

# Avant-propos

Les années passées jadis au milieu de mes élèves de collège m'ont conduit à penser que dans les petites classes, il faut essayer de donner aux enfants :

## le goût et l'émerveillement des nombres, des figures et des jolis calculs.

J'ai enseigné les mathématiques dans toutes les classes du collège et du lycée, mais surtout (dans des conditions très privilégiées, au lycée Henri IV, à Paris) en classes de première S et terminale S. Je sais que la principale difficulté pour enseigner les mathématiques est de les rendre humaines, attractives et intéressantes, ce qui ne veut pas dire ludiques ou amusantes car les mathématiques sont une chose sérieuse.

Bien souvent, les mathématiques sont enseignées de façon rébarbative et ennuyeuse. Pourtant, et j'ai pu le constater tout au long de ma carrière, la curiosité et l'intelligence des enfants et des jeunes ne demandent qu'à croître et à se fortifier. Il leur faut donc une **nourriture intellectuelle vivifiante**.

C'est ce qui m'a décidé à prendre la plume, avec l'intention d'écrire un livre de mathématiques de niveau collège qui contribuât à la formation des enfants, du point de vue intellectuel, humain, spirituel, et qui exaltât aussi le sens de la **beauté** et du **courage**, conscient que ces grands mots vont contre l'air du temps.

L'origine des mathématiques se perd dans la nuit des temps. On connaît le **papyrus de Rhindt**, découvert sur un site archéologique de Thèbes, en Égypte, qui date du **xvi<sup>e</sup>** siècle avant Jésus-Christ. Il contient des problèmes résolus d'arithmétique et d'arpentage.

On doit aux Grecs de l'Antiquité, à partir du **v<sup>e</sup>** siècle avant Jésus-Christ, les plus anciennes **démonstrations** écrites et rigoureuses qui nous soient parvenues. Elles portent sur la géométrie et l'arithmétique. Les grands mathématiciens de la Grèce antique sont Thalès, Euclide, Pythagore, Archimède, Diophante, etc.

Il semble que les mathématiques soient entrées en sommeil après le déclin et la chute de Rome (476), et qu'elles ne se soient réveillées que sous Charlemagne (800). Mais au cours de cette période de latence, des mathématiques venant de l'Inde et de la Chine ont été transmises et enrichies par des **mathématiciens chrétiens ou perses** du bassin méditerranéen qui écrivaient en latin, ou en arabe du fait des conquêtes musulmanes commencées au **vii<sup>e</sup>** siècle et poursuivies bien au-delà. On connaît ainsi un écrit de quelques pages, datant du **ix<sup>e</sup>** siècle, et qui a pour titre "*al jabr*" (algèbre). Le savant moine bénédictin Gerbert, de l'abbaye d'Aurillac, élu pape en 999 sous le nom de Sylvestre II, a introduit l'algèbre en Europe.

Le développement ultérieur des sciences est en grande partie dû aux progrès accomplis en mathématiques dans le formalisme et les notations, à partir du **xv<sup>e</sup>** siècle (Chuquet, Viète) et à l'intrépidité de quelques expérimentateurs et géomètres (Cardan, Bombielli, Toricelli, Galilée, Descartes, Pascal, Fermat etc.). C'est le nouvel essor des mathématiques qui s'est produit dans l'Europe chrétienne qui a permis le développement spectaculaire de la physique à partir du **xvii<sup>e</sup>** siècle.

Depuis cette époque, on ne peut plus **rien faire de sérieux** en sciences sans une formation de base solide en mathématiques. « La nature est un livre écrit en langage mathématique » disait Galilée au **xvi<sup>e</sup>** siècle.

Les mathématiques sont le lieu privilégié des certitudes rationnelles, des notions abstraites et des démonstrations rigoureuses. Elles ont contribué au développement intellectuel de l'homme au cours des siècles, elles sont une de ses conquêtes, laborieusement acquise, elles constituent une composante majeure de la **culture universelle**.

Nombre de prélats et de princes chrétiens, depuis le Moyen Âge, n'ont pas hésité à se frotter aux sciences de leur époque, à les maintenir, à les protéger et à s'entourer de savants. On a déjà cité le pape de l'an mil, Gerbert d'Aurillac (Sylvestre II). Plus avant, on peut évoquer Saint Augustin (mort en 430) qui relate quelques faits de ses années d'apprentissage dans ses *Confessions* (Liv. 4, chap. 16) :

« J'ai compris sans beaucoup de peine, et sans être aidé d'aucun homme tout ce que j'ai pu lire touchant l'art de l'Éloquence, la Dialectique, la Géométrie, la Musique et l'Arithmétique. »

