moins trois aspects :

1. L'algèbre linéaire étudie essentiellement des ensembles définis par un nombre fini d'équations linéaires de la forme $V = \{x | Ax = b\}$ pour certains A, b alors que la programmation linéaire considère des ensembles définis par un nombre fini d'équations et/ou d'inégalités linéaires de la forme $P = \{x | Ax \leq b\}$ pour A, b donnés.
2. On a une double description de l'ensemble V : c'est à la fois l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans et l'enveloppe affine d'un ensemble fini de vecteurs. De manière semblable, l'ensemble P est décrit à la fois comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés et comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de vecteurs plus l'enveloppe conique d'un nombre fini d'autres vecteurs.
3. Enfin, si l'algorithme d'élimination de Gauss, qui est polynomial, permet de trouver un vecteur $x \in V$ ou de conclure que $V = \emptyset$, résoudre un programme linéaire est un problème polynomialement équivalent au suivant : trouver un vecteur $x \in P$ ou conclure que $P = \emptyset$. Or, l'algorithme des ellipsoïdes est polynomial et résout ce dernier.

Cet ouvrage étudie les principaux concepts de la programmation linéaire des points de vue théorique et algorithmique, en mettant l'accent sur la méthode du simplexe. Son contenu s'adresse essentiellement aux étudiants du domaine Mathématiques et Informatique, mais aussi à ceux des domaines Technologie, Sciences Juridiques, Économiques et de Gestion. Il se destine aussi bien aux étudiants avancés en licence qu'à ceux en master.

Bien que la programmation linéaire soit un sujet relativement récent, assez différent de ce que l'on a l'habitude d'étudier dans le cadre des mathématiques traditionnelles, elle nécessite néanmoins la même rigueur intellectuelle. Ce livre ne nécessite, cependant, que deux simples prérequis : être habitué au raisonnement mathématique

et avoir quelques connaissances basiques d'algèbre linéaire (une annexe rappelle quelques-unes de ces notions, qui peuvent être délaissées dans un premier temps pour être consultées en cas de besoin, au fur et à mesure).

Voici comment cet ouvrage est organisé. Après avoir introduit au chapitre 1 ce qu'est un programme linéaire et quelques faits basiques y afférent, le chapitre 2 étudie la géométrie des polyèdres. Ensuite, des résultats théoriques fondamentaux sont présentés au chapitre 3, permettant la conception de l'algorithme du simplexe, présenté et analysé sous tous ses aspects (correction, finitude et complexité) au chapitre central numéro 4. En quête de plus d'efficacité, le chapitre 5 propose une méthode dite révisée, qui consiste en une version « implémentable » de l'algorithme du simplexe. Le chapitre 6 propose une théorie de la dualité et finit avec un moyen d'obtention d'un certificat d'optimalité en temps polynomial. Enfin, on montre au chapitre 7 que le problème de la programmation linéaire est « facile » en proposant un algorithme polynomial : la méthode des ellipsoïdes.

J'ai enseigné la programmation linéaire durant de nombreuses années dans divers départements en Algérie ainsi qu'à l'IUFM de Clermont-Ferrand, lorsque j'y ai été recruté en tant qu'attaché temporaire à l'enseignement et à la recherche au début des années 1990. La population estudiantine qui a fréquenté mes cours est hétérogène : des élèves ingénieurs et étudiants en divers « Magisters » lorsque l'ancien système était en vigueur, et aujourd'hui des étudiants en Licence et en Master. Le contenu de ce livre s'inspire de cette expérience, c'est-à-dire de mes notes de cours, mais aussi des nombreuses références bibliographiques citées en fin d'ouvrage. De nombreux exemples et remarques sont destinés à clarifier les concepts abordés. Des exercices de divers niveaux de difficulté sont proposés, empruntés pour la plupart aux références citées en fin d'ouvrage. Un index servira pour repérer les différents concepts dans le texte.

Le lecteur est invité à me faire parvenir ses suggestions, remarques, interrogations et corrections, par courriel à l'adresse haddadi.salim@univ-guelma.dz. Par ailleurs, je me tiens à sa disposition pour une éventuelle correction ou indication en ce qui concerne tel ou tel exercice.

Notations et conventions

Tout au long de cet ouvrage, les conventions et notations suivantes sont adoptées :

- \mathbb{N} désigne l'ensemble des nombres entiers naturels ;
- \mathbb{Z} est l'ensemble des nombres entiers ;
- \mathbb{Q} est l'ensemble des nombres rationnels ;
- \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels.

