Avant-propos

Sans technique un don n'est rien
qu'une sale manie.
Georges Brassens.

Le présent ouvrage s'adresse en particulier aux élèves de Terminale (avec options maths complémentaires ou maths expertes) afin qu'ils puissent acquérir les bases nécessaires pour le cycle Terminal.

Nous partons du constat qu'au cours de ces 30 dernières années les différentes réformes éducatives ont fait que le programme de mathématiques promulgué aux élèves a beaucoup souffert tant dans son contenu que dans la façon de l'enseigner.

Le changement de paradigme a fait qu'une grande partie des étudiants entrant, à l'heure actuelle, dans le Supérieur manquent sérieusement de connaissances et d'outils afin de réussir leur insertion dans le Post-Bac.

Viennent alors soit de nombreux abandons soit une désaffection importante et dangereuse à long terme pour les études scientifiques en général et pour les mathématiques en particulier.

C'est pour ces raisons que nous avons souhaité écrire ces trois livres, proposer des infrastructures, afin que le lecteur puisse apprendre ou ré-apprendre les mathématiques élémentaires. Nous avons ainsi souhaité proposer un projet alternatif aux programmes de mathématiques des lycées et voilà pourquoi les trois tomes, qu'il faut aborder comme un tout, ne suivent donc pas à la lettre le programme officiel des classes de lycées et encore moins l'esprit.

Même si la plupart des objets mathématiques sont entièrement définis (ou redéfinis), le lecteur est supposé familier avec les notions de base et le vocabulaire de la géométrie de collège et une certaine aisance avec le calcul algébrique.

Nous avons pris le parti d'accélérer l'accés à l'analyse afin d'obtenir rapidement des résultats intéressants. Par exemple, les variations des polynômes du second degré furent étudiées dans le livre de Première à partir des dérivées alors qu'un traitement plus élémentaire et purement algébrique est possible (et répandu). Ce parti pris est assumé.
Pour les mêmes raisons, l'intégrale de Kurzweil-Henstock a été choisie dans ce cours de Terminale pour arriver le plus rapidement possible au théorème fondamental de l'analyse.

Bien que ce livre se veuille avant tout destiné aux élèves de Terminale (avec options maths complémentaires ou maths expertes) mais aussi à tout curieux désireux d'apprendre de « belles » mathématiques, il servira aussi à ceux qui sont intéressés par l'enseignement. C'est ainsi que ces trois livres peuvent être lus tels qu'ils sont présentés mais ils peuvent aussi être abordés suivant un certain ordre en fonction du but cherché. On peut ainsi regrouper les chapitres par thèmes : algèbre, géométrie, analyse et probabilité que nous résumons dans ce tableau :

	cours de seconde	cours de première	cours de terminale
Algèbre :	3 - 5 - 7	5 - 9 - 13	2
Géométrie :	6 - 11	6 - 7 - 8	1 - 7 - 8
Analyse :	9 - 10	1 - 2 - 3 - 4 - 12	3 - 4 - 5 - 6 - 9
Probabilités :	4 - 8 - 12	10 - 11	

Enfin nous avons pris le parti de ne pas développer l'histoire des mathématiques dans ces livres. Néanmoins, il nous semble plus qu'important de savoir à quelle époque les concepts présentés dans cet ouvrage ont pu voir le jour et quels mathématiciens en sont à l'origine.

Nous pensons que tout étudiant en mathématiques – tant au secondaire que dans le supérieur – doit acquérir un peu de l'histoire de cette science.

Pour cela nous vous proposons une liste non exhaustive de livres :

Hauchecorne Bertrand, Suratteau Daniel, *Des mathématiciens de A à Z* - 3^{e} édition entièrement refondue, Ellipses 2008.

Thirion Maurice, *Les mathématiques et le réel*, Ellipses 1999.

Nous terminons par quelques remarques pratiques.

Ce panneau signale un risque de dérapage fréquemment observé chez les lecteurs un peu rapides.

Le carré blanc à la fin de la dernière ligne d'une démonstration signale… la fin de la démonstration, que les auteurs n'iront pas plus loin ! C'est en somme une abréviation pour « la proposition en résulte » ou « ce qu'il fallait démontrer ». Il se présente sous cette forme : $\square$

Enfin, une place a été laissée à la programmation et notre choix a porté sur le langage `python` car c'est celui qui est le plus utilisé dans les lycées et dans le Supérieur.

Nous ne pouvons conclure cet avant-propos sans remercier Jean-Pierre Demailly pour son soutien et son apport. La rédaction de l'intégrale de Kurzweil-Henstock est la sienne. Nous sommes redevables à Emmanuel Vieillard-Baron car le chapitre sur les coniques et une bonne partie de l'arithmétique lui doivent beaucoup ainsi que son site « les mathématiques.net » qui fut une bonne source d'inspiration. Merci à Loïc Terrier pour ses graphiques et ses exercices. Merci aussi à Clémence Labrousse et à Philippe Colliard pour un soutien constant et précieux.

Table des matières

Chapitre 1

Barycentres

Sommaire

1.1 Définitions et premières propriétés

1.1.1 Fonction vectorielle de Leibniz

On appelle **point pondéré** ou **point massif**, tout couple (A, α) où A est un point du plan ou de l'espace et α est un réel.

Soit un ensemble de points massifs $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)$. On appelle **fonction vectorielle de Leibniz** la fonction qui à tout point M du plan ou de l'espace associe le vecteur $\overrightarrow{V}_M$ noté aussi $\overrightarrow{f(M)}$ telle que

$$\overrightarrow{V}_M = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

Remarque 1.

Cherchons s'il existe des points M tels que $\overrightarrow{V}_M = \overrightarrow{0}$.
Nous choisissons un point O et par la règle de Chasles on a :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{V}_M & = & \alpha_1(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1}) + \ldots + \alpha_n(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_n}) \\ & = & (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MO} + \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} \\ & = & (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \end{array}.$$

Ainsi $\overrightarrow{V}_M = \overrightarrow{0}$ équivaut à $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{f(0)} = \overrightarrow{0}$.