En France, depuis le milieu des années 1980, les programmes de mathématiques du collège et du lycée ont été progressivement **bouleversés** et **saccagés**. Ayant déjà évoqué ce sujet dans l'épilogue du livre référencé en note<sup>1</sup>, je ne dirai rien ici des partis pris idéologiques qui ont conduit à ces bouleversements et à ce saccage. Mais je dirai quelques mots des conséquences : il ne subsiste plus dans l'enseignement qui est dispensé aux élèves aujourd'hui, qu'une caricature grimaçante des mathématiques. Les mathématiques n'ont plus d'attrait pour les élèves, et la plupart d'entre eux en sont justement dégoûtés. Certains parviennent cependant à échapper au massacre, grâce à leurs parents qui ont les moyens de leur fournir une bonne instruction.

Je ne dis pas que les programmes de mathématiques des années 1950 à 1980 n'avaient pas de défauts, mais je dis que les programmes actuels ne sont plus des mathématiques. Et quand on feuillette la plupart des manuels français de mathématiques destinés à l'enseignement d'aujourd'hui, on est consterné, saisi de colère. Et on se dit :

Quel gâchis ! Quelle décadence ! Pauvres élèves !

Prenant la plume, disais-je, je me suis attaché, dans mes livres destinés au collège, à exposer et expliquer de mon mieux les bases de ce que doit être un enseignement de qualité. La matière abordée est accessible à un élève de niveau moyen, aidé d'un professeur qui choisira ce qui l'intéresse pour faire son cours. Mes livres ne sont qu'un outil entre les mains du professeur et de ses élèves. Le rôle du professeur est déterminant, c'est lui qui détient le savoir, c'est la référence, le modèle que l'enfant doit d'abord tâcher d'imiter lors de son initiation. Un bon professeur sait transmettre son enthousiasme. Il fait preuve de bienveillance, de patience et d'ingéniosité pour faire comprendre les mathématiques et les rendre familières. Tout un savoir non écrit passe par le professeur. Mais je ne voudrais pas laisser croire que je détiens une formule miracle pour enseigner les mathématiques, ou que les mathématiques sont une discipline facile, que l'on peut maîtriser sans efforts.

Pour bien faire comprendre les notions nouvelles, les livres comportent des explications concrètes et, aux niveaux 6<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, ils sont parsemés de **petites questions** posées à l'élève, et qui sont résolues un peu plus loin.

Une série d'exercices clôt chaque chapitre, la plupart originaux. Ils sont **corrigés** entièrement pour montrer aux élèves les méthodes de raisonnement. Presque tous de niveau facile ou moyen, ils ont pour ambition première de faciliter l'assimilation du cours et d'entraîner l'élève à la pratique aisée des techniques de base, un peu comme les gammes et les exercices d'assouplissement des doigts pour le piano. Mais l'auteur n'a pas pu s'empêcher de glisser quand même quelques **exercices plus relevés**, intéressants et instructifs,

---

1. J.-L. Frot : *Mathématiques - Cours de haut niveau pour les élèves de Première et Terminale S qui envisagent une prépa - 2<sup>e</sup> édition révisée*, Ellipses (2018).

destinés à faire **aimer les mathématiques**, et à donner aux enfants suffisamment de satisfaction pour justifier les efforts qu'ils auront consentis pour les comprendre et les résoudre. (Pour les élèves qui veulent aller plus loin, il y a des exercices de niveau plus ambitieux dans le livre référencé en note <sup>2</sup>).

Il ne faut pas se précipiter sur les corrections d'exercices. Il faut se donner la peine de chercher pour avoir la **satisfaction de trouver** par soi-même. Si on parvient sans aide à résoudre ne serait-ce qu'une petite partie des questions, c'est déjà bien. Et puis, rien n'empêche de laisser de côté un exercice qui paraît hors d'atteinte à un moment donné, et d'y revenir un autre jour, lorsqu'on aura acquis plus de connaissances et d'aisance.

Un exercice doit toujours être d'abord cherché au brouillon. Quand on a résolu la première question au brouillon, on peut rédiger la solution de cette première question au propre. On passe ensuite à la deuxième question, et on continue de la même façon. Si on bute sur une question, on peut souvent l'admettre, et passer à la suivante sans dommage.

Un cours de mathématiques introduit et explique des notions nouvelles. Si on veut en tirer profit, ces notions doivent être **étudiées** avec soin pour pouvoir les comprendre, et doivent ensuite être **appries** par cœur, jusqu'à pouvoir **réciter** définitions, règles et théorèmes (*voir* ci-après). C'est un bon entraînement pour les élèves de **travailler à deux**, de réciter et de s'interroger à tour de rôle. Le livre de mathématiques doit devenir un compagnon familier auquel on pourra même avoir recours l'année suivante. L'idéal étant de conserver précieusement ses livres de mathématiques des quatre années du collège.