Tout logarithme est considéré en base 2. Le symbole $| \cdot |$ désigne la valeur absolue et l'écriture $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal au réel x .

Une matrice est représentée par une lettre majuscule italique maigre, par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il en est de même d'un ensemble, comme par exemple :

$$R = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b} \}$$

Un vecteur est représenté par une lettre minuscule italique grasse et un scalaire, par une lettre minuscule italique maigre. Ici, le vecteur

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

a deux composantes que sont les scalaires u_1 et u_2 .

Lorsqu'elle se trouve en exposant d'une matrice ou d'un vecteur, la lettre t indique l'opération de transposition. Ainsi $A^t \mathbf{u}$ signifie le produit de la transposée de la matrice A par le vecteur \mathbf{u} .

Lorsque

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

l'écriture conventionnelle $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ signifie simplement que $u_i \leq v_i$ pour $j = 1, \dots, n$.

De la même manière, l'écriture $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ est équivalente à $u_i \geq 0$ pour $j = 1, \dots, n$. La dimension du vecteur nul $\mathbf{0}$ se déduit facilement du contexte.

Table des matières

1. CONCEPTS BASIQUES	9
1.1. PROGRAMME LINÉAIRE	9
1.2. EXEMPLE DE PROGRAMME LINÉAIRE	10
1.3. FORMES D'UN PROGRAMME LINÉAIRE	13
1.4. SOLUTION RÉALISABLE ET SOLUTION OPTIMALE	17
1.5. MÉTHODE DU GRADIENT	21
1.6. MÉTHODE ALGÈBRIQUE	23
1.7. FONCTION OBJECTIF CONVEXE LINÉAIRE PAR MORCEAUX	28
1.8. EXERCICES	30
2. GÉOMÉTRIE DES PROGRAMMES LINÉAIRES	37
2.1. ENSEMBLES CONVEXES	37
2.2. ENVELOPPE CONVEXE ET ENVELOPPE CONIQUE	39
2.3. POINTS EXTRÊMES ET DIRECTIONS EXTRÊMES	42
2.4. HYPERPLAN ET DEMI-ESPACE FERMÉ	47
2.5. POLYÈDRE ET CÔNE POLYÉDRAL	48
2.6. POINTS EXTRÊMES, DIRECTIONS EXTRÊMES ET FACES D'UN POLYÈDRE	50
2.7. REPRÉSENTATION D'UN POLYÈDRE	55
2.8. EXERCICES	56
3. THÉORIE FONDAMENTALE	59
3.1. CONDITIONS D'EXISTENCE D'UN POINT DANS UN POLYÈDRE	59
3.2. HYPOTHÈSE DE PLEIN RANG DE LA MATRICE DES CONTRAINTES	60
3.3. SOLUTION DE BASE RÉALISABLE	62
3.4. THÉORÈMES FONDAMENTAUX	65
3.5. UN ALGORITHME DE FORCE BRUTE	71
3.6. EXERCICES	73
4. ALGORITHME DU SIMPLEXE	75
4.1. DESCRIPTION DE L'ALGORITHME DU SIMPLEXE	75
4.2. CORRECTION DE L'ALGORITHME DU SIMPLEXE	83
4.3. FINITUDE DE L'ALGORITHME DU SIMPLEXE	95
4.4. OBTENTION D'UNE SOLUTION DE BASE RÉALISABLE INITIALE	98
4.5. COMPLEXITÉ DE L'ALGORITHME DU SIMPLEXE	108

