

Avant-propos

Cet ouvrage est le fruit d'un travail collectif, d'une équipe composée de trois enseignants chercheurs, qui ont conjugué leurs efforts, leur savoir-faire ainsi que leur expérience afin d'élaborer un manuel pédagogique utile pour les étudiants mais aussi pour les enseignants qui désirent préparer des travaux dirigés ou même proposer un examen à leurs étudiants. Il s'adresse aux étudiants de licence (L2 et L3) des universités françaises mais aussi à toutes les universités francophones. Il s'adresse également aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs, ainsi qu'aux étudiants des I.U.T. et B.T.S.

La première partie de l'ouvrage, est consacrée à des rappels de cours, certes succincts mais suffisamment clairs et complets. Ils sont suffisants pour aborder et résoudre les problèmes proposés dans la deuxième partie de ce livre. Le premier chapitre, de cette première partie, est consacré à la notion fondamentale de torseur, parce qu'elle permet de présenter le principe fondamental de la dynamique sous une forme particulièrement simple et concise. Les notions d'invariants (scalaire et vectoriel), de torseurs particuliers (glisseur et couple) ainsi que la notion d'axe central y sont présentées. La notion importante de torseur cinématique, essentielle à la description du champ de vitesses d'un solide indéformable, est introduite au deuxième chapitre consacré à la cinématique du solide. Les notions de paramétrage, d'angles d'Euler, d'axe instantané de rotation, de cinématique de contact et de vitesse de glissement y sont exposées. Le troisième chapitre, consacré à la géométrie des masses, introduit les notions de centre d'inertie et de matrice d'inertie, de symétrie matérielle, de base principale et de moment d'inertie par rapport à un axe quelconque. Quant à la cinétique du solide, elle est étudiée au quatrième chapitre. On y introduit les concepts de torseur cinétique, de torseur dynamique et d'énergie cinétique. Après avoir introduit la notion de torseur des efforts extérieurs, le cinquième chapitre traite du principe fondamental de la dynamique et des théorèmes généraux de la mécanique du solide dans un référentiel galiléen. Il aborde ensuite l'étude des puissances galiléennes des forces extérieures appliquées à un solide et se termine par le théorème de l'énergie cinétique et par la notion importante d'intégrale première du mouvement, en

l'occurrence l'intégrale première de l'énergie cinétique.

La deuxième partie de ce livre est consacrée aux problèmes corrigés. Un recueil de cinquante problèmes y est proposé et leurs corrigés sont volontairement détaillés. La solution proposée ne néglige aucune étape du raisonnement, afin de permettre au lecteur d'effectuer un véritable travail personnel et de s'assurer d'une parfaite compréhension des notions abordées. Pour autant, il ne faut pas négliger les effets négatifs que peut parfois présenter une solution trop détaillée. C'est pour cette raison qu'on conseille au lecteur de considérer la solution de chaque problème abordé, comme l'expression d'une démarche intellectuelle particulière qu'il doit analyser pour pouvoir l'appliquer éventuellement à d'autres situations.

Le livre se termine par une bibliographie détaillée qui permet de situer les principales sources d'inspiration des auteurs et de fournir les titres d'ouvrages ayant un objectif et une ambition plus importants.

Espérons que cet ouvrage collectif apporte une aide précieuse et un outil indispensable de travail aux étudiants et aussi aux candidats qui désirent entreprendre une préparation sérieuse aux concours d'entrée aux grandes écoles d'ingénieurs ou aux concours de CAPES et d'agrégation de mécanique. Nous souhaitons à tout le monde, élèves, étudiants, professeurs et candidats aux concours, de tirer le meilleur profit de ce livre.