## Le style mathématique

On verra apparaître, au fil des pages de ce livre, les mots suivants :

- **définition** (abrégé parfois en **déf.**) dit ce que signifie un mot mathématique nouveau,
- **proposition** (abrégé parfois en **prop.**) = propriété,
- **théorème** (abrégé parfois en **th.**) = propriété importante,
- **corollaire** (abrégé parfois en **cor.**) = conséquence.

On donne dans le livre (lorsque c'est possible) des définitions rigoureuses des termes que l'on utilise. Ensuite, on énonce (et démontre parfois) des propositions et des théorèmes. Pour formaliser les énoncés, on utilise des symboles  $\in$  (*voir* p. 55),  $\neq$  (*voir* p. 56),  $\Rightarrow$  (*voir* p. 106),  $\perp$  et  $\parallel$  (*voir* p. 38), etc. Leur définition précise et leur emploi sont donnés dans le livre aux pages que l'on vient d'indiquer. Faisons ici un survol :

symbole	lecture	exemple	traduction
$\in$	appartient	$A \in d$	$A$ est un point de $d$
$\neq$	différent	$1 \neq 0$	1 n'est pas nul
$\Rightarrow$	implique, alors	$x = 1 \Rightarrow x \neq 0$	si $x = 1$ alors il n'est pas nul
$\perp$	perpendiculaire	$d_1 \perp d_2$	$d_1$ et $d_2$ sont perpendiculaires
$\parallel$	parallèle	$d_1 \parallel d_2$	$d_1$ et $d_2$ sont parallèles

2. J.-L. Frot : *Mathématiques, exercices avec corrigés et rappels de cours pour ceux qui veulent s'initier pour de bon*, 6<sup>e</sup> à 3<sup>e</sup>, 2<sup>e</sup> édition révisée, Clovis (2020).

Prenons pour exemple l'énoncé suivant :

**Théorème 1.** (théorème des perpendiculaires) *Si deux droites **du plan** sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles.*

Il peut se formuler ainsi, les symboles  $d_1, d_2, d$  désignant des droites du plan :

$$(d_1 \perp d \text{ et } d_2 \perp d) \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$

Les textes mathématiques comportent parfois un vocabulaire lourd, pénible à écrire et à lire pour le débutant. Quand quelques abréviations et symboles peuvent alléger le style et mieux faire **comprendre l'essentiel**, on les utilise. Comparer :

“ Les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont parallèles d'après le théorème des perpendiculaires (*voir* théorème 1) ”

“  $d_1 \parallel d_2$  d'après le th. des perpendiculaires (*voir* th. 1) ”

On verra dans tout le livre, qu'abréviations et symboles mettent l'accent sur les **propriétés**, les **raisonnements**, et les **points importants**. Ils rendent le texte plus fluide, plus court, et donc plus facile à appréhender.

Ceci ne veut pas dire que l'auteur soit hostile ou indifférent au **beau style**. Ce qu'il veut ici, c'est donner au lecteur des modèles simples pour lui apprendre à réfléchir, raisonner et rédiger clairement.

## Le livre de sixième

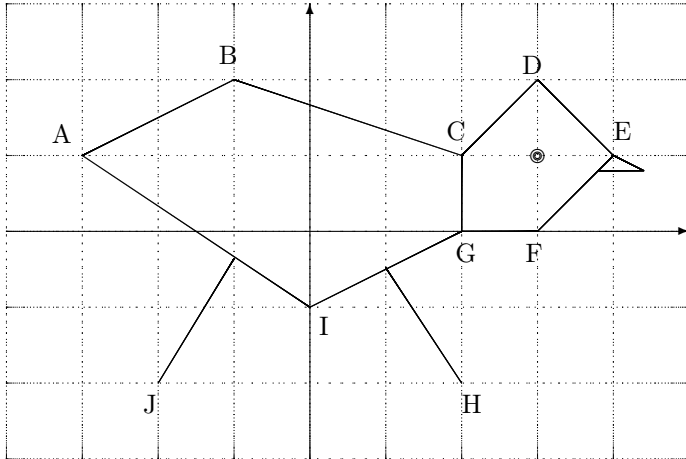
La première partie est consacrée à des révisions de cours moyen. On y trouvera les **définitions** précises des notions de base, les **propriétés** à connaître portant sur les nombres et sur les objets géométriques, de nombreuses figures (toutes originales). Il y a aussi un chapitre récapitulatif portant sur les symboles  $\in, <, >$ , etc. Pour s'entraîner ou se mettre à niveau, il y a une vingtaine d'exercices à chercher, et qui sont corrigés.