Nous avons alors deux cas :

1. Si $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = 0$ alors
   – si $\overrightarrow{f(0)} = \overrightarrow{0}$ tout point M est solution.
   – si $\overrightarrow{f(0)} \neq \overrightarrow{0}$ il n'y a pas de solution.
2. Si $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \neq 0$ alors $\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{OM}$ et ainsi il existe une solution unique qui est un point M vérifiant :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Définition 1.

Étant donné un système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)\}$ tels que $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \neq 0$, il existe, alors, un unique point, noté G, du plan ou de l'espace tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

déterminé par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Ce point G se nomme **barycentre** de ce système de points pondérés.

1.1.2 Réduction de la fonction vectorielle de Leibniz

Nous avons vu que si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ alors
$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$.
Maintenant si on place le point O en G nous obtenons :

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MG}$$

Autrement dit la somme de Leibniz peut être réduite :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MG}$$

Remarque 2.

Dans le cas où tous les coefficients sont égaux, le point G s'appelle **isobarycentre** des n points.
Par exemple, l'isobarycentre de deux points du plan A et B est le milieu du segment $[AB]$.
De même, l'isobarycentre de trois points du plan A, B, C non alignés est le centre de gravité du triangle ABC.

Exemple 1
Supposons que l'on nous donne deux points pondérés (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$.
Nous avons alors $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{O}$ ce qui donne grâce à la relation de Chasles $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{O}$ autrement dit après avoir factorisé :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont donc colinéaires ce qui signifie que les points A, B et G sont alignés.

Exercice 1.

Construire le barycentre G des points pondérés $(A, 1), (B, 1), (C, -1)$.

Solution 1
Nous avons $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}{1+1-1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Remarque 3.

Dire que G est le barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, -1)$ est équivalent à dire que $AGBC$ est un parallélogramme.

1.1.3 Coordonnées du barycentre

Grâce à la formule vue précédemment $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$ nous pouvons obtenir les coordonnées du barycentre G :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i};\ y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i};\ z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}.$$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Si on appelle $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les affixes respectives des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, alors l'affixe z_G du barycentre G du système pondéré $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)\}$ est

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}.$$

1.2 Propriétés du barycentre

1. Le barycentre ne change pas si on modifie l'ordre des points.

2. Le barycentre ne change pas si on multiplie les poids des points par un même réel k non nul.

3. Si les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés sur une même droite alors G est un point de cette droite.

4. Si les points $A_1, \ldots, A_n$ sont coplanaires alors G appartient aussi à ce plan.

Théorème 1 (Barycentre partiel)
Dans la construction du barycentre de n points pondérés, on peut remplacer un certain nombre de ces points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients des points qu'il remplace.

Démonstration 1
Soit le système $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ avec G barycentre de ces points. On a donc :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \ldots + \alpha_p \overrightarrow{GA_p} + \alpha_{p+1} \overrightarrow{GA_{p+1}} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}. \tag{1.1}$$

Le barycentre étant indépendant de l'ordre des points, on peut donc démontrer le théorème pour les p premiers points.
Soit I le barycentre de $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_p, \alpha_p)$ avec $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p \neq 0$, on a alors :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \ldots + \alpha_p \overrightarrow{GA_p} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_p) \overrightarrow{GI}.$$

Si nous reportons alors cette égalité dans 1.1, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{GI} + \alpha_{p+1} \overrightarrow{GA_{p+1}} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}.$$

Ceci signifie donc que G est le barycentre des points pondérés
$(I, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i),\ (A_{p+1}, \alpha_{p+1}), \ldots, (A_n, \alpha_n).$ $\square$

Exercice 2.

1. Soient $ABCD$ un tétraèdre et P, Q, R des points tels que $ABCQ$, $ABDP$, $BDCR$ sont des parallélogrammes.
   Montrer que les droites (CP), (DQ), (AR) sont concourantes en G barycentre de $\{(A,1),(B,-1),(C,1),(D,1)\}$.

2. Démontrer la propriété suivante :

> **Théorème 2**
> Dans un tétraèdre, les quatre segments joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée concourent en G isobarycentre de A, B, C, D, le point G étant situé aux trois-quarts de $\overrightarrow{AG_A}$ où G_A est le centre de gravité du triangle BCD.
> De plus, les trois segments joignant les milieux de deux arêtes opposées ont pour milieu le point G.

Solution 2

1. Nous avons $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RD}$ donc $-\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RD} = \overrightarrow{0}$. Nous avons alors R barycentre de $(B,-1),(C,1)$ et $(D,1)$ et ainsi G est le barycentre de $(A,1)$ et $(R,1)$ ce qui implique que c'est un point de (AR) et grâce aux poids nous concluons que G est le milieu de $[AR]$.

   De plus, comme nous avons $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD}$ alors nous avons $-\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{0}$. Cette égalité nous dit que P est le barycentre de $(B,-1),(A,1)$ et $(D,1)$ et donc que G est le barycentre de $(P,1),(C,1)$ ce qui, par le même raisonnement que précédemment nous permet de conclure que G est le milieu de $[PC]$.
   Par un raisonnement analogue à ce que nous venons de faire mais cette fois-ci avec le parallélogramme $ABCQ$ nous obtenons G milieu de $[QD]$.
   Finalement G est bien le point d'intersection des trois droites $(AR),(DQ)$ et (CP).

2. Soit G l'isobarycentre des sommets A, B, C et D (autrement dit le centre de gravité du tétraèdre). Autrement dit nous avons :

   $$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}.$$

   Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$ (arêtes opposées).
   Le point G est aussi le barycentre de $(I,2)$ et $(J,2)$ ce qui implique que G est le milieu de $[IJ]$. De même, nous avons G milieu des segments $[KN]$ et $[LM]$.

