

Sommaire

■ Premier semestre

1.	Logique et raisonnements	3
2.	Ensembles et applications	31
3.	Calcul algébrique et trigonométrie.....	61
4.	Nombres complexes.....	101
5.	Systèmes linéaires	133
6.	Techniques fondamentales pour l'étude des fonctions.....	157
7.	Fonctions usuelles.....	187
8.	Primitives et équations différentielles.....	221
9.	Suites numériques	255
10.	Limite et continuité des fonctions.....	285
11.	Dérivabilité	315
12.	Calcul matriciel	345

■ Deuxième semestre

13.	Analyse asymptotique	379
14.	Géométrie du plan.....	413
15.	Géométrie de l'espace	443
16.	Polynômes et fractions rationnelles	473
17.	Espaces vectoriels et applications linéaires.....	507
18.	Espaces vectoriels de dimension finie.....	535
19.	Matrices.....	563
20.	Déterminants*	595
21.	Intégration	619

22.	Dénombrément.....	647
23.	Probabilités sur un univers fini	673
24.	Variables aléatoires, espérance, variance.....	705
25.	Séries numériques	741
26.	Fonctions de deux variables	775

■ **Annexes**

	Formulaire.....	807
	Index des notations.....	813
	Index.....	815

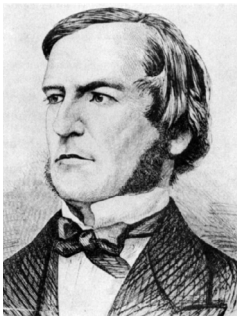
■ Premier semestre

Chapitre

1

Logique et raisonnements

UN MATHÉMATICIEN



Né dans une famille de commerçants, **George Boole** est un parfait autodidacte. Il apprend seul le latin et le grec et lit avec passion les textes de grands mathématiciens tels Joseph Lagrange et Pierre-Simon Laplace. Dans sa principale publication, *An investigation into the Laws of Thought*, publié en 1854, il innove en fondant sur des bases mathématiques le raisonnement logique, jusque-là considéré comme une branche de la philosophie.

■ Un peu d'histoire

On considère les Grecs anciens comme les fondateurs des mathématiques car les premiers, ils ont eu le souci de justifier leurs résultats par des démonstrations. Des philosophes comme Aristote ou les Stoïciens ont même réfléchi à la notion de raisonnement. Au milieu du XIX^e, les mathématiciens anglais George Boole et Augustus De Morgan s'intéressent au raisonnement logique en tant que tel. Le premier définit des opérations logiques telles la négation d'une proposition, la conjonction ou la disjonction de deux d'entre elles. Le second, s'inspirant d'Aristote, introduit la notion de quantificateur. Au tournant du XX^e siècle, des mathématiciens comme Giuseppe Peano ou Bertrand Russell utilisent le langage de la théorie des ensembles pour fonder le raisonnement mathématique sur des bases solides.

■ ■ Objectifs

■ les incontournables

- Manipuler les quantificateurs.
- Raisonner par implication ou par équivalence.
- Utiliser un raisonnement par l'absurde ou par contraposition.
- Effectuer un raisonnement par récurrence simple ou double.

■ et plus si affinités

- Appliquer une récurrence forte.
- Raisonner par analyse-synthèse.

■ ■ Résumé de cours

■ Rudiments de logique

Connecteurs logiques

Définition : Une **proposition** (ou assertion) est un énoncé mathématique qui peut prendre deux valeurs : vrai (V) ou faux (F).

Définition : Soit P et Q deux propositions.

La **négation** de P est la proposition, notée **non P** , définie par :

- non P est vraie lorsque P est fausse ;
- non P est fausse lorsque P est vraie.

La **conjonction** de P et de Q est la proposition, notée **P et Q** , définie de la manière suivante :

- P et Q est vraie lorsque P et Q sont vraies ;
- P et Q est fausse lorsque l'une au moins des deux propositions est fausse.

La **disjonction** de P et de Q est la proposition, notée **P ou Q** , définie de la manière suivante :

- P ou Q est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie ;
- P ou Q est fausse lorsque P et Q sont fausses.

Définition : Soit P et Q deux propositions.

L'**implication** P entraîne Q est la proposition, notée **$P \Rightarrow Q$** définie par non P ou Q .