La seconde partie aborde le niveau de la classe de sixième. On commence par un peu d'arithmétique : diviseurs d'un entier  $a$ , division euclidienne de  $a$  par  $b$ . Ensuite viennent les équations. On introduit progressivement, pour ne pas effrayer le lecteur, quelques rudiments de calcul algébrique.

En géométrie, on définit les repères du plan. Les coordonnées, positives ou négatives, permettent de construire des figures très variées et d'aborder des exercices assez abstraits. On énonce et on pratique les **cinq théorèmes principaux** de la géométrie plane (§ 2, p. 107). Les propriétés de la **médiatrice** et des **triangles isocèles** sont utilisées pour justifier la construction “à la règle et au compas” de la médiatrice, de la bissectrice et de la hauteur. Nous étudions les symétries axiales, et nous introduisons la notation  $s(M)$  pour désigner le point symétrique de  $M$  par la symétrie  $s$ .

En géométrie dans l'espace, nous étudions le prisme droit. Nous définissons les angles de latitude et de longitude sur une sphère.

**Alors, hardi petits !**





# Table des matières

<b>Révisions de cours moyen</b>	<b>13</b>
<b>1 Les nombres</b>	<b>15</b>
1 Entiers . . . . .	15
2 Décimaux . . . . .	18
3 Fractions . . . . .	19
4 Exercices de révision sur les nombres . . . . .	21
5 Correction des exercices . . . . .	25
<b>2 Un peu d’algèbre</b>	<b>29</b>
1 Petites équations . . . . .	29
2 Nombres proportionnels . . . . .	30
3 Vitesse, distance, temps . . . . .	30
<b>3 Géométrie plane</b>	<b>33</b>
1 Points, droites, cercles . . . . .	33
2 Angles . . . . .	34
3 Triangles et polygones . . . . .	35
4 Droites parallèles, droites perpendiculaires . . . . .	38
<b>4 Les mesures géométriques</b>	<b>39</b>
1 Périmètres . . . . .	39
2 Aires . . . . .	40
3 Volumes . . . . .	42
4 Exercices pour réviser la géométrie . . . . .	45
5 Correction des exercices . . . . .	49
<b>5 Ensembles et relations</b>	<b>55</b>
1 Le symbole $\in$ . . . . .	55
2 Les symboles $=$ $\neq$ $<$ $>$ $\leq$ $\geq$ . . . . .	56
3 Exercices . . . . .	57
4 Correction des exercices . . . . .	58

<b>Classe de sixième</b>	<b>59</b>
<b>1 Arithmétique</b>	<b>61</b>
1 La division euclidienne . . . . .	61
2 Diviseurs d'un entier . . . . .	62
3 Nombres premiers . . . . .	64
4 Priorité des opérations . . . . .	66
5 Exercices . . . . .	67
6 Correction des questions . . . . .	70
7 Correction des exercices . . . . .	71
<b>2 Algèbre</b>	<b>73</b>
1 Équations avec multiplication ou division . . . . .	73
2 Équations avec addition ou soustraction . . . . .	74
3 Calcul algébrique . . . . .	76
4 Complément sur les fractions . . . . .	77
5 Utilisation des équations . . . . .	79
6 Exercices . . . . .	80
7 Correction des questions . . . . .	87
8 Correction des exercices . . . . .	89
<b>3 Coordonnées dans le plan</b>	<b>97</b>
1 Abscisse et ordonnée . . . . .	97
2 Calculs de distances particulières . . . . .	99
3 Exercices . . . . .	99
4 Correction des exercices . . . . .	101
<b>4 Géométrie plane</b>	<b>105</b>
1 Addition des distances et des angles . . . . .	105
2 Les cinq théorèmes principaux . . . . .	107
3 Losange . . . . .	108
4 Médiatrice d'un segment . . . . .	109
5 Bissectrice d'un angle . . . . .	111
6 Droites remarquables d'un triangle . . . . .	112
7 Triangle isocèle . . . . .	112
8 Symétrie axiale . . . . .	113
9 Exercices . . . . .	117
10 Correction des questions . . . . .	128
11 Correction des exercices . . . . .	131
<b>5 Géométrie dans l'espace</b>	<b>151</b>
1 Prisme droit et cylindre . . . . .	151
2 Volumes . . . . .	152
3 La sphère . . . . .	152
4 Latitude et longitude sur la Terre . . . . .	153
5 Exercices . . . . .	154
6 Correction des exercices . . . . .	157