   Soit G_A le centre de gravité de BCD (autrement dit isobarycentre de B, C, D) alors G est aussi le barycentre de $(A,1),(G_A,3)$ donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$. Ainsi G est un point de (AG_A).
   Par le même raisonnement nous obtenons $\overrightarrow{BG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BG_B}$, $\overrightarrow{CG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CG_C}$, $\overrightarrow{DG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DG_D}$.

1.3 Fonction scalaire de Leibniz. Lignes de niveau

On considère un système de n points pondérés $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$. On appelle **fonction scalaire de Leibniz** (associée à ce système) la fonction ϕ qui à chaque point M du plan associe le réel :

$$\phi(M) = \alpha_1 MA_1^2 + \ldots + \alpha_n MA_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2.$$

1.3.1 Ligne de niveau $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = k$

Le réel k étant donné, il s'agit de donner l'ensemble des points M du plan tels que $\phi(M) = k$. Cet ensemble que l'on a notera (E) s'appelle **ligne de niveau** k de la fonction ϕ.

Procédé pour déterminer (E).

Premier cas : si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

On désigne, alors, par G le barycentre du système $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ ce qui nous donne

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

Ainsi pour tout point M du plan, par la relation de Chasles, on a :

$$\phi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i})^2.$$

Puis par la formule des identités remarquables et le produit scalaire, on obtient :

$$\phi(M) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2.$$

Or, $\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i} = 2\overrightarrow{MG} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0$ car $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

En conclusion, pour tout point M du plan,

$$\phi(M) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}^2 = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) MG^2 + \phi(G).$$

Le réel $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}^2$ est imposé par les données de l'énoncé, on le notera K. Ainsi nous obtenons l'équivalence suivante :

$$\phi(M) = k \Leftrightarrow GM^2 = \frac{k - K}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Si nous posons $\dfrac{k-K}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} = K'$ alors :

$$\phi(M) = k \Leftrightarrow GM^2 = K'.$$

Ce qui mène à la discussion suivante :

- Si $K' < 0$ alors (E) est l'ensemble vide.
- Si $K' = 0$ alors (E) se réduit au point G.
- Si $K' > 0$ alors (E) est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{K'}$.

Remarque 4.

Si on constate qu'un certain point $A \neq G$ est un point de la ligne de niveau k de ϕ, alors on peut affirmer sans autre calcul que cette ligne de niveau est le cercle de centre G et de rayon GA.

Exercice 3.

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que
$AB = BC = a$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 5a^2.$$

Solution 3

Soit G le barycentre de $(A,2),(B,1),(C,1)$. Soit I le milieu de $[BC]$ on a donc $(I,2)$. Ainsi G est le barycentre de $(A,2),(I,2)$ autrement dit G est le milieu de $[AI]$.
Commençons tout d'abord par le membre de gauche de l'égalité, nous avons :

$$\begin{aligned}2MA^2 + MB^2 + MC^2 &= 2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2\\ &= 4MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}).\end{aligned}$$

Le fait que G soit barycentre nous donne $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Ainsi $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2 = 5a^2$.

Le fait que ABC soit un triangle rectangle isocèle donc par le théorème de Pythagore nous obtenons $GA = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ et donc $2GA^2 = \dfrac{a^2}{4}$.
Nous avons $AI = IB$ et G milieu de $[AI]$ donc $GB^2 = (\dfrac{a\sqrt{2}}{4})^2 + (\dfrac{a\sqrt{2}}{4})^2 = \dfrac{5a^2}{8}$. Comme, de plus, $GB = GC$ alors $GB^2 = GC^2$.

Finalement $2GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{5a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{2}$.
Ainsi l'égalité $4MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2 = 5a^2$ nous donne, en tenant compte du résultat précédent,

$4MG^2 = 5a^2 - \frac{3a^2}{2}$ ce qui permet de conclure que $MG^2 = \frac{7a^2}{8}$.

Finalement l'ensemble des points vérifiant $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 5a^2$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Deuxième cas : si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$.

Transformation de $\phi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$.

Soit O un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
\phi(M) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_i}^2) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MO}^2}_{=0} + 2\overrightarrow{MO} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}^2
\end{aligned}$$

Or $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}^2$ est un réel fixé par les données de l'énoncé et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ est un vecteur $\overrightarrow{v}$ fixé.
La ligne de niveau k de ϕ notée (E) est telle que

$$\phi(M) = k \text{ c'est-à-dire } 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{v} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 = k$$

Si on pose $k' = \frac{k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2}{-2}$, on obtient alors $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v} = k'$.
D'où la discussion suivante :

- si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $k' \neq 0$ alors (E) est l'ensemble vide
- si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $k' = 0$ alors (E) est tout le plan
- si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ alors posons $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{v}$ et soit H la projection orthogonale de M sur (OA). Nous avons, ainsi, l'équivalence suivante :

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v} = k' \Longleftrightarrow \overline{OH} \times \overline{OA} = k' \Longleftrightarrow \overline{OH} = \frac{k'}{\overline{OA}}$$

Si on oriente, par exemple, l'axe comme $\overrightarrow{v}$ alors $\overline{OA} = OA$ et $\overline{OH} = \frac{k'}{OA}$ ce qui permet de déterminer de façon explicite le point H sur (OA).

Conclusion :
La ligne de niveau k de ϕ est la droite (Δ) passant par H est perpendiculaire à (OA).

Remarque 5.

Si un point N est un point de l'ensemble, on peut dire directement que l'ensemble des points M est la droite passant par N et orthogonale à $\overrightarrow{v}$.

1.3.2 Ligne de niveau de l'application $f : M \mapsto \dfrac{MA}{MB}$

Il s'agit de trouver l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$ avec $k > 0$.