L'**équivalence** de P et de Q est la proposition, notée **$P \Leftrightarrow Q$** , définie par la conjonction $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Vocabulaire : La proposition $P \Rightarrow Q$ se lit « P implique Q » ou encore « **si P alors Q** ». La proposition $P \Leftrightarrow Q$ se lit également « **P si et seulement si Q** ».

Remarques :

- Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une **condition suffisante** pour avoir Q , ou que Q est une **condition nécessaire** pour avoir P .
- Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, P est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir Q . Ainsi, les équivalences sont les conditions nécessaires et suffisantes.

Table de vérité des connecteurs logiques

P	Q	non P	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque : d'après cette table de vérité, si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**.

Règles de calcul

Proposition 1.1.— Règles de calcul pour la conjonction, la disjonction —. Soit P , Q et R trois assertions. Alors

- $P \text{ ou } Q \iff Q \text{ ou } P$
- $(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \iff P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$
- $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \iff (P \text{ ou } R) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
- $P \text{ et } Q \iff Q \text{ et } P$
- $(P \text{ et } Q) \text{ et } R \iff P \text{ et } (Q \text{ et } R)$
- $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$

Proposition 1.2.— Règles de calcul pour la négation —. Soit P et Q deux assertions. Alors

- $\text{non}(\text{non } P) \iff P$
- $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
- $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
- $\text{non}(P \Rightarrow Q) \iff P \text{ et } (\text{non } Q)$

Théorème 1.3.— Soit P et Q deux propositions.

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$$

Vocabulaire : L'implication $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$ est appelée la **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$.

■ Quantificateurs

Définition : Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un paramètre x , où x est un élément d'un ensemble E .

- **Quantificateur universel :** Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E , on écrit :

$$\forall x \in E, P(x)$$

Le symbole \forall est appelé **quantificateur universel** et se lit « **quel que soit** ».

- **Quantificateur existentiel —.** Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E , on écrit :

$$\exists x \in E, P(x)$$

Le symbole \exists est appelé **quantificateur existentiel** et se lit « **il existe** ».

Proposition 1.4.— Négation des propositions avec quantificateurs —.

- La négation de la proposition $\forall x \in E, P(x)$ est : $\exists x \in E, \text{non } P(x)$.
- La négation de la proposition $\exists x \in E, P(x)$ est : $\forall x \in E, \text{non } P(x)$.

Remarque : attention, l'ordre des quantificateurs est très important. Lorsque plusieurs quantificateurs apparaissent dans une proposition, on ne peut pas intervertir leur ordre sans changer (en général) le sens de la proposition. Pour s'en convaincre, on pourra consulter le **Vrai/Faux**.

■ Modes de raisonnement

Théorème 1.5.— Soit P et Q des propositions.

- **Preuve par déduction**

- Si Q est vraie
 - Si $Q \Rightarrow P$ est vraie
- Alors P est vraie**

- **Preuve par disjonction de cas**

- Si $Q \Rightarrow P$ est vraie
 - Si $\text{non}(Q) \Rightarrow P$ est vraie
- Alors P est vraie**

- **Preuve par l'absurde**

- Si $\text{non}(P) \Rightarrow Q$ est vraie
 - Si $\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q)$ est vraie
- Alors P est vraie**

■ Raisonnement par récurrence

Théorème 1.6.— **Propriété fondamentale de \mathbb{N}** —. Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément.

Théorème 1.7.— **Principe de récurrence** —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation** : la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité** : pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n + 1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Théorème 1.8.— **Récurrence double** —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation** : les propriétés $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0 + 1)$ sont vraies,
- **Hérédité** : pour tout entier $n \geq n_0$, $(\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1))$ implique $\mathcal{P}(n + 2)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Théorème 1.9.— **Principe de récurrence forte (ou récurrence avec prédécesseurs)** —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation** : la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité** : pour tout entier $n \geq n_0$, $(\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0 + 1)$ et \dots et $\mathcal{P}(n))$ implique $\mathcal{P}(n + 1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

■ ■ Méthodes

■ Démontrer une proposition

□ Méthode 1.1.— Comment démontrer une proposition par déduction

Si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**. C'est un principe très simple que l'on utilise en permanence : si l'on sait qu'une proposition P est vraie (propriété du cours, résultat d'une question antérieure...) et que l'on sait démontrer $P \Rightarrow Q$, alors on a démontré que la proposition Q est vraie.

Exemple : montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$.

On a $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1$. Or, $(x - 2)^2 \geq 0$ (le carré d'un réel est positif) et $1 > 0$. Par conséquent, $(x - 2)^2 + 1 > 0$, c'est-à-dire $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Mise en œuvre : tous les exercices !