4.6. EXERCICES	117
5. ALGORITHME DU SIMPLEXE RÉVISÉ	125
5.1. MOTIVATION	125
5.2. ÉNONCÉ DE L'ALGORITHME RÉVISÉ	126
5.3. PREMIÈRE VERSION : PIVOTAGE DANS UN TABLEAU	126
5.4. MATRICE ÉLÉMENTAIRE ET INVERSION	131
5.5. SECONDE VERSION : FORME PRODUIT DE L'INVERSE	134
5.6. EXERCICES	138
6. DUALITÉ	141
6.1. MOTIVATION	141
6.2. DÉFINITION ET RÈGLES D'ÉCRITURE DU DUAL	142
6.3. THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA DUALITÉ	145
6.4. ÉCARTS COMPLÉMENTAIRES	150
6.5. CERTIFICAT D'OPTIMALITÉ	151
6.6. EXERCICES	154
7. COMPLEXITÉ DE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE	159
7.1. BISECTION RÉCURSIVE	159
7.2 PROGRAMME LINÉAIRE ET PROBLÈME DE DÉCISION ASSOCIÉ	160
7.3 SYSTÈME D'INÉGALITÉS LINÉAIRES	164
7.4 QUELQUES FAITS CONCERNANT LES ELLIPSOÏDES	165
7.5 MÉTHODE DES ELLIPSOÏDES	169
7.6 EXERCICES	174
ANNEXE. PRÉREQUIS D'ALGÈBRE LINÉAIRE	177
1. SOUS-ESPACES VECTORIELS LINÉAIRES	177
2. MATRICES ET VECTEURS	178
3. MATRICES INVERSIBLES ET INVERSION DE MATRICES	181
4. DÉTERMINANT	183
5. SOUS-ESPACES AFFINES	184
6. MATRICES DÉFINIES POSITIVES ET NORMES	186
BIBLIOGRAPHIE	189
INDEX	191

1. Concepts basiques

Ce chapitre introduit ce qu'est un programme linéaire (PL en abrégé), les différentes formes qu'il peut prendre ainsi que les concepts essentiels de solution réalisable et de solution optimale. Il présente aussi une méthode dite du gradient, valable pour des PL de toute petite taille, dont le principe provient de ce que l'on a appris en licence sur l'optimisation d'une fonction différentiable sur un ensemble fermé. Pour avoir un aperçu de la solution d'un PL, une méthode algébrique est proposée, dont le fondement est identique à celui de l'algorithme du simplexe que l'on étudiera plus tard, sauf qu'elle est moins « systématique ». On verra également comment linéariser un problème consistant à optimiser une fonction convexe et linéaire par morceaux sur un ensemble défini par des équations et/ou inégalités linéaires.

1.1. Programme linéaire

Un PL est un problème mathématique d'optimisation comportant des constantes, ou données, et des variables. Les constantes et les variables sont liées par des équations et/ou des inégalités linéaires appelées contraintes. Certaines variables sont astreintes à la non négativité alors que d'autres sont libres en signe. Une variable libre en signe peut être négative, nulle ou positive. Un PL comporte en outre une fonction objectif linéaire en les variables qu'il s'agit de maximiser ou minimiser.

Quitte à renuméroter les variables, à changer l'ordre des contraintes et le signe de tous les coefficients c_1, \dots, c_n , le modèle mathématique d'un PL, dit de forme générale, se présente ainsi :

$$\begin{array}{rcccccccc}
 \max z = & c_1 x_1 & \cdots & +c_r x_r & +c_{r+1} x_{r+1} & \cdots & +c_n x_n & & \\
 & a_{11} x_1 & \cdots & +a_{1r} x_r & +a_{1,r+1} x_{r+1} & \cdots & +a_{1n} x_n & \leq & b_1 \\
 & \vdots & & & & & & \vdots & \\
 & a_{s1} x_1 & \cdots & +a_{sr} x_r & +a_{s,r+1} x_{r+1} & \cdots & +a_{sn} x_n & \leq & b_s \\
 & a_{s+1,1} x_1 & \cdots & +a_{s+1,r} x_r & +a_{s+1,r+1} x_{r+1} & \cdots & +a_{s+1,n} x_n & \geq & b_{s+1} \\
 & \vdots & & & & & & \vdots & \\
 & a_{t1} x_1 & \cdots & +a_{tr} x_r & +a_{t,r+1} x_{r+1} & \cdots & +a_{tn} x_n & \geq & b_t \\
 & a_{t+1,1} x_1 & \cdots & +a_{t+1,r} x_r & +a_{t+1,r+1} x_{r+1} & \cdots & +a_{t+1,n} x_n & = & b_{t+1} \\
 & \vdots & & & & & & \vdots & \\
 & a_{m1} x_1 & \cdots & +a_{mr} x_r & +a_{m,r+1} x_{r+1} & \cdots & +a_{mn} x_n & = & b_m \\
 & x_1 \geq 0 & \cdots & x_r \geq 0 & & & & &
 \end{array}$$

Il comporte n variables x_1, \dots, x_n . On distingue trois parties toujours présentes :

- La première ligne consiste en la fonction $z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ qui est linéaire en les n variables et qui doit être maximisée ou minimisée. La fonction z est appelée fonction objectif car elle traduit l'objectif du problème (minimiser la longueur de chutes de papier lors d'une découpe, maximiser un profit, etc.).