- Si $k = 1$ alors $MA = MB$ d'où l'ensemble des points M est la médiatrice de $[AB]$.
- Si $k \neq 1$ alors nous avons $MA = kMB$ ce qui est équivalent à dire que $MA^2 - k^2MB^2 = 0$. On retrouve alors le premier cas du paragraphe précédent et donc la ligne de niveau est un cercle.

Remarque 6.

On peut faire autrement.
On a $MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0$. Soit I barycentre de $\{(A,1),(B,-k)\}$, $\overrightarrow{AI} = \dfrac{-k}{1-k}\overrightarrow{AB}$.
Soit J le barycentre de $\{(A,1),(B,-k)\}$, $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{AB}$.
On obtient ainsi $\dfrac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{MI}.(1+k)\overrightarrow{MJ} = 0$, autrement dit $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$, donc l'ensemble des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = 1$ est un cercle de diamètre $[IJ]$.

1.4 Exercices

Exercice 4.

Soit $ABCD$ un quadrilatère qui n'est pas un parallélogramme. Soient I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD]$, et $[DA]$. Soit G le point d'intersection de (IK) et (JL).
Soient M et N les milieux respectifs des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
La droite (MN) s'appelle la droite de Newton du quadrilatère $ABCD$.
Démontrer qu'elle passe par G.

Exercice 5 (Ça balance pas mal).

Une marchande utilise une balance légèrement faussée : les deux bras de leviers ne sont pas exactement de la même longueur. N'étant pas malhonnête, elle pèse deux fois la marchandise : une fois dans le plateau de gauche, une fois dans le plateau de droite. Le poids facturé au client est la moyenne des deux poids obtenus.
Cette solution est-elle équitable ou quelqu'un est-il volé ?

Exercice 6 (Nouvelle-Calédonie, Mars 2005).

Partie A

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points :

$$A_1 \text{ milieu du segment } [A_0B_0] \quad \text{et} \quad B_1 \text{ barycentre de } \Big\{\big(A_0\ ,\ 1\big)\,;\big(B_0\ ,\ 2\big)\Big\}.$$

1. Placer les points A_1, B_1, A_2 et B_2 pour $A_0B_0 = 12$ cm.
   Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n lorsque n devient très grand ?
2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $(A_0\,;\,\vec{\imath})$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{12}\,\overrightarrow{A_0B_0}$. Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0 = 0$, $v_0 = 12$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$.
   Montrer qu'elle est constante.

Partie C

À partir des résultats obtenus dans les parties **A** et **B**, préciser la limite des points A_n et B_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7 (Cercles d'Apollonius)**.**

Soit ABC un triangle non isocèle en C et, sur la parallèle en B à (AC), les points C_1 et C_2 tels que $BC_1 = BC_2 = BC$. Démontrer que (CC_1) et (CC_2) sont sécantes avec (AB) en des points notés I et J. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{CA}{CB}$ est le cercle de diamètre $[IJ]$.

Exercice 8 (Sept d'un coup)**.**

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AC]$ et $[BD]$. On désigne par G_1, G_2, G_3 et G_4 les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, ABD et ABC.
Démontrer que les sept droites (AG_1), (BG_2), (CG_3), (DG_4), (IK), (JL) et (MN) sont concourantes.

Exercice 9.

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{AD} = a$. On appelle $\mathrm{A_1}$ le centre de gravité du triangle BCD.

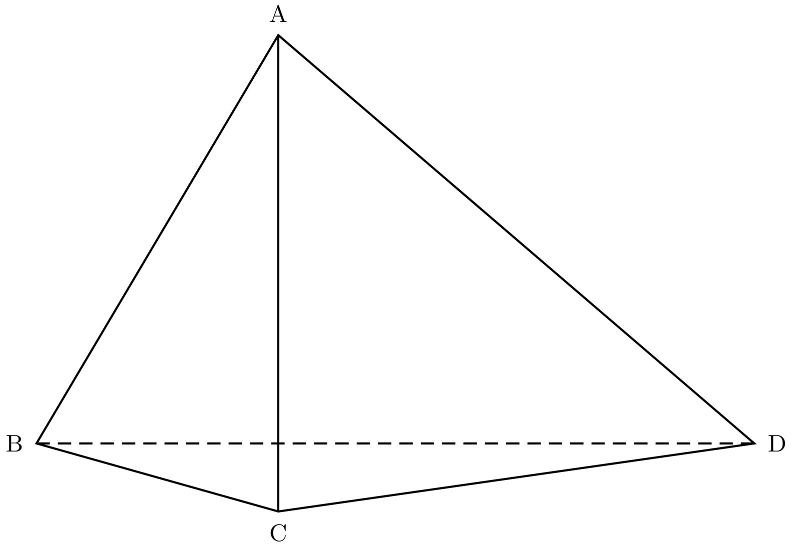
1. Montrer que la droite $(\mathrm{AA_1})$ est orthogonale au plan (BCD).
   $\left(\text{On pourra par exemple calculer } \overrightarrow{\mathrm{AA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$.
2. En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre ABCD, calculer la longueur du segment $[\mathrm{AA_1}]$.
3. On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de [BC].
   (a) Montrer que G appartient au segment $[\mathrm{AA_1}]$ et déterminer la longueur AG.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que
   $$\left\|\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}} + \overrightarrow{M\mathrm{D}}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\|.$$
4. Soit H le symétrique de A par rapport à G.
   (a) Démontrer que $4\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$.
   (b) Démontrer l'égalité $\mathrm{HC}^2 - \mathrm{HD}^2 = \overrightarrow{\mathrm{DC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}}$.
   (c) En déduire que $\mathrm{HC} = \mathrm{HD}$.

On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est
$$V = \frac{1}{3}bh.$$

Exercice 10.