□ Méthode 1.2.— Comment démontrer une proposition par disjonction de cas

On est parfois amené à distinguer plusieurs cas pour démontrer qu'une proposition est vraie. C'est le principe d'une démonstration par **disjonction de cas**. En particulier, si l'on souhaite démontrer qu'une proposition $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble E , on peut prouver la proposition pour tous les éléments d'une partie A de E , puis pour les éléments de E n'appartenant pas à A .

Exemple : montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On va démontrer que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ en distinguant les cas n pair ou impair.

► Si n est pair, on peut écrire $n = 2k$, où $k \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{N}$.

► Si n est impair, on a $n = 2p + 1$, où $p \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{2} = (2p+1)(p+1) \in \mathbb{N}$.

Finalement, pour tout entier naturel n , $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre : exercice 1.5, exercice 1.6.

□ Méthode 1.3.— Comment démontrer une proposition par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on peut utiliser un **raisonnement par l'absurde**. Pour cela, on suppose que P est fausse et on démontre que l'on aboutit alors à une contradiction.

Exemple : montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.

Nous allons démontrer cette proposition en raisonnant par l'absurde. Pour cela, on suppose qu'il existe un entier naturel N_0 supérieur à tous les autres. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq N_0$. La relation est donc vraie pour l'entier $n = N_0 + 1$, donc $N_0 + 1 \leq N_0$; d'où $1 \leq 0$, ce qui est faux ! Par conséquent, il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.

Mise en œuvre : exercice 1.9, exercice 1.12.

■ Démontrer une implication

□ Méthode 1.4.— Comment démontrer une implication par raisonnement direct

Pour montrer directement l'implication $P \Rightarrow Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie. La démonstration commence par « supposons que P est vraie » et se termine par « Q est vraie ».

Exemple : démontrer que, pour x et y réels, $x^2 = y^2 \Rightarrow |x| = |y|$.

Soit x et y deux réels tels que $x^2 = y^2$. On a donc $x^2 - y^2 = 0$, soit $(x - y)(x + y) = 0$.

Par conséquent, $x - y = 0$ ou $x + y = 0$. Ainsi, $x = y$ ou $x = -y$, ce qui signifie que $|x| = |y|$ (x et y sont égaux ou opposés). On a donc démontré l'implication attendue.

□ Méthode 1.5.— Comment démontrer une implication par contraposition

Le raisonnement par contraposition est basé sur le **théorème 1.3** :

l'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$.

Ainsi, pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on peut prouver que l'implication $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$ est vraie. En pratique, on suppose donc que $\text{non } Q$ est vraie et on montre que $\text{non } P$ est vraie.

Exemple : soit n un entier naturel. Montrer que, si n^2 est pair, alors n est pair.

La proposition à démontrer s'écrit : « n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair ». Nous allons raisonner par contraposition en démontrant la proposition (équivalente) : « n n'est pas pair $\Rightarrow n^2$ n'est pas pair », c'est-à-dire « n est impair $\Rightarrow n^2$ est impair ». Considérons un entier impair n : il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. On a alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, ce qui s'écrit aussi $n^2 = 2p + 1$, où $p = 2k^2 + 2k$. Par conséquent, n^2 est un entier impair, ce qui démontre l'implication : si n est impair, alors n^2 est impair. Par contraposition, nous avons donc montré l'implication : si n^2 est pair, alors n est pair.

Exemple : montrer l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Nous allons de nouveau utiliser la contraposée en démontrant l'implication « $1 + x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ ». Soit x un réel tel que $1 + x \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $x = (1 + x) - 1$. Or $1 + x$ est un nombre rationnel (hypothèse), et 1 aussi. Par conséquent, $(1 + x) - 1$ est un nombre rationnel, ce qui montre que $x \in \mathbb{Q}$. Par contraposition, on a démontré l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Mise en œuvre : exercice 1.8

□ Méthode 1.6.— Comment démontrer une implication par l'absurde

L'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition $\text{non } P$ ou Q , sa négation est donc P et $\text{non } Q$. Pour démontrer par l'absurde l'implication $P \Rightarrow Q$:

- on suppose que P est vraie et que Q est fausse ;
- on montre que cela aboutit à une contradiction.