Table des matières

Avant-propos	3
I Résumés de cours	11
1 Les torseurs	13
1.1 Généralités	13
1.2 Axe central	15
1.3 Opérations sur les torseurs	16
1.4 Torseurs particuliers	17
2 Cinématique du solide	19
2.1 Paramétrage d'un solide - Angles d'Euler	19
2.2 Champ de vitesses - Torseur cinématique - Composition des mouvements	23
2.3 Cinématique de contact	26
3 Géométrie des masses	29
3.1 Centre d'inertie	29

3.2 Matrice d'inertie	30
4 Cinétique	35
4.1 Torseur cinétique	35
4.2 Torseur dynamique	37
4.3 Énergie cinétique	39
5 Dynamique	41
5.1 Principe fondamental de la dynamique	41
5.2 Puissances et énergies	43
II Sujets thématiques corrigés	45
Sujet thématique 1	47
Sujet thématique 2	53
Sujet thématique 3	61
Sujet thématique 4	67
Sujet thématique 5	75
Sujet thématique 6	82
Sujet thématique 7	90
Sujet thématique 8	96
Sujet thématique 9	104
Sujet thématique 10	114
Sujet thématique 11	121
Sujet thématique 12	128
Sujet thématique 13	137

Sujet thématique 14.....	143
Sujet thématique 15.....	150
Sujet thématique 16.....	158
Sujet thématique 17.....	168
Sujet thématique 18.....	177
Sujet thématique 19.....	188
Sujet thématique 20.....	194
Sujet thématique 21.....	199
Sujet thématique 22.....	204
Sujet thématique 23.....	217
Sujet thématique 24.....	223
Sujet thématique 25.....	231
Sujet thématique 26.....	240
Sujet thématique 27.....	249
Sujet thématique 28.....	258
Sujet thématique 29.....	265
Sujet thématique 30.....	274
Sujet thématique 31.....	282
Sujet thématique 32.....	289
Sujet thématique 33.....	295
Sujet thématique 34.....	305

Sujet thématique 35.....	314
Sujet thématique 36.....	322
Sujet thématique 37.....	332
Sujet thématique 38.....	348
Sujet thématique 39.....	363
Sujet thématique 40.....	371
Sujet thématique 41.....	378
Sujet thématique 42.....	386
Sujet thématique 43.....	392
Sujet thématique 44.....	405
Sujet thématique 45.....	411
Sujet thématique 46.....	420
Sujet thématique 47.....	427
Sujet thématique 48.....	433
Sujet thématique 49.....	438
Sujet thématique 50.....	446
Bibliographie	455
Index	461

Première partie

Résumés de cours

Chapitre 1

les torseurs

1.1 Généralités

1.1.1 Définition

On appelle torseur que l'on note $[T] = [\vec{R}, \vec{H}(P)]$ tout champ de vecteurs $\vec{H}(P)$ pour lequel il existe un vecteur \vec{R} , indépendant de P , tel que $\forall (P, Q)$ on a :

$$\vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

Cette relation permet de déterminer le moment en un point Q du torseur connaissant son moment en un point P .

1.1.2 Éléments de réduction

Les éléments de réduction de $[T]$ sont donnés par :

$$[T] = {}_P \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{H}(P) \end{cases}$$

$$\vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

- Le vecteur \vec{R} est appelé la résultante du torseur $[T]$.
- Le vecteur $\vec{H}(P)$ est appelé le vecteur moment au point P ou moment au point P du torseur $[T]$.

Les vecteurs \vec{R} et $\vec{H}(P)$ sont appelés les éléments de réduction au point P du torseur $[T]$.

1.1.3 Champ équiprojectif

Définition

Un champ \vec{H} est équiprojectif si, et seulement si, pour tout points A et B , on a :

$$\vec{H}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{H}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$$

Théorème de Delassus : Tout champ équiprojectif est antisymétrique et réciproquement.

Remarques :

- Un torseur est un champ antisymétrique ou équiprojectif.

1.1.4 Invariant scalaire ou automoment

L'invariant d'un torseur $[T]$ est le réel, noté I_S défini comme le produit scalaire des éléments de réduction de $[T]$ au point P :

$$I_S = \vec{R} \cdot \vec{H}(P)$$

L'invariant scalaire est, bien entendu, indépendant du point P.