On considère le tétraèdre ABCD ; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. (a) Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(\mathrm{A},\ 1)\ ;\ (\mathrm{B},\ 1)\ ;\ (\mathrm{C},\ -1)\ ;\ (\mathrm{D},\ 1)\}$.
   Exprimez $\overrightarrow{\mathrm{IG}_1}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$. Placez I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).
   (b) Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (D,\ 2)\}$.
   Démontrez que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placez G_2.
   (c) Démontrez que $\mathrm{IG}_1\mathrm{DJ}$ est un parallélogramme.
   En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.
2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ m-2)\ ;\ (D,\ m)\}$.
   (a) Précisez l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
   Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.
   (b) Démontrez que G_m, appartient au plan (ICD).
   (c) Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{\mathrm{J}G_m}$ est constant.
   (d) En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathcal{E}$.



1.5 Solutions

Solution 4

Soit H le barycentre de $\big(A\ ,\ 1\big),\big(B\ ,\ 1\big),\big(C\ ,\ 1\big),\big(D\ ,\ 1\big)$.

On sait que I est le barycentre de $\big(A\ ,\ 1\big),\big(B\ ,\ 1\big)$ et que K est le barycentre de $\big(C\ ,\ 1\big),\big(D\ ,\ 1\big)$. Donc H est le barycentre de $\big(I\ ,\ 1\big),\big(K\ ,\ 1\big)$ d'après le théorème 1. En particulier H appartient à la droite (IK).

De même H est le barycentre de $\big(J\ ,\ 1\big),\big(L\ ,\ 1\big)$ et appartient à la droite (JL).

Comme H est le point d'intersection de (IK) et (JL), on a $G = H$.

De plus M est le barycentre de $\big(A\ ,\ 1\big),\big(C\ ,\ 1\big)$ et que N est le barycentre de $\big(B\ ,\ 1\big),\big(D\ ,\ 1\big)$. Donc G est le barycentre de $\big(M\ ,\ 1\big),\big(N\ ,\ 1\big)$ d'après le théorème 1. En particulier les points M, N et G sont alignés. On a même plus : G est le milieu de $[MN]$.

Solution 5 (Ça balance pas mal)

Soient L et ℓ les longueurs des fléaux, m la masse réelle, M_1 et M_2 les deux masses mesurées.

Les deux équilibres se traduisent par $\begin{cases} Lm &= \ell M_1 \\ \ell m &= L M_1 \end{cases}$. On exprime tout en fonction de m : $M_1 = \dfrac{Lm}{\ell}$ et $M_1 = \dfrac{\ell m}{L}$. D'où

$$m - \frac{M_1 + M_2}{2} = m\left(1 - \frac{L}{2\ell} - \frac{\ell}{2L}\right) = \frac{m}{2\ell L}(2\ell L - L^2 - \ell^2) = -\frac{m(L-\ell)^2}{2\ell L}.$$

Donc la masse réelle est toujours inférieure à la moyenne des masses mesurées.

Le client est donc toujours volé.

Solution 6 (Nouvelle-Calédonie, Mars 2005)

Partie A

1. Il semble que pour n assez grand les points A_n et B_n se rapprochent d'une même position limite.
2. On a $A_n = \text{milieu}[A_nB_n] \iff u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

   D'autre part $B_{n+1} = \text{bar.}\{(A_n,\ 1)\ ;\ (B_n,\ 2)\} \iff v_{n+1} = \dfrac{1 \times u_n + 2 \times v_n}{1+2} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

Partie B

1. Soit $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \dfrac{1}{6}(v_n - u_n) = \dfrac{1}{6}w_n$.

   La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$. Or $w_0 = v_0 - u_0 = 12 - 0 = 12$, donc $w_n = 12 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$. Tous les termes de la suite sont positifs et la raison étant comprise entre -1 et 1, cette suite converge vers 0.
2. Calculons $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{-u_n + v_n}{2} = \dfrac{1}{2}w_n > 0$ d'après la question précédente. La suite (u_n) est donc croissante.

   De même $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}v_n = \dfrac{u_n - v_n}{3} = -\dfrac{1}{3}w_n < 0$, d'après la question précédente.
3. D'après les deux questions précédentes les deux suites sont adjacentes car l'une est croissante, l'autre décroissante et la limite de leur différence est nulle. Elles convergent toutes les deux vers la même limite ℓ.

4. On a $t_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} = u_n + v_n + u_n + 2v_n = 2u_n + 3v_n = t_n$. cette égalité vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (t_n) est constante. En particulier $t_n = t_0 = 2u_0 + 3v_0 = 3 \times 12 = 36$.

Partie C

On a le système $\begin{cases} -u_n + v_n & = & 12 \times \dfrac{1}{6^n} \\ 2u_n + 3v_n & = & 36 \end{cases} \iff \begin{cases} -2u_n + 2v_n & = & 24 \times \dfrac{1}{6^n} \\ 2u_n + 3v_n & = & 36 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} u_n & = & +v_n - 12 \times \dfrac{1}{6^n} \\ \\ 5v_n & = & 36 + 24 \times \dfrac{1}{6^n} \end{cases} \iff \begin{cases} u_n & = & +v_n - 12 \times \dfrac{1}{6^n} \\ \\ v_n & = & \dfrac{36}{5} + \dfrac{24}{5} \times \dfrac{1}{6^n} \end{cases} \iff \begin{cases} u_n & = & \dfrac{36}{5} - \dfrac{36}{5} \times \dfrac{1}{6^n} \\ \\ v_n & = & \dfrac{36}{5} + \dfrac{24}{5} \times \dfrac{1}{6^n} \end{cases}$

Conclusion : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} v_n = \dfrac{36}{5} = 7,2$.

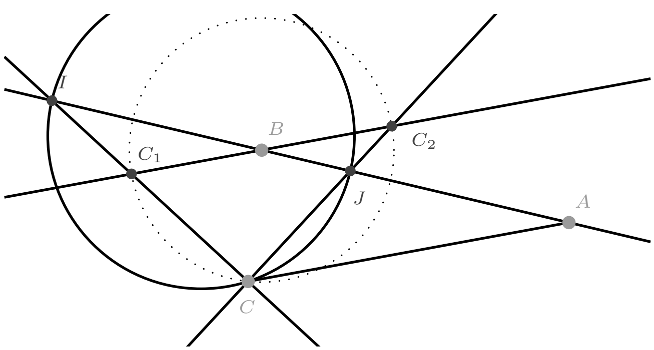
La position limite des points A_n et B_n quand n tend vers l'infini est donc le point d'abscisse $7,2$.

