Avant-propos

« Gouverner, c'est prévoir ; et ne rien prévoir, c'est courir à sa perte » (Emile de Girardin, La politique universelle, 1852)

Cet ouvrage est destiné aux bacheliers français qui souhaitent se préparer au cours de mécanique newtonienne enseigné en classes préparatoires aux grandes écoles, en première année de formation universitaire et d'écoles d'ingénieurs en cinq ans, et en année préparatoire ou propédeutique de divers établissements internationaux d'enseignement supérieur. L'objectif de cet ouvrage est d'apporter les connaissances et les savoir-faire nécessaires aux étudiants désireux de se « tester » en mécanique newtonienne, sur un certain nombre de thèmes qui seront approfondis durant la scolarité.

La mécanique newtonienne tient une place singulière dans l'histoire des sciences. Cette théorie révolutionnaire est bien sûr singulière de par son envergure monumentale et son universalité. Elle l'est aussi car elle est à la fois un aboutissement et un commencement.

La mécanique newtonienne est l'aboutissement d'un siècle de découvertes expérimentales et de remises en cause profondes de notre vision du monde. La nouvelle vision copernicienne de l'Univers (1542), les observations méticuleuses du mouvement des planètes par Tycho Brahé durant la seconde moitié du XVI^{e} siècle, leur mise en équation par Johannes Kepler ainsi que les observations de la Lune, des satellites de Jupiter et l'étude du mouvement des corps par Galilée, sont emblématiques d'un courant réformateur sans précédent. Cette nouvelle approche vise non plus à *sauver les apparences* mais à *expliquer les apparences*, en s'appuyant sur une analyse quantitative du réel centrée sur l'observation et sur la remise en cause d'hypothèses tenues pour vraies par principe.

Dans ses *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, (plus brièvement, les *Principia*, publiés en 1687 puis réédités en 1713 et en 1726), Isaac Newton énonce très clairement ses intentions. Sa nouvelle « philosophie expérimentale » est ancrée sur l'observation des phénomènes avant tout, en s'affranchissant de toute considération métaphysique. *Tout ce qui n'est pas déduit des phénomènes doit être rejeté au rang « d'hypothèse ». Les hypothèses, qu'elles soient physiques ou métaphysiques, qu'elles soient basées sur des propriétés mécaniques ou occultes,* *n'ont pas leur place dans cette philosophie expérimentale*[1]. Sur le plan méthodologique, Newton pose des règles qui seront à la base de la démarche scientifique moderne. *Des propositions particulières sont inférées à partir des phénomènes. Ces propositions font l'objet d'une généralisation par induction*[2]. Newton est l'héritier de cette volonté, forgée par ses aînés, d'expliquer le réel par l'observation et par l'analyse objective des faits.

La mécanique newtonienne est aussi un commencement car elle dévoile un nouveau monde, grâce aux capacités d'analyse et de prédiction quantitative qu'elle porte. L'étude de phénomènes physiques extraordinairement divers devient possible. La mécanique newtonienne est *la* clé majeure pour comprendre le mouvement des corps à la surface de la Terre, les forces de contact entre objets, le comportement de systèmes physiques simples mais universels tels que l'oscillateur harmonique, ou encore le mouvement des planètes dans le système solaire. La mécanique céleste est d'ailleurs l'une des illustrations les plus emblématiques de la mécanique newtonienne et de la théorie newtonienne de la gravitation : la découverte de la planète Neptune par le seul calcul (fondé sur la mécanique newtonienne), à partir des observations de la trajectoire de la planète Uranus et de ses perturbations, est probablement l'un des plus grands triomphes du *Monde Selon Newton*.

Ce monde newtonien accumulera les avancées scientifiques majeures durant près de deux siècles. La fin du XIXe siècle verra ce monde remis en cause par des observations inexplicables (par exemple, le résultat de l'expérience de Morley-Michelson ou l'avance du périhélie de Mercure). La mécanique newtonienne sera finalement supplantée au XXe siècle par des théories tout aussi révolutionnaires que le furent les *Principia* en leur temps. Cependant, même supplantée par les théories phares du XXe siècle que sont la théorie de la relativité restreinte et générale et la mécanique quantique, la théorie newtonienne montrera encore le chemin, indiquera des pistes. Elle suscitera, par ses limites, de nouvelles avancées en incitant les physiciens à revisiter les concepts newtoniens à l'aune relativiste et à l'aune quantique. La mécanique newtonienne invitera ainsi les successeurs de Newton à se jucher à leur tour sur ses propres épaules, pour que le regard de la Science sur le monde porte toujours plus loin.

Malgré ses limites, la mécanique newtonienne tient toujours une place prépondérante dans les sciences et techniques actuelles. Très employée dans de nombreux domaines de la recherche et de l'ingénierie, de par sa puissance prédictive et sa simplicité de mise en œuvre (toute la mécanique newtonienne tient dans trois lois et une équation

---

[1] Isaac Newton (1726). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, General Scholium, 3ème édition, page 943 de la traduction de I. Bernard Cohen et Anne Whitman, 1999, University of California Press.

[2] Idem.

fondamentale), la mécanique newtonienne est professée dans l'enseignement secondaire et dans les premières années de formation universitaire.

Etonnamment, la mécanique peut soulever auprès des étudiants une perplexité insoupçonnée, surtout s'ils se destinent à intégrer les formations préparatoires ou propédeutiques de grandes institutions internationales, très exigeantes en matière de savoir-faire technique et mathématique. Savoir passer de l'énoncé des lois de Newton à la résolution d'un problème physique concret requiert de maîtriser certaines subtilités calculatoires et surtout une méthode d'analyse rigoureuse. L'objectif de cet ouvrage est de répondre par avance à ces interrogations en fournissant les connaissances et les savoir-faire nécessaires. Ainsi préparé, le futur étudiant de première année disposera de tous les éléments pour aborder le cours de mécanique dans des conditions favorables.