Exemple : soit $x, y \in \mathbb{R}^+$. En raisonnant par l'absurde, montrer que, si $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$, alors $x = y$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$ et $x \neq y$ (P est vraie, Q est fausse). Il en résulte que $x(1+x) = y(1+y)$, d'où l'on tire $x^2 - y^2 = y - x$, soit $(x-y)(x+y) = y-x$, d'où $(x-y)(x+y+1) = 0$. Comme $x \neq y$, on en déduit que $x+y+1=0$, donc $x+y=-1$. Absurde vu que x et y sont positifs ! leur somme ne saurait être négative. D'où le résultat.

■ Démontrer une équivalence

□ Méthode 1.7.— Comment démontrer une équivalence par double implication

Par définition, l'équivalence $\langle P \Leftrightarrow Q \rangle$ est la proposition $\langle P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P \rangle$. Démontrer par double implication l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, c'est démontrer que les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. En pratique, pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$ par double implication :

- on démontre $P \Rightarrow Q$;
- puis on démontre $Q \Rightarrow P$.

Dans ce cas, il y a donc deux démonstrations à faire pour obtenir l'équivalence.

Exemple : on pose $f(x) = mx + 1$. Montrer que f garde un signe constant sur \mathbb{R} si et seulement si $m = 0$. Nous allons prouver cette équivalence en raisonnant par double implication.

⇒ Si $m = 0$, f est constante et égale à 1, elle garde donc un signe constant (positif) sur \mathbb{R} .

⇐ Réciproquement, montrons que, si f garde un signe constant sur \mathbb{R} , alors $m = 0$. Pour cela, on raisonne par contraposée en supposant que $m \neq 0$. On a alors :

$$f(x) = m\left(x + \frac{1}{m}\right),$$

et f change de signe en $-\frac{1}{m}$ (du signe de m pour $x > -\frac{1}{m}$, du signe de $-m$ pour $x < -\frac{1}{m}$). Ainsi, si $m \neq 0$, f change de signe sur \mathbb{R} .

Nous avons montré les deux implications. Ainsi, f garde un signe constant sur \mathbb{R} si et seulement si $m = 0$.

Exemple : résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2x = \sqrt{x^2 + 1}$.

On va raisonner par double implication.

• Si x est solution de l'équation, alors $(2x)^2 = x^2 + 1$, soit $4x^2 = x^2 + 1$, d'où $3x^2 = 1$. On obtient donc $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

• Réciproquement, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ sont-ils solutions de l'équation ? Si x est égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{4/3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Par conséquent, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est solution mais $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne l'est pas.

Finalement, l'unique solution de l'équation est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

□ Méthode 1.8.— Comment démontrer une équivalence par raisonnement direct

Pour démontrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut également enchaîner les équivalences. On passe de P à Q par une succession d'équivalences en s'assurant, à chaque étape du raisonnement, que l'équivalence est bien conservée.

Remarque : Cette méthode est particulièrement adaptée à la résolution d'équations ou d'inéquations. Notons qu'il n'est pas toujours possible d'appliquer cette méthode directe pour démontrer une équivalence. Il est parfois nécessaire de procéder par double implication (**méthode 1.7**).

Exemple : résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2x = \sqrt{x^2 + 1}$.

Pour $x < 0$, l'équation n'a pas de solution (un nombre strictement négatif ne peut pas être égal à une racine carrée). Pour $x \geq 0$, on a :

$$2x = \sqrt{x^2 + 1} \iff (2x)^2 = (\sqrt{x^2 + 1})^2 \iff 4x^2 = x^2 + 1 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ainsi, l'unique solution de l'équation est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mise en œuvre : exercice 1.7.

■ Utiliser un contre-exemple

□ Méthode 1.9.— Comment utiliser un contre-exemple

La négation de la proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » est « $\exists x \in E, \text{non } P(x)$ ».

Si l'on souhaite démontrer qu'une proposition du type « $\forall x \in E, P(x)$ » est fautive, il suffit de trouver une valeur de x de E pour laquelle la proposition $P(x)$ est fautive. On parle alors de **contre-exemple**.

Exemple : la fonction sinus n'est pas paire. Par exemple, $\sin(\frac{\pi}{2}) \neq \sin(-\frac{\pi}{2})$.

Exemple : la proposition « tout entier naturel est somme de trois carrés » est-elle vraie ?