Autre solution : On pose $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U} := \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 12 \times \dfrac{1}{6^n} \\ 36 \end{pmatrix}$.

On a $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{-5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ d'après le théorème 7 page 582 du cours de première.

Donc $\mathbf{U} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{36}{5} - \dfrac{36}{5} \times \dfrac{1}{6^n} \\ \\ \dfrac{36}{5} + \dfrac{24}{5} \times \dfrac{1}{6^n} \end{pmatrix}$.

Solution 7 (Cercles d'Apollonius)



Soit $k := \dfrac{CA}{CB}$. Puisque ABC n'est pas isocèle en C, on a $k \neq 1$. D'après le paragraphe 1.3.2, le lieu des points M est un cercle $\mathscr{C}$.

De plus, d'après le théorème de Thalès dans le triangle ACI, on a

$$k = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{BC_1} = \frac{AI}{BI}.$$

Donc $I \in \mathscr{C}$. De même Dans la configuration de Thalès-papillon,

$$k = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{BC_2} = \frac{AJ}{BJ}.$$

Donc $J \in \mathscr{C}$.

Enfin on sait que la droite (AB) est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$. Il en est donc de même de la droite (IJ). Donc $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre $[IJ]$.

Solution 8 (Sept d'un coup)

On considère H l'isobarycentre de A, B, C et D. Le point H est le barycentre de $(A, 1)$ et $(G_1, 3)$ donc $H \in (AG_1)$, etc.

Solution 9

1. Par définition de $\mathrm{A_1}$ centre de gravité du triangle BCD, donc isobarycentre des points B, C et D : $\overrightarrow{\mathrm{A_1B}} + \overrightarrow{\mathrm{A_1C}} + \overrightarrow{\mathrm{A_1D}} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{\mathrm{A_1A}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{AA_1}} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$.

   Calculons $\overrightarrow{\mathrm{AA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \dfrac{-\mathrm{AC}^2 + \mathrm{AD}^2}{3} = 0$, car $\mathrm{AC} = \mathrm{AD}$.

   Un calcul analogue montre que $\overrightarrow{\mathrm{AA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$.

   Conclusion : la droite $(\mathrm{AA_1})$ orthogonale aux deux droites sécantes du plan (BCD) est orthogonale à ce plan.

2. La droite (AB) est perpendiculaire à (AC) et à (AD), dont est perpendiculaire au plan (ACD). Le volume du tétraèdre est donc égal à

   $\mathrm{V} = \mathrm{AB} \times S(\mathrm{ACD}) = a \times \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3}{2}$.

   D'après la question précédente on peut également utiliser la hauteur $\mathrm{AA_1}$ et la base (BCD) :

   $\mathrm{V} = \mathrm{AA_1} \times S(\mathrm{BCD}) = \mathrm{AA_1} \times \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} \times a\sqrt{2} = \mathrm{AA_1} \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

   On a donc $a \times \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3}{2} = \mathrm{AA_1} \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \iff \mathrm{AA_1} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

3. (a) Le point G vérifie : $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} + \overrightarrow{\mathrm{GD}} = \overrightarrow{0} \iff 4\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$.

   Or on a vu que $\overrightarrow{\mathrm{AA_1}} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$, donc $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AA_1}}$ qui signifie que G appartient Ã la droite $(\mathrm{AA_1})$ (et même que G a pour abscisse $\dfrac{3}{4}$ si le repère est $(\mathrm{A}, \mathrm{A_1})$.)

   On en déduit en prenant les normes que $\mathrm{AG} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

   (b) I est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}} = 2\overrightarrow{M\mathrm{I}}$.

   D'autre part $\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}} + \overrightarrow{M\mathrm{D}} = 4\overrightarrow{M\mathrm{G}}$.

   Donc $\|\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}} + \overrightarrow{M\mathrm{D}}\| = 2\|\overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}\| \iff 4M\mathrm{G} = 4M\mathrm{I} \iff M\mathrm{G} = M\mathrm{I}$.

   Conclusion : l'ensemble des points M cherchés est le plan médiateur du segment [BC].

4. (a) Par définition de H : $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{GH}} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$.

   Donc $4\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \iff \overrightarrow{\mathrm{BA}} = 4\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

   (b) On a $\mathrm{HC}^2 - \mathrm{HD}^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{HC}} + \overrightarrow{\mathrm{HD}}\right)\left(\overrightarrow{\mathrm{HC}} - \overrightarrow{\mathrm{HD}}\right)$.

   Or $\overrightarrow{\mathrm{HC}} + \overrightarrow{\mathrm{HD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{HA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$, mais par définition du point H,
   $\overrightarrow{\mathrm{HA}} = 2\overrightarrow{\mathrm{GA}}$.
   Donc $\overrightarrow{\mathrm{HC}} + \overrightarrow{\mathrm{HD}} = 4\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ (d'après la question précédente).
   D'autre part $\overrightarrow{\mathrm{HC}} - \overrightarrow{\mathrm{HD}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$.
   Conclusion : $\mathrm{HC}^2 - \mathrm{HD}^2 = \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}}$.

(c) On a vu que [BA] est hauteur pour la base (ACD), donc $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}} = 0$, donc $\mathrm{HC}^2 - \mathrm{HD}^2 = 0 \iff \mathrm{HC} = \mathrm{HD}$

Solution 10

1. (a) Pour tout point M on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MG_1}$,
si $M = I$ on a alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IG_1}$. Comme I est le milieu de $[AB]$ on a $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ et, de plus, $-\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{CD}$ ce qui donne

$$\overrightarrow{IG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

(b) G_2 est le barycentre de $(A,1),(B,1)$ et $(D,2)$, et donc, par associativité, G_2 est le barycentre de $(I,2),(D,2)$ car I est le milieu de $[AB]$.
Ainsi G_2 est l'isobarycentre donc le milieu de $[ID]$.