L'ouvrage s'attache à exposer les thèmes fondamentaux de la mécanique newtonienne, sans prétendre à l'exhaustivité de tel ou tel programme. L'objectif est bien de construire un socle solide, sur lequel l'étudiant pourra s'appuyer en toute circonstance, quelle que soit sa formation. Le cours et les exercices d'application présentés dans cet ouvrage portent sur des sujets figurant en grande partie au programme des classes préparatoires aux grandes écoles, ainsi que de la première année des formations universitaires et des écoles d'ingénieurs en cinq ans. L'ouvrage s'adresse aussi aux étudiants inscrits en première année dans les grandes institutions internationales, dont la réputation mondiale et l'excellence de la formation attirent nos bacheliers en nombre croissant. Le niveau scientifique attendu, en début de formation, est très sensiblement supérieur à celui exigé pour le baccalauréat, notamment en mécanique. Dans ces établissements, comme dans de nombreux établissements d'enseignement supérieur français et écoles d'ingénieurs en cinq ans, la première année est une formation préparatoire ou propédeutique très sélective. Les cours se succèdent sans trêve, le rythme est soutenu, les notions à maîtriser s'accumulent massivement : insensiblement, les étudiants les moins préparés sombrent. Anticiper la première année, pour ces étudiants, est donc particulièrement souhaitable, pour minimiser ce handicap et « rester à flot », malgré l'intensité de la formation.

Certains des thèmes physiques abordés sont essentiellement calculatoires et peuvent nécessiter un *background* mathématique, souvent exposé postérieurement en cours de mathématiques (par exemple, le calcul du centre de gravité et de la matrice d'inertie d'un solide via des intégrales multiples), que ce soit en classes préparatoires aux grandes écoles ou en première année de formation universitaire ou d'ingénieur (en France ou à l'étranger). Dans ce cas, ces prérequis mathématiques sont développés avant de passer à la partie physique elle-même. D'autres thèmes nécessitent, aux yeux de l'auteur, une présentation historique et plus conceptuelle, qui éclaire la compréhension de tel ou tel point et justifie l'apparition de tel ou tel concept. Enfin, dans tous les chapitres sont développés des illustrations pratiques et des exercices d'application, résolus intégralement en insistant sur certains pièges à éviter, notamment sur certains points de technicité spécifiques, dont la maîtrise est indispensable pour réussir l'examen de mécanique. Le lecteur retrouvera ainsi, pour chaque sujet développé, un triptyque « prérequis mathématiques – la théorie – la pratique » (à défaut, un diptyque « théorie – pratique ») lui permettant d'évoluer en « terrain sûr ».

Après avoir présenté les trois lois de Newton et la méthode d'analyse permettant de mettre en œuvre ces lois (chapitre 1), on examine dans une première partie le volet cinématique de la deuxième loi de Newton et l'on présente tous les outils mathématiques pour étudier la trajectoire d'un corps : cinématique du point matériel en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques (chapitre 2), référentiel de Frénet (chapitre 3), référentiels non galiléens (chapitre 4). Le volet physique de la deuxième loi de Newton est exploré dans une deuxième partie, pour des systèmes assimilables à des points matériels, en abordant diverses situations physiques : forces de contact (chapitre 5), aspects énergétiques (chapitre 6), oscillateur harmonique (chapitre 7), gravitation universelle (chapitre 8), dynamique terrestre (chapitre 9). On aborde enfin, dans la troisième partie, les bases de la mécanique du solide indéformable (chapitres 10 et 11), dont l'analyse requiert une équation complétant la deuxième loi de Newton. Dans un post-scriptum sont présentées succinctement la mécanique analytique et les équations de Lagrange.

L'auteur tient à remercier les éditions Ellipses, tout particulièrement Paul de Laboulaye, et la société GeoGebra GmbH en la personne de Martha Zellinger (Partnerships Team). L'auteur tient aussi à remercier tous ceux et toutes celles qui ont contribué à faire progresser ce texte, en particulier Aude Charbonnel (professeur en sciences nautiques, École nationale supérieur maritime), François De Gandt (professeur émérite à l'Université Lille 3, ancien membre du Centre Alexandre Koyré), Jean-Philippe Duranthon (CGEDD, Ministère de la transition écologique) et Craig A. Kluever (LaPierre Professor of Mechanical and Aerospace Engineering, University of Missouri-Columbia).

Table des matières

Chapitre 1 - Les trois lois de Newton

Les trois lois de Newton constituent le cœur de la mécanique newtonienne. Enoncées dans les *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (les *Principia*), elles fournissent tous les outils nécessaires pour poser et analyser un problème physique, par exemple pour prédire le mouvement d'un corps et l'évolution des forces qui s'exercent sur lui. Pour être mises en œuvre correctement, ces lois doivent être manipulées en s'appuyant sur une méthode rigoureuse.

L'objet de ce chapitre introductif est de présenter les lois de Newton, de préciser leur signification et les concepts physiques mobilisés dans ces lois. Ce chapitre évoque aussi la façon dont ces concepts ont pu évoluer dans le temps. On présente ensuite, sur un exemple concret, la méthodologie à suivre pour traiter un problème physique simple.

I. Les *Principia* de Newton

Dans ses *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (les *Principia*), Isaac Newton pose les bases d'une nouvelle physique qui va révolutionner notre compréhension du monde. Il pose aussi une méthode d'analyse rationnelle fondée sur l'expérimentation et non sur des idéologies énoncées par principe. Il pose enfin les bases d'une théorie de la gravitation universelle, dont la puissance prédictive sera la source de découvertes considérables, notamment en mécanique céleste.