- La dernière ligne indique que les variables x_1, \dots, x_r doivent être non négatives alors que, lorsqu'on ne met rien à leur propos, les variables x_{r+1}, \dots, x_n peuvent être de n'importe quel signe. On dit que les r premières variables sont astreintes à la non négativité alors que les $n - r$ autres sont libres en signe. Notons que r peut éventuellement être nul.
- Les autres lignes concernent ce qu'on appelle les m contraintes du problème. Il y a s inégalités linéaires du type \leq , $t - s$ inégalités linéaires du type \geq et $m - t$ équations linéaires.
- Les données du problème sont les n nombres réels c_1, \dots, c_n appelés coefficients de la fonction objectif, les m réels b_1, \dots, b_m appelés coefficients à droite des contraintes et les $m \times n$ réels a_{11}, \dots, a_{mn} .

Le PL pose la question suivante : compte-tenu de toutes les données, quelles valeurs donner aux variables x_1, \dots, x_n de manière à ce que les contraintes, y compris celles de signe, soient satisfaites et que la fonction objectif z soit maximum.

EXEMPLE 1.1.– Voici un exemple de PL de forme générale :

$$\begin{array}{rcll} \min z = & -3x_1 & +5x_2 & -9x_3 \\ & & 5x_2 & -9x_3 \leq -2 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3 \geq 10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & = 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Dans cet exemple $m = 3, n = 3, r = 2, s = 1$ et $t = 2$. Le PL de cet exemple comporte trois variables x_1, x_2, x_3 et trois contraintes dont deux inégalités et une équation. Les variables x_1, x_2 ne peuvent être négatives tandis que x_3 est libre, puisqu'il n'y a aucune restriction sur son signe, et peut donc être éventuellement négative.

REMARQUE 1.1.– Le PL est le modèle mathématique le plus souvent rencontré dans la modélisation de problèmes réels de production, d'allocation de ressources, de logistique et autres (voir par exemple les références [8,13]).

1.2. Exemple de programme linéaire

On présente un exemple de problème dont les données sont fictives où, en partant de l'énoncé, on propose un modèle mathématique qui se trouve être un PL.

Un fermier dispose d'une parcelle de 13 hectares sur laquelle il désire cultiver du blé et du maïs. Il sait par expérience que pour cultiver un hectare de blé, il doit consacrer 3 semaines de travail et 1 quintal d'engrais, et pour cultiver un hectare de maïs, il doit travailler pendant 4 semaines et utiliser 3 quintaux d'engrais. De plus, il ne peut dédier à ces tâches que 42 semaines et il dispose en tout de 24 quintaux d'engrais. En outre, il sait qu'un hectare de blé (respectivement maïs) cultivé lui procurera un

bénéfice de 10 000 € (respectivement 12 000 €). Comment doit-il s'y prendre afin de maximiser son profit ? Récapitulons les données au tableau 1.1.

	Blé	Maïs	Quantité de ressource disponible
Bénéfice (en milliers d'euros) par hectare	10	12	
Superficie totale à cultiver			13
Nombre de semaines de travail par hectare	3	4	42
Nombre de quintaux d'engrais par hectare	1	3	24

TABLEAU 1.1. Données du problème du fermier

REMARQUE 1.2.— Pour écrire un modèle mathématique, il faut commencer par définir précisément les variables de décision, car la décision portera sur les valeurs à donner à ces variables.

Déterminons les variables de décision du problème posé. De quoi va dépendre le profit du fermier ? De la façon dont il va partager ses 13 hectares (ou une partie des 13 hectares) en deux parcelles, une parcelle, de superficie inconnue, réservée à la culture du blé et une autre, de superficie également inconnue, réservée à la culture du maïs. Soit donc x_1 la superficie inconnue réservée au blé et x_2 la superficie inconnue réservée au maïs.

Le fermier n'est pas libre de donner des valeurs arbitraires à x_1 et x_2 car elles seront déterminées par les limitations, ou contraintes, imposées par les ressources qui ne sont disponibles qu'en quantités limitées.