1.1.5 Invariant vectoriel

L'invariant vectoriel d'un torseur, de résultante non nulle, correspond au vecteur projection orthogonal du moment sur la résultante :

$$\vec{I}_V = \frac{I_S}{R^2} \vec{R}$$

Remarques :

- La résultante générale \vec{R} est aussi un invariant vectoriel, en effet elle est indépendante du point P.

- Si $\vec{R} = \vec{0}$, l'invariant vectoriel est le moment du torseur en un point P, il est noté :

$$\vec{I}_V = \vec{H}(P)$$

1.2 Axe central

1.2.1 Définition

On appelle axe central (Δ) d'un torseur $[T]$ de résultante $\vec{R} \neq \vec{0}$, l'ensemble des points P où le moment $\vec{H}(P)$ est colinéaire à la résultante \vec{R} :

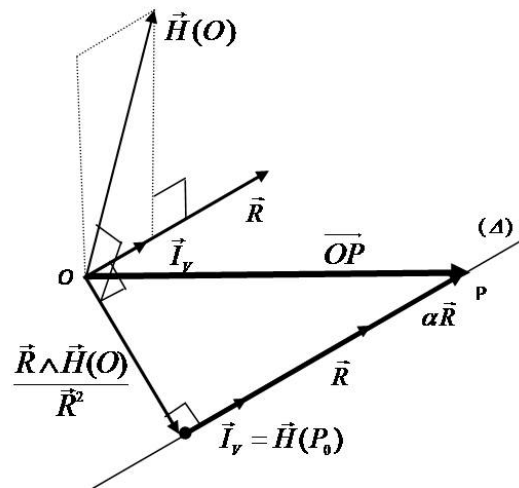
$$\Delta = \{P / \vec{H}(P) = \lambda \vec{R}\}$$

où $\lambda = \frac{I_S}{R^2}$ est le pas du torseur.

1.2.2 Équation vectorielle - Détermination géométrique

L'axe central (Δ) d'un torseur $[T]$ est la droite parallèle à \vec{R} dont l'équation vectorielle est donnée par :

$$\vec{OP} = \underbrace{\frac{\vec{R} \wedge \vec{H}(O)}{R^2}}_{\perp \vec{R}} + \underbrace{\alpha \vec{R}}_{// \vec{R}} = \vec{OP}_0 + \alpha \vec{R}$$



1.3 Opérations sur les torseurs

1.3.1 Egalité

Deux torseurs sont égaux s'ils ont mêmes éléments de réductions en un point, réciproquement s'ils ont mêmes éléments de réduction en un point, alors ils sont égaux :

$$\text{Deux torseurs } [T_1] \text{ et } [T_2] \text{ sont égaux} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \vec{H}_1(P) = \vec{H}_2(P) \end{cases}$$

1.3.2 Addition de deux torseurs

La somme de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ au même point P est le torseur $[T]$ défini par :

$$[T] = [T_1]_P + [T_2]_P \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{H}(P) = \vec{H}_1(P) + \vec{H}_2(P) \end{cases}$$

1.3.3 Multiplication d'un torseur par un scalaire

La multiplication d'un torseur $[T]$ par un scalaire λ est le torseur $[T_1]$ défini par :

$$[T_1] = \lambda [T]_P \iff \begin{cases} \vec{R}_1 = \lambda \vec{R} \\ \vec{H}_1(P) = \lambda \vec{H}(P) \end{cases}$$

1.3.4 Produit ou comoment

Le produit ou comoment de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ est le scalaire défini par :

$$[T_1] \otimes [T_2] = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{H}_1(P) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{H}_2(P) \end{pmatrix} = \vec{R}_1 \cdot \vec{H}_2(P) + \vec{R}_2 \cdot \vec{H}_1(P)$$

Ce nombre est aussi un invariant scalaire, il est indépendant du point P.

1.4 Torseurs particuliers

Il existe deux torseurs particuliers que l'on retrouve souvent dans les exercices. Ce sont deux torseurs simples que l'on appelle les glisseurs et les couples.