La mécanique céleste joue d'ailleurs un rôle essentiel dans la gestation des *Principia.* Le jeune Newton fait déjà le lien entre le mouvement de la Lune autour de la Terre, vu comme une chute perpétuelle de notre satellite autour de notre planète, et la chute des corps à la surface de la Terre. Cette intuition initiale permettra à Newton de comprendre que la trajectoire de la Lune illustre une situation limite de la chute d'un corps dans le champ de pesanteur terrestre. La révolution copernicienne, l'observation des trajectoires planétaires par Tycho Brahé, à partir desquelles Johannes Kepler découvrira ses trois célèbres lois[1], elles-mêmes appliquées au mouvement des satellites galiléens de Jupiter, fournissent à Newton des ingrédients

[1] Première loi : les planètes décrivent une trajectoire elliptique dont le Soleil occupe l'un des foyers. Deuxième loi : le segment reliant une planète au Soleil balaie des aires égales en des temps égaux. Troisième loi : le quotient du cube du grand-axe et du carré de la période de révolution d'une planète autour du Soleil est identique pour toutes les planètes du système solaire.

conceptuels, théoriques et observationnels essentiels à son œuvre. Ultérieurement, la mécanique newtonienne et la théorie newtonienne de la gravitation permettront de calculer la trajectoire des comètes, de modéliser les marées, de déterminer la forme de la Terre, avec une précision extraordinaire, venant confirmer (et couronner) l'œuvre monumentale de Newton.

L'histoire nous dit qu'en janvier 1684, Edmund Halley exposa à Christopher Wren et à Robert Hooke une conséquence très importante de la troisième loi de Kepler : cette loi implique que la force d'attraction exercée par le Soleil sur une planète est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance planète-Soleil. Un pari s'ensuivit : une récompense d'une valeur de 40 shillings serait versée par C. Wren à celui qui démontrerait qu'une telle force en « $1/r^2$ » implique que la trajectoire des planètes est elliptique. R. Hooke échoua dans cette entreprise mais E. Halley soumit la question à Isaac Newton. Par son rôle de stimulateur, de critique et de soutien (incluant une contribution décisive à l'impression et à l'édition des *Principia*), E. Halley joua un rôle crucial dans la diffusion de cette œuvre monumentale.

Les *Principia* comportent trois « livres » précédés de deux sections. La première, intitulée « Définitions », pose les concepts fondamentaux de la mécanique newtonienne (masse, quantité de mouvement, force, etc.). La seconde, intitulée « Axiomes, lois du mouvement », énonce les trois lois de Newton.

Ces lois, déduites essentiellement d'un certain nombre d'expériences menées notamment par Galilée, permettent de comprendre et de prédire le comportement d'une multitude de systèmes physiques. Passons en revue ces lois.

II. La première loi : inertie et mouvement rectiligne uniforme

La première loi de Newton peut être formulée ainsi :

Un corps persiste dans son immobilité ou dans son mouvement de translation rectiligne et uniforme dès lors qu'il n'est soumis à aucune force externe.

II.1. Inertie, mouvement naturel d'un corps

Cette loi reprend la **loi de l'inertie**, formulée antérieurement par Galilée pour des mouvements horizontaux à la surface terrestre, puis amendée et généralisée par Descartes. Jusqu'à cette époque, on croyait qu'il faut appliquer une force à un corps pour qu'il persiste dans son mouvement (de translation par exemple), en vertu notamment d'un principe énoncé par Aristote : « partout où il y a mouvement, il y a une force externe à l'origine de ce mouvement ». Ce principe aristotélicien se comprend dans la mesure où toutes les situations observées sur Terre, à cette époque, indiquaient qu'il faut agir sur un corps pour le faire se mouvoir. Le tour de force de Galilée et de Newton a été de dépasser ces situations concrètes pour imaginer une situation idéale, jamais observée sur Terre, pour laquelle un corps n'est réellement soumis à aucune force externe.

La première loi redéfinit ainsi le mouvement naturel d'un corps, en l'absence de toute influence externe, en invoquant la notion d'**inertie**, qui est la tendance d'un corps à résister à tout changement de mouvement. La deuxième loi de Newton introduira une quantité décrivant quantitativement cette capacité de résistance au changement.

II.2. Force, action exercée sur un corps

En outre, la première loi porte en elle la notion de **force** ou d'influence **externe**, définie par Newton comme une action exercée sur un corps pour modifier son état d'immobilité ou son mouvement de translation rectiligne et uniforme. Les formes revêtues par cette action sont variées, comme le souligne Newton dans la définition n°4 des *Principia* : « la force imprimée peut avoir diverses origines, choc, pression, force centripète ». La notion d'action externe est très intuitive lorsqu'on parle de force de contact : force de traction, de réaction d'un support, de frottement, etc. Elle l'est moins lorsqu'il s'agit d'une force agissant à distance, par exemple de la force de gravité qui s'exerce entre la Terre et la Lune : comment la Lune peut-elle « savoir » que la Terre exerce sur elle une force gravitationnelle ?

En tout état de cause, une force est caractérisée par un vecteur : elle a une direction, un sens et une intensité. Les forces appliquées sur un corps se combinent selon le principe de superposition et de la force « nette » : l'effet de plusieurs forces sur un corps est la somme des effets de chacune des forces appliquées. On reviendra sur la notion de force dans le cadre de la deuxième loi.

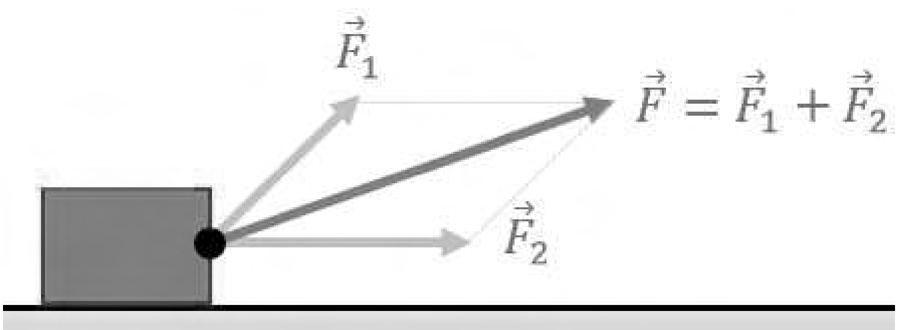

Figure 1-1 (principe de superposition) : l'effet cumulé des deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ est identique à l'effet d'une seule force $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

II.3. Référentiels inertiels

La première loi requiert implicitement l'usage d'un **référentiel**, mais comment définir celui-ci ? Pour déterminer si un corps est immobile ou en mouvement, il faut rapporter sa position à un système de référence « faisant foi ». Dans certains référentiels, la première loi n'est pas satisfaite. Par exemple, imaginons être à bord d'un bus en accélération sur une route plane et horizontale, et posons un ballon, sans lui donner de vitesse initiale, sur le plancher de ce bus : le ballon se met à rouler sur le plancher de ce bus, alors que dans le référentiel fixe par rapport au bus, ce ballon ne subit aucune force externe[2]. Ce référentiel n'est donc pas adapté à l'usage de la première loi de Newton.