De toute évidence, on doit avoir :

$$x_1 + x_2 \leq 13$$

car la somme des deux superficies réservées au blé et au maïs ne doit pas excéder la superficie totale disponible, soit 13 hectares.

La seconde contrainte va porter sur les semaines de travail. Si cultiver un hectare de blé nécessite 3 semaines de travail alors x_1 hectares nécessitent $3x_1$ semaines de travail. De même, si un hectare de maïs nécessite 4 semaines de travail alors x_2 hectares nécessitent $4x_2$ semaines de travail. Enfin, le temps total de travail accompli par le fermier ne doit pas excéder les 42 semaines disponibles. Ce qui se traduit par :

$$3x_1 + 4x_2 \leq 42$$

La troisième contrainte va porter, de manière analogue, sur les quantités d'engrais :

$$x_1 + 3x_2 \leq 24$$

Deux dernières contraintes naturelles sont :

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

car x_1 et x_2 sont des superficies ne pouvant être négatives. Ces contraintes ne sont pas superflues car si elles sont omises, on sera amené à accepter des valeurs négatives pour x_1 et x_2 , ce qui est une aberration.

Appelons z la valeur du profit. Par abus, z est appelé fonction objectif car l'objectif du fermier est de maximiser z (on devrait écrire $z(x_1, x_2)$). Cette fonction se détermine de manière analogue :

$$z = 10x_1 + 12x_2$$

On est en mesure de réunir les éléments du modèle mathématique du problème du fermier :

$$\begin{aligned} \max z = & 10x_1 & +12x_2 \\ & x_1 & +x_2 & \leq 13 \\ & 3x_1 & +4x_2 & \leq 42 \\ & x_1 & +3x_2 & \leq 24 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

C'est un PL qui nous accompagnera tout au long du livre pour illustrer les concepts présentés.

REMARQUE 1.3.– Dans la modélisation qui précède, on a implicitement fait quelques hypothèses :

- Toute unité de variable ou de donnée (un quintal d'engrais, une semaine de travail, un hectare de terrain, une unité monétaire) est arbitrairement sécable. Par exemple, il est possible que la superficie x_1 vaille 1,25 hectares, auquel cas le fermier sera amené à travailler pendant $3x_1 = 3,75$ semaines sur le champ de blé. En revanche, un tracteur n'est pas sécable. Si le fermier avait 2 tracteurs, il n'y aurait aucun sens à affecter 0,8 tracteur au champ de blé et 1,2 au champ de maïs.
- Si le fermier consacre 3 semaines à l'hectare alors il consacre 6 semaines pour une superficie de 2 hectares. En général, il consacre $3x_1$ semaines pour une superficie de x_1 hectares.
- S'il consacre $3x_1$ semaines à cultiver du blé et $4x_2$ semaines au maïs alors il travaillera pendant $3x_1 + 4x_2$ semaines.

Les deux dernières hypothèses, proportionnalité et additivité, caractérisent une relation linéaire entre les variables et les données. Dans un PL, les variables et les données ne sont liées que par des relations linéaires et les unités de données sont sécables.

1.3. Formes d'un programme linéaire

DÉFINITION 1.1.– Le PL

$$\begin{aligned} \max z = & c_1x_1 & \cdots & +c_nx_n \\ & a_{11}x_1 & \cdots & +a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & a_{m1}x_1 & \cdots & +a_{mn}x_n & \leq & b_m \\ & x_1 \geq 0 & \cdots & x_n \geq 0 & & \end{aligned}$$

est dit de forme canonique. Il est caractérisé par :

- une fonction objectif à maximiser,
- toutes les contraintes sont des inégalités linéaires du type \leq ,
- toutes les variables sont astreintes à la non négativité.

Le vecteur des variables de décision est $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ avec :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Les données sont le vecteur $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, le vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ et la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ où :

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sous forme condensée, un PL de forme canonique s'écrit :

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Notons que le PL du fermier (1.1) est de forme canonique.

PROPOSITION 1.1.– Tout PL peut être mis sous forme canonique.

Preuve. Donnons simplement les règles permettant de ramener un PL quelconque à un PL de forme canonique.