(c) D'après 1.a), $\overrightarrow{IG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{JD}$ car J est le milieu de $[CD]$. Ainsi IG_1DJ est un parallélogramme.
Les diagonales de IG_1DJ se coupent donc en leur milieu, et, comme G_2 est le milieu de $[ID]$, G_1 est aussi le milieu de $[G_1J]$.

2. (a) G_m existe si et seulement si $1 + 1 + m - 2 + m = 2m \neq 0 \iff m \neq 0$. Autrement dit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^*$.

(b) G_m est le barycentre des points pondérés $(A,1),(B,1),(C,m-2)$ et (D,m), et donc, par associativité, G_m est le barycentre de $(I,2),(C,m-2)$ et (D,m).
On en déduit que G_m appartient au plan (ICD).

(c) D'après la question précédente, G_m est le barycentre de $(I,2),(C,m-2)$ et (D,m), et donc, pour tous poins $M, m \in \mathcal{E}$,

$$2\overrightarrow{MI} + (m-2)\overrightarrow{JC} + m\overrightarrow{DM} = 2m\overrightarrow{MG_m}$$

ce qui nous donne avec $M = J$,

$$2m\overrightarrow{JG_m} = 2\overrightarrow{JI} + (m-2)\overrightarrow{JC} + m\overrightarrow{JM} = 2\overrightarrow{JI} + m(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JM}) - 2\overrightarrow{JC}.$$

Sachant que J est le milieu de $[AB]$, on obtient donc $m\overrightarrow{JG_m} = \overrightarrow{JI} - \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{CI}$ est un vecteur constant indépendant de m.

(d) D'après la question précédente, $\overrightarrow{JG_m} = \frac{1}{m}\overrightarrow{CI}$, avec $m \in \mathbb{R}^*$ ce qui donne $\frac{1}{m} \in \mathbb{R}^*$.

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{JG_m}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires. L'ensemble $\mathcal{F}$ est la droite parallèle à (CI), privée de J et passant par J.
Comme G_1 et G_2 appartiennent aussi à cette droite et on en conclut que $\mathcal{F} = (G_1G_2) \setminus \{J\}$.

Solutions

1.6 Travaux dirigés

Exercice 11 (Céviennes).

Soit ABC un triangle, u, v et w trois réels tels que $v + w \neq 0$, $w + u \neq 0$, $u + v \neq 0$, et $u + v + w \neq 0$.
On considère les trois points A', B' et C', appartenant aux côtés respectifs (BC), (CA) et (AB) définis par :

- A' est le barycentre du système de points massifs $\{(B, v), (C, w)\}$,
- B' est le barycentre du système de points massifs $\{(A, u), (C, w)\}$,
- C' est le barycentre du système de points massifs $\{(A, u), (B, v), \}$,

ainsi que G est le barycentre du système de points massifs $\{(A, u), (B, v), (C, w)\}$.
Démontrer que les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en G.

Définition 2.

Trois droites issues des sommets d'un triangle et concourantes s'appellent des **céviennes** de ce triangle.

Solution 11 (Céviennes)
Par associativité du barycentre, G est le barycentre de $\{(A, u), (A', v + w)\}$, donc $G \in (AA')$. *Mutatis mutandis*, $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$.

Exercice 12 (Aires et céviennes).

Soit M un point intérieur au triangle ABC. Montrer que M est barycentre des points A, B, C affectés de coefficients proportionnels aux aires des triangles MBC, MCA, MAB.

Solution 12 (Aires et céviennes)
Soit N l'intersection des droites (AM) et (BC). Si M est le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$, alors N est le barycentre de $(B, \beta), (C, \gamma)$. Les triangles NMB et NMC ont même hauteur issue de M : le quotient de leurs aires est donc : $\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{\gamma}{\beta}$.

Il en est de même des triangles NAB et NAC. Donc :

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{aire}\, NAB}{\text{aire}\, NAC} = \frac{\text{aire}\, NMB}{\text{aire}\, NMC} = \frac{\text{aire}\, NAB - \text{aire}\, NMB}{\text{aire}\, NAC - \text{aire}\, NMC} = \frac{\text{aire}\, MAB}{\text{aire}\, MAC},$$

où l'on s'est servi une fois de plus du théorème 38 page 82 du cours de seconde.

On conclut à l'aide de l'exercice 11.

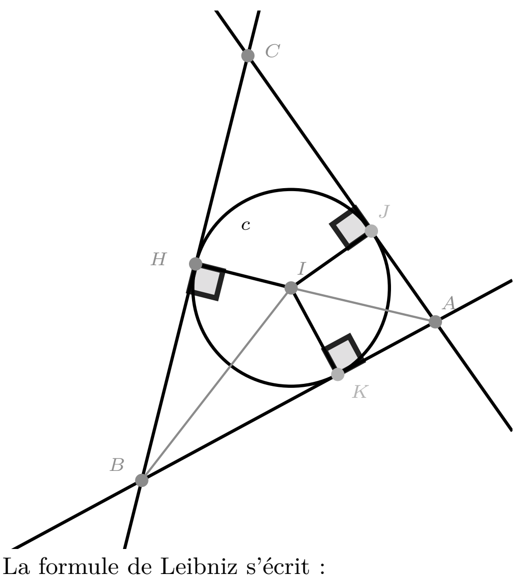
Exercice 13 (Propriété du centre du cercle inscrit dans un triangle)**.**

On donne un triangle ABC et l'on pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

1. Démontrer que le barycentre du système de points massifs $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ est le centre I du cercle inscrit dans le triangle.
2. On se propose de démontrer l'égalité
$$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc.$$
Pour cela, on appliquera la fonction scalaire de Leibniz au système de points massifs précédent, en plaçant successivement le point M en A, B, C.
3. Trouver des formules analogues pour les centres des cercles ex-inscrits.