Newton introduit deux notions : l'**espace absolu**, fait de vide et distinct de tous les corps matériels, et le **temps absolu**, qui s'écoule uniformément et indépendamment de tout événement survenant dans l'Univers. Newton distingue, d'une part, ces deux entités absolues et, d'autre part, les mesures de longueur et de durée que nous réalisons dans la vie quotidienne, qui relèvent selon Newton d'entités distinctes, les espaces et les temps relatifs. Autrement dit, lorsque nous effectuons de telles mesures, nous nous référons à des repères relatifs (c'est-à-dire à des objets matériels qui nous servent de points de repère pour nos mesures) et non à un référentiel absolu : nous ne mesurons donc qu'un mouvement relatif des corps, et non leur mouvement absolu par rapport à l'espace absolu.

Les notions d'espace et de temps newtoniens, qui paraissent très intuitives, n'allaient pas de soi dans le passé. De l'antiquité jusqu'au XVIIIè siècle, de nombreux penseurs (dont Platon, Aristote, Leibniz et Berkeley) ont considéré que l'espace et le temps en tant qu'entités en soi n'existent pas et que l'Univers est un continuum matériel. Pour eux, l'espace absolu en tant qu'entité faite de vide est une fiction commode pour mesurer la position des corps constituant ce continuum. De même, le temps n'existe que par les changements qui se produisent dans l'Univers : le temps n'est donc qu'une mesure de ces changements.

Pour étudier le mouvement relatif des corps, Newton utilise une famille de référentiels particuliers, en mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à l'espace absolu : les **référentiels inertiels** ou **galiléens**. Ces référentiels sont précisément ceux dans lesquels la première loi de Newton est satisfaite. Mais, concrètement, comment vérifier expérimentalement qu'un référentiel est bien galiléen ?

De façon pragmatique, tout dépend de l'expérience de physique réalisée. Pour étudier le mouvement d'un corps soumis à des forces, on supposera en général que le référentiel utilisé est galiléen si, en l'absence des forces jugées importantes pour décrire correctement l'évolution du corps, ce dernier est immobile ou en mouvement de translation rectiligne et uniforme. Par exemple, si l'on étudie la chute d'un corps dans un laboratoire de petite taille, à l'intérieur d'un bâtiment, on pourra supposer que le référentiel lié au laboratoire est galiléen, alors même qu'il est lié à la Terre, en rotation autour de son axe. En revanche, si le corps est lâché dans le puits d'une mine, d'une profondeur de 158 mètres (expérience de Reich, 1833), on constate une

---

[2] Mis à part la force de réaction du support, qui ne contribue pas à la mise en mouvement du ballon.

déviation de 28 mm vers l'est du point de chute, qui révèle le caractère non galiléen d'un référentiel fixe par rapport à la surface terrestre.

Une famille de référentiels privilégiés, les référentiels galiléens, dans lesquels la première loi de Newton est valable, est ainsi mise en avant. Ces référentiels sont en mouvement de translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

Pour changer de repère, on invoque les transformations galiléennes, en vertu desquelles les coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') d'un même événement, observé dans deux repères galiléens $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$, sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \qquad (1\text{-}1)$$

où le repère $(\mathcal{R}')$ se déplace à la vitesse V constante, parallèlement à l'axe des x, par rapport à $(\mathcal{R})$. Dans ce cadre, le temps est absolu. Enfin, si un corps se déplace le long de l'axe des x, à une vitesse v (resp. v') relativement à $(\mathcal{R})$ (resp. $(\mathcal{R}')$), ces vitesses sont liées par la relation :

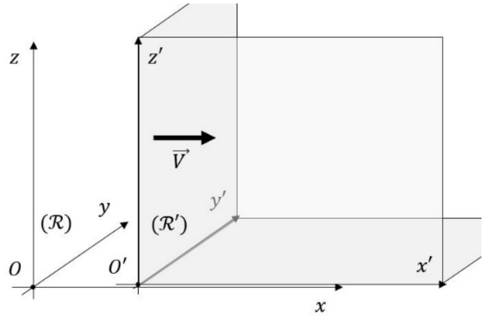

Figure 1-2 : deux repères galiléens en mouvement l'un par rapport à l'autre.

$$v' = v - V \qquad (1\text{-}2)$$

Cette famille de référentiels privilégiés possède une caractéristique particulière : les lois de la mécanique newtonienne sont invariantes par changement de référentiel galiléen.

Les notions d'espace et de temps absolus seront remises en cause à la fin du XIXè et au début du XXè siècle. Une nouvelle théorie « cadre », formalisant les concepts d'espace et de temps relatifs, sera développée en 1905 (théorie de la relativité restreinte).

II.4. Invariance

La notion d'**invariance** des lois de la physique, par changement de repère via des transformations de référence (par exemple, les transformations de Galilée), joue un rôle considérable, érigé au rang de principe. Une loi physique qui satisfait ce principe d'invariance est réputée décrire une réalité physique fondamentale, par le fait même que sa formulation s'affranchit du caractère particulier et tel ou tel référentiel. Disposer d'une famille de référentiels « faisant foi » et de transformations entre ces référentiels permet donc de tester la généralité d'une loi et de disposer d'une sorte de « juge de paix ». Les lois de la mécanique newtonienne sont invariantes par les transformations de Galilée, qui furent ces juges de paix jusqu'à la fin du XIXe siècle.

Les équations de Maxwell, publiées en 1865[3], se sont imposées comme des lois fondamentales de l'électromagnétisme classique. Pourtant, ces équations ne sont pas invariantes par les transformations de Galilée, dont le rôle de « juge de paix » fut alors remis en cause. Au début du XXe siècle, les transformations de Galilée seront supplantées par les transformations de Lorentz. Dans l'espace-temps quadridimensionnel de Minkowski, où le temps n'est plus absolu, sera développée la théorie de la relativité restreinte. Les lois de la mécanique relativiste et les équations de Maxwell sont invariantes par transformation de Lorentz.