1.4.1 Glisseur

On appelle glisseur et on le note $[G]$, tout torseur $[T]$, de résultante \vec{R} non nulle et dont le moment en un point P est nul.

$$[T] \text{ est un glisseur } [G] \iff \begin{cases} \vec{R} \neq \vec{0} \\ \vec{H}(P) = \vec{0} \end{cases}$$

On remarque que pour ce torseur l'invariant scalaire $I_s = 0$. On dit qu'un torseur est un glisseur si $I_s = 0$ et $\vec{R} \neq \vec{0}$

Axe central d'un glisseur La droite $(\Delta) = (P, \vec{R})$ est appelée axe du glisseur ou axe central du glisseur et le torseur y prend des valeurs nulles.

Propriété importante

S'il existe deux points tels que le moment est nul en ces deux points, alors l'axe central passe par ces deux points.

1.4.2 Couple

Un torseur $[T]$ est un couple $[C]$, si et seulement si, sa résultante \vec{R} est nulle et dont le moment en un point P est non nul.

$$[T] \text{ est un couple } [C] \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{H}(P) \neq 0 \end{cases}$$

- Un couple n'admet pas d'axe central .
- Le champ antisymétrique associé à un couple $[C]$ est uniforme :
 $\vec{H}(P) = \vec{C}t_e$.
- L'invariant scalaire est également nul pour ce torseur. Un couple est le torseur tel que $I_s = 0$ et $\vec{H}(P) \neq 0$.

Un torseur $[T]$ est un couple $[C]$, si et seulement si, sa résultante \vec{R} est nulle et dont le moment en un point est non nul.

1.4.3 Torseur nul

C'est un torseur pour lequel la résultante $\vec{R} = \vec{0}$ et le moment en tout point P, $\vec{H}(P) = \vec{0}$.

Chapitre 2

Cinématique du solide

2.1 Paramétrage d'un solide - Angles d'Euler

2.1.1 Paramètres de position

La position et l'orientation d'un solide dans l'espace, sont définies par au maximum **six paramètres** appelés **paramètres de position**. Ce sont les composantes d'un point lié au solide et trois composantes de rotation.

2.1.2 Equations de liaison

Une équation de liaison s'exprime par des relations contenant les paramètres de position q_i , de leurs dérivées par rapport au temps \dot{q}_i et éventuellement le temps t . Il en existe deux types :

- les liaisons de type géométrique qui s'expriment par des équations contenant les paramètres q_i , et parfois le temps.

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

- les liaisons de type cinématique qui s'expriment par des équations contenant les paramètres q_i , les vitesses \dot{q}_i et éventuellement le temps.

$$f_i(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p'$$

2.1.3 Nombre de degré de liberté d'un solide

Le nombre de degrés de liberté d'un solide = Nombre de paramètres de position - Nombre d'équations de liaison indépendantes.

2.1.4 Angles d'Euler

On appelle **angles d'Euler**, notées habituellement (ψ, θ, φ) , les trois angles qui permettent d'orienter une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ liée à un solide par rapport à une base de référence $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

2.1.5 Figures de calcul

Les angles d'Euler $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ définissent toutes les possibilités de rotation d'un solide dans l'espace.

Première rotation : précession

Comme \vec{u} , \vec{x}_0 et \vec{y}_0 sont dans le même plan perpendiculaire au vecteur \vec{z}_0 , la rotation plane $\mathcal{R}(\psi/\vec{z}_0)$ d'angle $\psi = \widehat{(\vec{x}_0, \vec{u})}$ et d'axe \vec{z}_0 transforme le repère $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en $R_1(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ avec $\Omega(R_1/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0$.

$$R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\mathcal{R}(\psi/\vec{z}_0)} R_1(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$$

Dans cette rotation le vecteur \vec{x}_0 se transforme en \vec{u} et le vecteur \vec{y}_0 en un nouveau vecteur perpendiculaire à \vec{u} qu'on note \vec{v} . Les quatre vecteurs \vec{x}_0 , \vec{y}_0 , \vec{u} et \vec{v} sont dans le plan perpendiculaire au vecteur \vec{z}_0 .