Solution 13 (Propriété du centre du cercle inscrit dans un triangle)

1.



Sur la figure ci-contre, on a
$$h := IJ = IK = IH.$$
Donc aire $AIB = \dfrac{ch}{2}$, aire $AIC = \dfrac{bh}{2}$ et aire $CIB = \dfrac{ah}{2}$.
D'après l'exercice précédent, I est le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$.

2. La formule de Leibniz s'écrit :
$$aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = (a + b + c)MI^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2.$$
Posons $S := aIA^2 + bIB^2 + cIC^2$. Prenons M respectivement en A, B, C et multiplions les deux membres des relations obtenues respectivement par a, b, c. Nous obtenons :
$$\begin{array}{rcrcl} abc(b+c) & = & a(a+b+c)AI^2 & + & aS \\ abc(c+a) & = & b(a+b+c)BI^2 & + & bS \\ abc(a+b) & = & c(a+b+c)CI^2 & + & cS \end{array}$$
En ajoutant membre à membre, il vient :
$$2abc(a + b + c) = 2(a + b + c)S.$$
D'où $S = abc$.

3. Pour le centre J du cercle ex-inscrit dans l'angle A, on trouverait de même :

$$aJA^2 - bJB^2 - cJC^2 = abc.$$

Exercice 14 (Orthocentre)**.**

On donne un triangle ABC d'orthocentre H. Démontrer que H est le barycentre du système de points massifs $\left\{(A, \tan\widehat{A}), (B, \tan\widehat{B}), (C, \tan\widehat{C})\right\}$.

Solution 14 (Orthocentre)
On note A' la projection orthogonale de A sur (BC).

Supposons d'abord $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ aigus. On a : $\dfrac{AA'}{BA'} = \tan\widehat{B}$ et $\dfrac{AA'}{CA'} = \tan\widehat{C}$. D'où $BA'.\tan\widehat{B} = CA'.\tan\widehat{C}$. Mais $A' \in [BC]$, on en déduit que :

$$\tan\widehat{B}.\overrightarrow{BA'} + \tan\widehat{C}.\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{0}.$$

c'est-à-dire : A' est le barycentre du système de points massifs $\left\{(B, \tan\widehat{B}), (C, \tan\widehat{C})\right\}$.

Le raisonnement est analogue si un des deux angles $\widehat{B}$ ou $\widehat{C}$ est obtus.

Dans tous les cas, on en déduit que H est le barycentre de $(A, \tan\widehat{A}), (B, \tan\widehat{B}), (C, \tan\widehat{C})$, à condition que $\tan\widehat{A} + \tan\widehat{B} + \tan\widehat{C} \neq 0$.

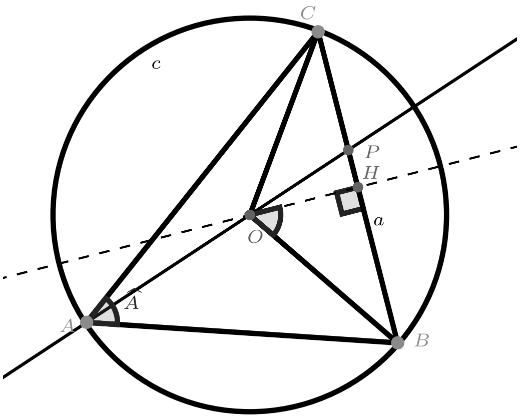
Or $\tan(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) = \dfrac{\tan\widehat{A} + \tan\widehat{B} + \tan\widehat{C} - \tan\widehat{A}.\tan\widehat{B}.\tan\widehat{C}}{1 - \tan\widehat{A}.\tan\widehat{B} - \tan\widehat{C}.\tan\widehat{A} - \tan\widehat{B}.\tan\widehat{C}}$

Or $\tan(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) = \tan\pi = 0$. Donc $\tan\widehat{A} + \tan\widehat{B} + \tan\widehat{C} = \tan\widehat{A}.\tan\widehat{B}.\tan\widehat{C}$ ce qui exclut $\tan\widehat{A} + \tan\widehat{B} + \tan\widehat{C} = 0$.

Exercice 15 (Centre du cercle circonscrit)**.**

On donne un triangle ABC et O le centre du cercle circonscrit à ABC. Démontrer que O est le barycentre du système de points massifs $\left\{\left(A, \sin\left(2\widehat{A}\right)\right), \left(B, \sin\left(2\widehat{B}\right)\right), \left(C, \sin\left(2\widehat{C}\right)\right)\right\}$.

Solution 15 (Centre du cercle circonscrit)



Soit H le milieu de $[BC]$. La droite (OH) est bissectrice de $\widehat{BOC}$.
D'après le théorème de l'angle inscrit, les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{BOH}$ sont égaux.
L'aire du triangle BOC égale

$$2 \times \frac{a \sin \widehat{A}}{2} = R \sin \widehat{A} \cos \widehat{A} = \frac{R}{2} \sin \left(2\widehat{A}\right),$$

en appelant R le rayon du cercle circonscrit.

D'après l'exercice 12, O est bien le barycentre de

$$\left\{ \left(A, \frac{R}{2} \sin \left(2\widehat{A}\right)\right), \left(B, \frac{R}{2} \sin \left(2\widehat{B}\right)\right), \left(C, \frac{R}{2} \sin \left(2\widehat{C}\right)\right) \right\}$$

donc par homogénéité, il est aussi celui de

$$\left\{ \left(A, \sin \left(2\widehat{A}\right)\right), \left(B, \sin \left(2\widehat{B}\right)\right), \left(C, \sin \left(2\widehat{C}\right)\right) \right\}.$$