III. La deuxième loi : force, quantité de mouvement, masse et accélération

La deuxième loi de Newton est la loi centrale de la mécanique newtonienne. Grâce à elle, on peut écrire les équations qui régissent le mouvement d'un corps soumis à des forces et décrire quantitativement toutes les grandeurs physiques caractérisant la situation physique étudiée.

Si l'on applique des forces externes $\vec{F_i}$ à un corps, sa quantité de mouvement $\vec{p}$ varie dans le sens et dans la direction de la force nette appliquée. Cette variation est d'autant plus élevée que l'intensité de la force appliquée est grande. Mathématiquement, $\vec{p} = m\,\vec{v}$ ($\vec{v}$ est la vitesse du corps) et :

$$\sum_{\substack{Forces\\externes}} \vec{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \qquad (1\text{-}3)$$

La deuxième loi de Newton établit le lien entre la cinématique d'un corps (quel est son mouvement ?) et la physique à laquelle il est soumis (quelles forces subit-il ?). Le membre de droite de l'équation (1-3) porte le volet cinématique de la loi (quantité de mouvement, donc vitesse, donc trajectoire). Le membre de gauche en porte le volet physique (quelles sont les forces externes qui modifient le mouvement du corps ?). La deuxième loi révolutionne la physique en établissant une relation mathématique entre la force nette appliquée et la dérivée de $\vec{p}$ (et non entre la force nette et la quantité de mouvement elle-même, comme on le pensait depuis Aristote).

Si la masse totale du corps étudié est constante, l'équation (1-3) prend la forme simplifiée suivante :

$$\sum_{\substack{Forces\\externes}} \vec{F_i} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad (1\text{-}4)$$

[3] Les équations de Maxwell furent récrites sous leur forme définitive par O. Heaviside en 1884.

où $\vec{a}$ est l'accélération du corps. L'équation (1-4) permet de reformuler la deuxième loi de Newton sous la forme suivante :

Si l'on applique des forces externes $\vec{F}_i$ à un corps de masse constante, celui-ci accélère dans le sens et la direction de la force nette appliquée. Cette accélération, notée $\vec{a}$, est d'autant plus élevée que l'intensité de la force appliquée est grande. Le coefficient m de proportionnalité entre la force nette et l'accélération est appelée masse du corps.

Pour un système à masse variable (une fusée, son combustible et son comburant, par exemple), la masse totale varie dans le temps et $d\vec{p}/dt = m\, d\vec{v}/dt + \vec{v}\, dm/dt$.

Le mouvement du corps est conditionné par la somme des forces externes $\vec{F}_i$ appliquées sur ce dernier. Ces forces externes modifient la dérivée de sa quantité de mouvement, donc sa vitesse $\vec{v}$. Si la vitesse est constante, l'accélération est nulle et on peut conclure que la force nette appliquée est nulle. Réciproquement, si la force nette appliquée est nulle, il en est de même pour l'accélération : la vitesse du corps est constante. La deuxième loi de Newton généralise la première loi et l'inclut comme cas particulier. La position $\vec{r}$ du corps est donnée par la relation $\vec{v} = d\vec{r}/dt$.

III.1. Action à distance

La deuxième loi de Newton mobilise la notion de **force**, déjà évoquée pour la première loi. Cette notion est moins intuitive qu'il n'y paraît : on peut comprendre qu'une force exercée par contact sur un solide en modifie le mouvement, mais qu'en est-il pour une force exercée à distance, par un objet sans contact physique avec le solide. Comment expliquer cette « action à distance » ? Comment la Terre « sait-elle » que le Soleil exerce sur elle une force de gravitation et qu'il guide le mouvement de révolution de notre planète autour de notre étoile ? De façon plus générale, qu'est-ce qu'une force agissant à distance ? Par quel mécanisme physique, analysable expérimentalement, une force peut-elle s'exercer à distance entre deux corps ?

Isaac Newton s'interroge lui-même dans une correspondance privée[4] : « Comment un corps peut-il agir en un lieu où il n'est pas ? ». Newton introduit la notion de force centripète pour définir la gravitation universelle d'une manière neutre, qui dispense d'en spécifier précisément la cause. Cette façon de procéder ne satisfait cependant pas pleinement Newton qui écrit, dans la dernière page des *Principia* : « je n'ai pas encore réussi à donner la cause de la pesanteur ». Au XX[e] siècle, deux paradigmes vont émerger pour expliquer ce phénomène d'action à distance que peuvent subir des objets physiques.

Le premier est porté par la théorie de la relativité générale. Dans le cadre de cette théorie de la gravitation relativiste, l'espace et le temps sont rassemblés dans un objet géométrique quadridimensionnel (l'espace-temps), au sein duquel se déplacent tous

[4] Lettre à R. Bentley.

les objets physiques. L'espace-temps n'est pas « rigide » : un objet massif courbe l'espace-temps dans des proportions qui dépendent (notamment) de la masse de cet objet. Cette **courbure de l'espace-temps** matérialise le champ gravitationnel engendré par l'objet. La courbure engendrée par une source distante de gravité dicte localement la trajectoire d'un corps : on dit que ce corps suit une géodésique de l'espace-temps courbé.