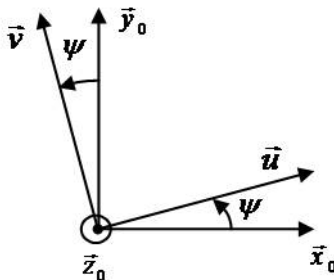


FIGURE 2.1 – Angle de précession

Le changement de base du repère R_0 au repère R_1 est donné par :

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos \psi \vec{x}_0 + \sin \psi \vec{y}_0 \\ \vec{v} = -\sin \psi \vec{x}_0 + \cos \psi \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 = \vec{z}_0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\psi/\vec{z}_0) \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \mathcal{R}(\psi/\vec{z}_0) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Deuxième rotation : nutation}$$

La rotation $\mathcal{R}(\theta/\vec{u})$ d'angle $\theta = \widehat{(\vec{z}_0, \vec{z})}$ et d'axe \vec{u} transforme le repère $R_1(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ en $R_2(O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ avec $\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\theta} \vec{u}$:

$$R_0(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0) \xrightarrow{\mathcal{R}(\theta/\vec{u})} R_1(O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$$

Dans cette rotation le vecteur \vec{z}_0 se transforme en \vec{z} et le vecteur \vec{v} en un nouveau vecteur \vec{w} perpendiculaire à \vec{z} , ainsi les quatre vecteurs \vec{z}_0 , \vec{z} , \vec{v} et \vec{w} sont dans le même plan perpendiculaire au vecteur \vec{u} .

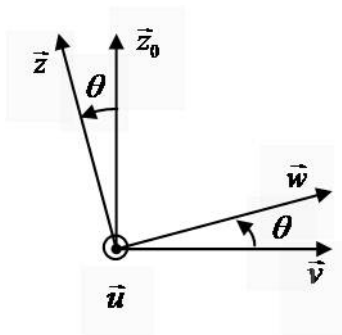


FIGURE 2.2 – Angle de nutation

Le changement de base du repère R_1 au repère R_2 est donné par :

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u} \\ \vec{w} = \cos \theta \vec{v} + \sin \theta \vec{z}_0 \\ \vec{z} = -\sin \theta \vec{v} + \cos \theta \vec{z}_0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\theta/\vec{u}) \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \mathcal{R}(\theta/\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Troisième rotation : rotation propre

La rotation $\mathcal{R}(\varphi/\vec{z})$ est d'angle $\varphi = \widehat{(\vec{u}, \vec{x})}$ et d'axe \vec{z} transforme finalement le repère $R_2(O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ en $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec $\vec{\Omega}(R/R_2) = \dot{\varphi} \vec{z}$:

$$R_0(O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}) \xrightarrow{\mathcal{R}(\varphi/\vec{z})} R_1(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

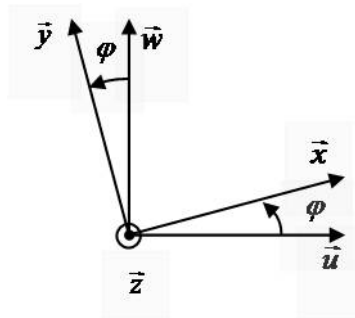


FIGURE 2.3 – Angle de rotation propre

Dans cette rotation le vecteur \vec{u} se transforme en \vec{x} et le vecteur \vec{w} en un nouveau vecteur \vec{y}

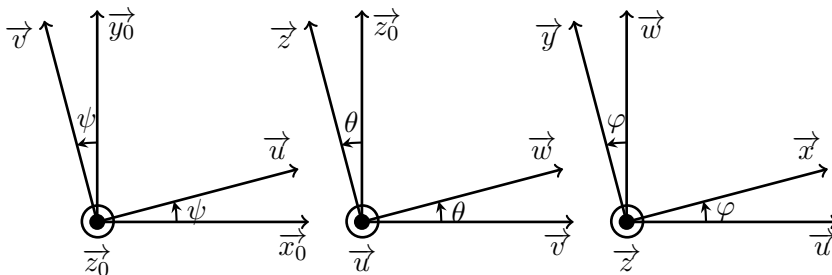
Le changement de base du repère R_2 au repère R est donné par :

$$\begin{cases} \vec{x} = \cos \varphi \vec{u} + \sin \varphi \vec{w} \\ \vec{y} = -\sin \varphi \vec{u} + \cos \varphi \vec{w} \\ \vec{z} = \vec{z} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\varphi/\vec{z}) \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \mathcal{R}(\varphi/\vec{u}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figures de calcul