1. Toute variable libre x peut s'écrire comme différence de deux variables non négatives. Plus précisément :

$$x \text{ libre} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u - v \\ u \geq 0, v \geq 0 \end{cases}$$

2. Minimiser une fonction objectif z est équivalent à maximiser $-z$. De plus, $\min z = -\max(-z)$.
3. Une inégalité du type \geq se ramène à une inégalité du type \leq :

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \Leftrightarrow -a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i$$

4. Une équation se ramène à deux inégalités :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \\ -a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n \leq -b_i \end{cases}$$

L'équivalence du PL initial et de celui qui est de forme canonique, obtenu par application des 4 règles décrites ci-dessus, provient des équivalences précédentes. ■

EXEMPLE 1.2.– Mettons le PL de l'exemple 1.1 sous forme canonique :

1. En posant $x_3 = x'_3 - x''_3$ avec $x'_3 \geq 0, x''_3 \geq 0$, le PL devient :

$$\begin{array}{rccccrcr} \min z = & -3x_1 & +5x_2 & -9x'_3 & +9x''_3 & & \\ & & & 5x_2 & -9x'_3 & +9x''_3 & \leq -2 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x'_3 & -2x''_3 & & \geq 10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & & = 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x'_3 \geq 0 & x''_3 \geq 0 & & \end{array}$$

2. Minimiser z revient à maximiser $w = -z$ (qui est obtenue en changeant le signe de tous les coefficients de la fonction objectif). Le PL équivalent est alors :

$$\begin{array}{rccccrcr} \max w = & 3x_1 & -5x_2 & +9x'_3 & -9x''_3 & & \\ & & & 5x_2 & -9x'_3 & +9x''_3 & \leq -2 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x'_3 & -2x''_3 & & \geq 10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & & = 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x'_3 \geq 0 & x''_3 \geq 0 & & \end{array}$$

3. L'inégalité :

$$4x_1 + 7x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 \geq 10$$

est équivalente à :

$$-4x_1 - 7x_2 - 2x'_3 + 2x''_3 \leq -10$$

Le PL équivalent est alors :

$$\begin{array}{rccccrcr} \max w = & 3x_1 & -5x_2 & +9x'_3 & -9x''_3 & & \\ & & & 5x_2 & -9x'_3 & +9x''_3 & \leq -2 \\ & -4x_1 & -7x_2 & -2x'_3 & +2x''_3 & & \leq -10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & & = 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x'_3 \geq 0 & x''_3 \geq 0 & & \end{array}$$

4. Enfin, l'équation $7x_1 - 6x_2 = 2$ se ramène aux deux inégalités :

$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 \leq 2 \\ -7x_1 + 6x_2 \leq -2 \end{cases}$$

EXEMPLE 1.4. – Après introduction de trois variables d'écart non négatives, le PL du fermier (1.1) se présente ainsi sous forme standard :

$$\begin{array}{rcccccccl}
 \max z = & 10x_1 & +12x_2 & & & & & & \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & = & 13 \\
 & 3x_1 & +4x_2 & & +x_4 & & & = & 42 \\
 & x_1 & +3x_2 & & & +x_5 & & = & 24 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 & x_5 \geq 0 & & &
 \end{array} \quad (1.3)$$

1.4. Solution réalisable et solution optimale

Soit P un PL de forme standard :

$$P \begin{cases} \max z = \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

DÉFINITION 1.3.– On appelle solution réalisable de P un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie toutes les contraintes, c'est-à-dire que \mathbf{x} est tel que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. L'ensemble $R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ de toutes les solutions réalisables de P est appelé domaine réalisable de P .

DÉFINITION 1.4.– Un vecteur $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ est appelé solution optimale de P si c'est une solution réalisable (c'est-à-dire $A\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$ et $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$) et si $\mathbf{c}^t \mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}^t \mathbf{x}$ pour toute solution réalisable \mathbf{x} . Autrement dit, une solution est optimale si c'est une solution réalisable qui, parmi toutes les solutions réalisables, donne la plus grande valeur à la fonction objectif. D'une autre façon encore, une solution est optimale si on ne peut trouver une solution réalisable donnant une plus grande valeur à la fonction objectif.

EXEMPLE 1.5.– Considérons le PL du fermier de forme standard en (1.3). Puisqu'on ne peut représenter le domaine réalisable

$$R' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 13, 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 42, \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

sur un plan, on va se contenter de représenter le domaine réalisable du PL de forme canonique en (1.1) (voir figure 1.1)

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 13, 3x_1 + 4x_2 \leq 42, \\ x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \right\} \quad (1.4)$$