Le second paradigme est porté par les théories développées, durant le XXe siècle, pour décrire les interactions fondamentales de la nature dans un cadre quantique. Dans ce cadre théorique, quatre « forces » fondamentales gouvernent l'ensemble des interactions entre les particules dans l'Univers : la gravitation, l'électromagnétisme, l'interaction faible[5] (responsable de la radioactivité) et l'interaction forte (responsable de la cohésion des noyaux atomiques). Les physiciens ont construit une théorie qui, pour ces trois dernières interactions, leur associe une ou plusieurs particules « médiatrices ». Une **particule médiatrice** est destinée à être échangée entre des particules en interaction. Si ces dernières sont en interaction électromagnétique, elles vont « échanger » la particule associée à cette force : le photon. Des particules en interaction faible vont échanger l'une des trois particules médiatrices spécifiques à cette force (boson W^+, W^- ou Z_0). L'interaction forte est assortie de huit particules médiatrices, les gluons. Les particules médiatrices échangées par des particules en interaction leur permettent de « savoir » selon quel type de force elles interagissent et surtout comment leur quantité de mouvement, leur énergie, etc., sont modifiées par la « force » qu'elles subissent. L'action à distance entre particules est donc expliquée par l'échange de particules médiatrices. La gravitation est, à ce jour, la seule à n'avoir pas pu être transposée de façon satisfaisante dans le monde quantique. On spécule cependant l'existence d'une particule médiatrice de la gravitation (le graviton).

III.2. Masse inerte et masse grave

La forme (1-4) de la deuxième loi de Newton indique que l'accélération d'un corps et la force nette subie par ce dernier sont proportionnelles. Le facteur de proportionnalité est la masse du corps étudié, souvent qualifiée de **masse inertielle** ou de « **masse inerte** ». La masse inerte peut être comprise comme un coefficient de résistance au changement de trajectoire du corps. En effet, si l'on applique une force donnée à un corps de faible masse inerte, son accélération sera élevée (du fait que force = masse × accélération) et donc son mouvement sera fortement modifié. Si la même force est appliquée à un corps de masse inerte élevée, l'accélération communiquée sera faible et son mouvement sera faiblement modifié. La masse inerte est une propriété intrinsèque du corps étudié : elle ne dépend pas de la nature des forces appliquées.

---

[5] Les interactions faible et électromagnétique ont été unifiées dans les années 1960 par S. Glashow, S. Weinberg et A. Salam, dans le cadre de leur théorie de l'interaction électrofaible.

Conceptuellement, la masse inerte n'a rien à voir avec une « autre » masse, invoquée lorsqu'on parle du « poids » d'un corps, par exemple lorsqu'on écrit $\vec{P} = m\vec{g}$, où $\vec{g}$ est le champ de gravité en un point de la surface de la Terre. Cette masse m décrit la façon dont un corps « réagit » à la gravité qui règne en ce lieu : elle nous dit que la force gravitationnelle appliquée à ce corps est d'autant plus forte que sa masse m est élevée (on parle alors de « **masse grave** »). La masse grave est l'homologue de la charge électrique q d'une particule qui, plongée dans un champ électrique $\vec{E}$, subit une force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$. La masse grave et la charge électrique caractérisent la sensibilité d'un corps aux champs de force gravitationnel $\vec{g}$ et électrique $\vec{E}$. On pourrait qualifier la masse grave de « charge gravitationnelle », homologue de la charge électrique q. Cette masse grave est spécifique à la force gravitationnelle et n'a pas de lien direct avec la capacité de résistance au changement incarnée par la masse inerte.

De nombreuses expériences ont été menées dans l'histoire pour mettre en évidence une différence de valeur entre masse grave et masse inerte, sans succès à ce jour. Ainsi, nous faisons face à deux masses (inerte et grave) conceptuellement distinctes mais expérimentalement identiques. Un **principe d'équivalence faible** a été adopté, qui rend compte de ce constat. Nous n'hésiterons donc pas à écrire la deuxième loi de Newton sous la forme suivante, pour un corps plongé dans un champ de gravité :

$$\vec{P} = \underbrace{m}_{grave} \vec{g} = \underbrace{m}_{inerte} \vec{a}$$

III.3. Détails pratiques d'utilisation

Voici quelques détails pratiques pour l'utilisation des équations (1-3) et (1-4) :

- La deuxième loi de Newton permet deux démarches : connaissant les forces externes appliquées, calculer la trajectoire du corps ; connaissant la trajectoire du corps, déterminer la force externe nette appliquée ;
- La deuxième loi invoque les forces externes appliquées : il faut donc bien définir le système étudié et le distinguer de son environnement. Les forces externes sont celles appliquées par l'environnement du système sur ce dernier.
- L'équation obtenue grâce à la deuxième loi étant vectorielle, il faut choisir un référentiel (coordonnées cartésiennes, polaires, sphériques, etc.) pour la projeter sur ses axes et obtenir une ou plusieurs équations scalaires (non vectorielles) ;
- Les équations projetées sont des équations différentielles d'ordre 2 : il faut donc maîtriser les méthodes de résolution de ce type d'équation. Ces équations sont assorties de conditions initiales (la position et la vitesse initiales du corps), qui sont indispensables à la résolution.

IV. La troisième loi : action et réaction

La troisième loi de Newton, encore appelée loi de l'action et de la réaction, peut s'énoncer comme suit :

Pour toute action, il existe une réaction égale en intensité et contraire en direction. L'action mutuelle de deux corps l'un envers l'autre est toujours égale en intensité et elle s'opère selon des sens opposés.

Autrement dit, si un corps A exerce une force $\vec{F}$ sur un corps B distinct de A, alors le corps B exerce la force $-\vec{F}$ sur le corps A. La troisième loi s'applique non seulement aux forces de contact mais aussi aux forces exercées à distance. Ainsi, la force gravitationnelle exercée par la Terre sur une pomme en chute libre est assortie d'une force égale en intensité mais de sens opposé, exercée par la pomme sur la Terre. Cependant, l'accélération communiquée à la pomme est élevée car sa masse est faible (donc la pomme se déplace beaucoup), alors que la Terre subit une accélération très faible parce que sa masse est très supérieure (donc la Terre ne se déplace pratiquement pas).

La troisième loi de Newton se distingue de la deuxième loi, dans la mesure où la deuxième loi s'applique à un corps donné pour déterminer son mouvement, alors que la troisième loi concerne les forces que deux corps exercent l'un sur l'autre mais ne dit rien sur leurs mouvements respectifs. La troisième loi induit la conservation de la quantité de mouvement.