En regroupant les trois figures ci-dessus, on obtient finalement les figures de calcul :



2.1.6 Expression du vecteur rotation instantané

D'après ce qui précède, le passage du repère fixe $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0,)$ au repère lié au solide $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z},)$ a fait l'objet de trois rotations planes $\mathcal{R}(\psi, \vec{z}_0)$, $\mathcal{R}(\theta, \vec{u})$ et $\mathcal{R}(\varphi, \vec{z})$ où (ψ, θ, φ) sont les angles d'Euler, soit :

$$R_0(O; B_0) \xrightarrow{\mathcal{R}(\psi/\vec{z}_0)} R_1(O; B_1) \xrightarrow{\mathcal{R}(\theta/\vec{u})} R_2(O; B_2) \xrightarrow{\mathcal{R}(\varphi/\vec{z})} R(O; B)$$

où $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $B_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$, $B_2(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ et $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont les bases attachées respectivement aux repères (R_0) , (R_1) , (R_2) et (R) .

$$\vec{\Omega}(R_0/R) = \vec{\Omega}(R_0/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R) = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{z}_0$$

On constate que l'expression de $\vec{\Omega}(R_0/R)$ utilise une base non orthogonale. Dans la pratique, on choisit les bases intermédiaires (B_1) ou (B_2) comme bases de projection :

$$\vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{z} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)}$$

$$\vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{z} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})}$$

Remarque

La base $B_2(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_0)$ porte le nom de base de Résal. Il est conseillé d'utiliser cette base pour les solides ayant la symétrie de révolution.

2.2 Champ de vitesses - Torseur cinématique - Composition des mouvements

2.2.1 Formule de Bour

Cette relation est valable pour tout vecteur \vec{U} .

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{U}$$

2.2.2 Solide indéformable

(S) est un solide indéformable $\iff \forall A, B \in (S) : \|\overrightarrow{AB}\| = \text{constante}$

2.2.3 Champ des vitesses d'un solide - Torseur cinématique - Relation de Varignon

Soient A et B deux points quelconques de (S), le vecteur \overrightarrow{AB} est constant dans tout repère (R) lié au solide (S), on peut donc écrire :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_{R_0} = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_R}_0 + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$$

En utilisant la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, on aboutit à la loi de distribution des vitesses du solide (S) :

$$\text{Relation de Varignon : } \vec{V}(B/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$$

On constate que le champ des vitesses d'un solide est un champ antisymétrique, il est donc possible de représenter le mouvement de (S) par rapport à (R_0) par un torseur dit torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à (R_0), sa valeur au point A de (S) est :

$$[\vartheta(S/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(A \in S/R_0) \end{array} \right\}_A$$

2.2.4 Axe instantané de rotation et de glissement

On appelle axe instantané de rotation et de glissement (souvent abrégé en **AIRG** ou **AIR** s'il n'ya pas glissement) l'axe central $\Delta(t)$ du torseur cinématique.

2.2.5 Champ des accélérations d'un solide – Formule de Rivals

Soient (S) un solide indéformable et (R_0) un repère de référence, alors le champ des accélérations de (S) par rapport à (R_0) est donné par : **Formule de Rivals** :

$$\vec{\gamma}(B/R_0) = \vec{\gamma}(A/R_0) + \left[\frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge (\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB})$$

2.2.6 Composition des mouvements

Loi de composition des vitesses :

$$\underbrace{\vec{V}(A/R_0)}_{\vec{V}_a} = \underbrace{\vec{V}(A/R)}_{\vec{V}_r} + \underbrace{\vec{V}(A \in R/R_0)}_{\vec{V}_e}$$

$\vec{V}_a = \vec{V}(A/R_0)$ est la vitesse absolue du point A par rapport au repère absolu R_0 .