V. Résoudre un problème de mécanique : soyons méthodiques !

A première vue, il peut sembler difficile d'utiliser les lois de Newton pour étudier un problème physique concret. Pour y parvenir, il faut **appliquer une méthode** : on reformule d'abord le problème en clarifiant certains aspects, on invoque ensuite les lois de Newton (notamment, la deuxième), on résout enfin les équations obtenues. Illustrons cette méthode sur un exemple très simple.

> **Problème posé :** Un mobile assimilé à un point matériel glisse à la surface d'un plan horizontal. On suppose que ce mobile subit l'action d'un champ de gravité constant, ainsi qu'une force de frottement (causée par la surface de glissement), de sens opposé au mouvement du solide et dont la norme est proportionnelle à la réaction normale du support (on notera f_d le coefficient de proportionnalité).
>
> Pour simplifier l'étude, on suppose que le mobile est astreint à se déplacer le long d'un axe, par exemple au moyen d'un système de rails latéraux sans frottement et parfaitement ajustés, garantissant une trajectoire parfaitement rectiligne du mobile. Sa vitesse initiale est supposée parfaitement colinéaire à l'axe des rails

latéraux. On pourra donc analyser le problème en supposant la trajectoire rectiligne.

Déterminer la loi du mouvement de ce mobile, sachant qu'à un instant initial, il se trouve au point O et a pour vitesse $v_0 = 5\ m/s$. Au bout de combien de temps s'immobilise-t-il ? Quelle distance a-t-il parcouru ? On prendra : $g = 9.81\ m/s^2$ et $f_d = 0.5$.

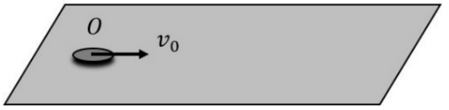

Figure 1-3 : mobile glissant sur un plan horizontal (rails latéraux non représentés).

On va résoudre ce problème en appliquant une méthode en sept étapes.

- 1 - Définir le système étudié. Cette question est importante car elle facilite l'identification des forces externes qui s'exercent sur le mobile.

  Le système étudié est le mobile en mouvement. Il est assimilé à un point matériel de masse m : le mouvement étudié se réduit à une simple translation, sans rotation du mobile autour de lui-même (par exemple).

- 2 - Dresser la liste des forces externes appliquées. Il faut bien distinguer les forces externes, les seules à prendre en compte, des forces internes (par exemple, les interactions entre les particules constituant le système étudié). Pour chaque force identifiée, il faut connaître son expression vectorielle (sens, direction, intensité) et son point d'application.

  Le mobile est soumis à trois forces externes (on ne traite pas l'action des rails de guidage sur le mobile) :

  – La force de gravité, notée $\vec{P} = m\vec{g}$, où $\vec{g}$ est le champ de gravité, supposé constant, vertical et dirigé vers le bas (on pose $g = \|\vec{g}\|$) ;

  – La force de réaction normale du support (plan horizontal), notée $\vec{N}$; cette force est verticale et dirigée vers le haut ;

  – La force de frottement du support, notée $\vec{F}$; cette force est tangente au support : elle est donc horizontale, de sens opposé au mouvement (c'est-à-dire à la vitesse du mobile), et sa norme est telle que : $\|\vec{F}\| = f_d\|\vec{N}\|$.

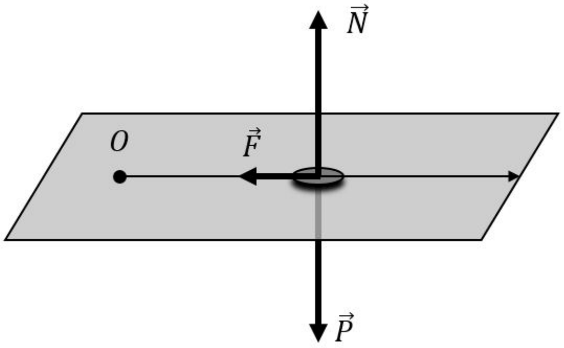

Figure 1-4 : forces externes appliquées (rails de guidage non représentés).

- 3 - Ecrire la deuxième loi de Newton[6] (1-3) ou (1-4), qui relie mathématiquement le bilan global des forces externes appliquées au système à son accélération et à sa masse m.

  L'application de la deuxième loi de Newton permet d'écrire :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}$$

  où $\vec{a}$ est l'accélération du mobile.

- 4 - Choisir un système de référence (point origine et vecteurs de base formant un repère orthonormé direct), sur lequel l'équation vectorielle (1-3) ou (1-4) va être projetée, composante par composante. L'astuce consiste à choisir le repère qui simplifie le plus les équations et les calculs (coordonnées cartésiennes, polaires, sphériques, repère local de Frenet, etc.).

  Il est très important de choisir un trièdre orthonormé direct, qui garantit l'exactitude des calculs et évite un certain nombre de problèmes de signe sur les angles, qui interviennent tôt ou tard dans les formules. *Nota bene* : les dérivées première et seconde, par rapport au temps t, d'une quantité X, sont traditionnellement notées : $\dot{X} = dX/dt$ et $\ddot{X} = d^2X/dt^2$.

  On choisit le repère cartésien $(Oxyz)$ suivant, qui semble le plus adapté :
  - Origine du repère : le point O occupé par le mobile à l'instant $t = 0$;
  - Axe des abscisses x (Ox) : vecteur de base $\vec{e}_x$ horizontal, colinéaire et de même sens que la vitesse initiale $\vec{v}_0$ (donc $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ avec $v_0 > 0$) ;
  - Axe des cotes z (Oz) : vecteur de base $\vec{e}_z$ vertical, orienté vers le haut ;
  - Pour mémoire, axe des ordonnées y (Oy) : vecteur de base $\vec{e}_y$ horizontal, tel que $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ forment un trièdre orthonormé direct.

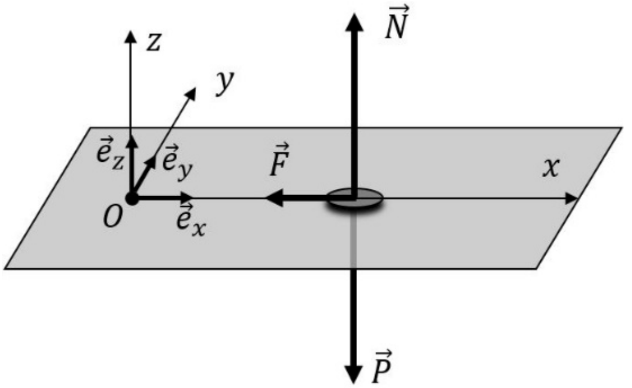

Figure 1-5 : référentiel (Oxyz) choisi

[6] Parfois, des équations supplémentaires doivent être écrites, mais dans le cas d'un système assimilable à un corps ponctuel (on parlera de point matériel), cette équation vectorielle est suffisante.

Ceci permet d'exprimer les forces et l'accélération du mobile comme suit :

$\vec{P} = -mg\vec{e}_z$, $\vec{N} = N\vec{e}_z$, $\vec{F} = F_x\vec{e}_x$ avec $\|\vec{F}\| = f_d|N|$, $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$

La formulation de $\vec{F}$ et de $\vec{a}$ est simplifiée par le fait que le mouvement est rectiligne, le long de l'axe (Ox). Le mobile étant supposé glisser sans tressauter à la surface du support, on a $z = 0$.

- 5 - Projeter l'équation obtenue à l'étape 3 sur les axes du système de référence choisi. Dans un espace tridimensionnel de la physique classique, cela donne lieu à trois équations scalaires dont les inconnues sont en général les composantes du vecteur position du système (ainsi que celles de sa vitesse et de son accélération). On obtient ainsi les équations du mouvement.

Projetant l'équation obtenue à l'étape 3, on obtient :

- Axe (Ox) : $F_x = m\ddot{x}$;
- Pour mémoire, axe (Oy) : $m\ddot{y} = 0$ $(y = 0)$;
- Axe (Oz) : $N - mg = m\ddot{z} = 0$.

- 6 - Ecrire les conditions initiales du mouvement, c'est-à-dire les valeurs de la position et de la vitesse à l'instant initial $(t = 0)$.

Les conditions initiales du mouvement sont les suivantes :

- Position : $x = y = z = 0$
- Vitesse : $\dot{x} = v_0 > 0, \dot{y} = \dot{z} = 0$

- 7 - Résoudre les équations du mouvement en commençant par celles dont la résolution est la plus simple. Parfois, les équations sont couplées et il faut utiliser des méthodes plus sophistiquées pour les résoudre.

Axe (Oz) : le mobile est supposé rester en contact permanent avec le plan horizontal (il ne « saute » pas à sa surface). On peut conclure que :

$$N = mg = constante > 0$$

Axe (Ox) : on a $\|\vec{F}\| = f_d|N| = f_d mg$, d'où : $F_x = -f_d mg$, la force étant de sens opposé à la vitesse.

L'équation différentielle à résoudre est donc :

$$\ddot{x} = F_x/m = -f_d g = constante.$$

Par intégration, et tenant compte de l'égalité $\dot{x}(t = 0) = v_0$, on a :

$$\dot{x}(t) = -f_d gt + \dot{x}(t = 0) = v_0 - f_d gt.$$

En intégrant une nouvelle fois, on obtient :

$$x(t) = v_0 t - f_d g\, t^2/2 + x(t = 0) = v_0 t - f_d g\, t^2/2$$

car $x(t = 0) = 0$.

Le mobile s'arrête au temps T tel que $\dot{x}(T) = v_0 - f_d gT = 0$, soit :

$$T = v_0/f_d g.$$

Il a parcouru la distance $x(T) = v_0 T - f_d g\, T^2/2 = v_0^2/(2f_d g)$.

A.N. : $T = 5/(0.5 \times 9.81) \approx 1.02s$, $x(T) = 25/(2 \times 0.5 \times 9.81) \approx 2.55m$

VI. Une feuille de route pour cet ouvrage

L'exemple présenté plus haut montre l'importance de la deuxième loi de Newton. Celle-ci permet de lier le mouvement du corps étudié aux forces externes qui s'exercent sur lui. Le membre de gauche de cette deuxième loi décrit la physique du système (les forces appliquées), alors que son membre de droite décrit la cinématique de ce dernier (sa trajectoire dans le temps) :

$$\underbrace{\sum_{\substack{Forces \\ externes}} \vec{F}_i}_{volet\ physique} = \underbrace{m\,\vec{a}}_{\substack{volet \\ cinématique}} \tag{1-5}$$

Dans la première partie de cet ouvrage, nous examinerons le volet cinématique de la deuxième loi de Newton. Nous verrons qu'il faut choisir judicieusement le référentiel d'étude pour faciliter l'écriture et la résolution des équations du mouvement (étapes 5, 6 et 7). Divers choix sont possibles : systèmes de coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques ou sphériques (chapitre 2) ; repère de Frénet (chapitre 3) ; référentiel non galiléen (chapitre 4).

Dans la deuxième partie, nous aborderons le volet physique de la deuxième loi, pour des systèmes assimilables à des points matériels. Nous verrons que la forme mathématique des forces dépend bien sûr du problème physique étudié (étapes 1, 2, 3 et 4) et nous verrons comment résoudre les équations du mouvement dans diverses situations physiques. On étudiera d'abord les forces de contact : réaction normale d'un support, forces de frottement sec et fluide, physique des poulies (chapitre 5). On abordera ensuite les notions d'énergie cinétique, potentielle et mécanique, qui permettent un traitement simplifié de certains problèmes physiques et contribuent dans tous les cas à une meilleure compréhension de la situation (chapitre 6). On étudiera en détail un système physique d'une importance primordiale en mécanique newtonienne mais aussi en mécanique quantique, l'oscillateur harmonique libre et amorti (chapitre 7). Le chapitre 8 sera consacré à la théorie newtonienne de la gravitation universelle. Le chapitre 9 sera dédié à une application de la gravitation universelle et des référentiels non galiléens : la dynamique terrestre.

Dans la troisième partie (chapitres 10 et 11), on présentera les bases de la mécanique du solide, en introduisant notamment le théorème du moment cinétique, indispensable pour étudier les mouvements de rotation d'un solide indéformable.