$\vec{V}_r = \vec{V}(A/R)$ est la vitesse relative du point A par rapport au repère relatif R .

$\vec{V}_e = \vec{V}(A \in R/R_0)$ est la vitesse d'entraînement du point A fixe dans R par rapport au repère absolu R_0 .

Loi de composition des accélérations

$$\underbrace{\vec{\Gamma}(A/R_0)}_{\vec{\Gamma}_a} = \underbrace{\vec{\Gamma}(A/R)}_{\vec{\Gamma}_r} + \underbrace{\vec{\Gamma}(A \in R/R_0)}_{\vec{\Gamma}_e} + \underbrace{2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(A/R)}_{\vec{\Gamma}_C}$$

$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}(A/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(A/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$ est l'accélération absolue du point A par rapport au repère absolu R_0 .

$\vec{\Gamma}_r = \vec{\Gamma}(A/R) = \left[\frac{d\vec{V}(A/R)}{dt} \right]_R$ est l'accélération relative du point A par rapport au repère relatif R .

$\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}(A \in R/R_0) = \vec{\Gamma}(O'/R_0) + \frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge (\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M})$ est l'accélération d'entraînement du point A fixe dans R par rapport au repère absolu R_0 .

$\vec{\Gamma}_c = 2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(A/R)$ est l'accélération de Coriolis du point A.

Remarque : on remarque bien que le champ d'accélération ne constitue pas un torseur.

Loi de composition des rotations

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R) + \vec{\Omega}(R/R_0)$$

Loi de composition des torseurs cinématiques

$$[\vartheta(S/R_0)] = [\vartheta(S/R)] + [\vartheta(R/R_0)]$$

2.3 Cinématique de contact

2.3.1 Vitesse de glissement

Définition : On appelle vitesse de glissement au point I du solide (S_1) par rapport au solide (S_2), notée $\vec{V}_g(I, S_1/S_2)$, la vitesse du point I appartenant au solide (S_1) par rapport au solide (S_2) :

$$\underbrace{\vec{V}_g(I, S_1/S_2)}_{\text{Vitesse de glissement}} = \underbrace{\vec{V}(I \in S_1/S_2)}_{\text{Vitesse du point coïncident}} = \underbrace{\vec{V}(I \in S_1/R) - \vec{V}(I \in S_2/R)}_{\text{composition des vitesses}}$$

Remarque

La vitesse de glissement appartient toujours au plan tangent (P).

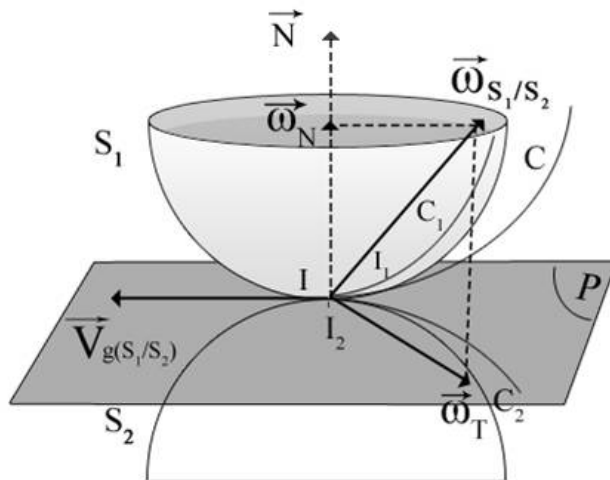


FIGURE 2.4 – Schéma représentant le plan de glissement

2.3.2 Condition de roulement sans glissement

On dit qu'il y a **roulement sans glissement** si :

$$\vec{V}_g(I, S_1/S_2) = \vec{0} \quad (\text{CRSG})$$