On peut facilement vérifier que cette proposition est vraie pour tout entier $n \in \{0, \dots, 6\}$. Par exemple, $0 = 0^2 + 0^2 + 0^2$ et $5 = 2^2 + 1^2 + 0^2$. En revanche, la proposition est fautive pour $n = 7$. Sinon, on pourrait écrire $7 = a^2 + b^2 + c^2$, avec nécessairement $a, b, c \in \{0, \dots, 2\}$ (puisque $3^2 = 9$). Mais, avec trois des carrés $0^2, 1^2$ et 2^2 , il est impossible de former 7. Ainsi, 7 constitue un contre-exemple et la proposition énoncée est donc fautive.

Mise en œuvre : voir le Vrai/Faux.

■ Reasonner par analyse-synthèse

□ Méthode 1.10.— Comment raisonner par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode qui permet de déterminer les solutions d'un problème. Ce raisonnement se déroule en deux étapes.

- Phase d'**analyse** : on suppose le problème résolu et on en déduit des conditions nécessaires.
- Phase de **synthèse** : on montre que ces conditions obtenues sont suffisantes et on résout le problème.

En pratique, on démontre que, si x est solution du problème, il ne peut prendre que certaines valeurs (phase d'analyse); on vérifie ensuite si ces valeurs sont effectivement solutions (phase de synthèse).

Exemple : montrer que toute fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Nous allons raisonner par analyse-synthèse. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Analyse. On suppose le problème résolu, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions g et h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , avec g paire et h impaire telles que $f = g + h$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x)$$

Comme g est paire et h impaire, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = g(x) - h(x)$$

En sommant les deux égalités précédentes, on en déduit que $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$.

De même, en retranchant ces deux égalités, il vient $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Ainsi, s'il existe deux fonctions solutions du problème, alors ce sont nécessairement les fonctions g et h ci-dessus.

Synthèse. Nous allons vérifier que g et h sont bien solutions du problème.

- La fonction g est paire puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x).$$

- La fonction h est impaire puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x).$$

- Enfin, on a $f = g + h$. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Par conséquent, nous avons démontré par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (g, h) , avec g paire et h impaire tel que $f = g + h$.

Mise en œuvre : exercice 1.10 et exercice 1.11.

■ Raisonner par récurrence

□ Méthode 1.11.— Comment appliquer une récurrence simple

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **simple**, qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geq n_0$:

- **Initialisation :** On vérifie que la proposition est vraie au rang initial n_0 ;
- **Hérédité :** On suppose que la proposition est vraie à un certain rang $n \geq n_0$ fixé (« on suppose que la proposition est vraie au rang n ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n + 1$;
- **Conclusion :** « Par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ ».

Exemple : montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ici $n_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$.

• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geq 1$ fixé, c'est-à-dire que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. On déduit de cette hypothèse de récurrence que :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + n + 1 &= (1 + 2 + \dots + n) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

• **Conclusion :** Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Exemple : montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$.

Ici $n_0 = 1$. Pour $n \geq 1$, on introduit la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \ll 1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1 \gg.$$

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 \times 1! = 1$, $(1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ et $1 = 1$.

• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geq 1$ fixé, c'est-à-dire que :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1.$$

D'après cette hypothèse de récurrence, on a alors :

$$\begin{aligned} 1 \times 1! + \dots + (n+1) \times (n+1)! &= 1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)![1 + n + 1] - 1 \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Cela démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

• **Conclusion :** Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Mise en œuvre : exercice 1.13, exercice 1.14, exercice 1.19, exercice 1.20.

□ Méthode 1.12.— Comment appliquer une récurrence double

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **double**, qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geq n_0$:

- **Initialisation :** on vérifie que la proposition est vraie aux deux rangs initiaux n_0 et $n_0 + 1$;
- **Hérédité :** on suppose que la proposition est vraie aux rangs n et $n + 1$, où n est un entier fixé supérieur ou égal à n_0 (« on suppose que la proposition est vraie aux rangs n et $n + 1$ ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n + 2$;
- **Conclusion :** « Par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ ».

Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n$.

On effectue une récurrence double en introduisant, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \ll u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n \gg.$$

• **Initialisation** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $u_0 = 1$ et $4 \times 2^{0+1} - 7 \times 3^0 = 8 - 7 = 1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $u_1 = -5$ et $4 \times 2^{1+1} - 7 \times 3^1 = 16 - 21 = -5$.

• **Hérédité** : On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, où $n \in \mathbb{N}$ est fixé, c'est-à-dire :

$$u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+1}.$$

En utilisant l'égalité donnant u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n , on en déduit que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n = 5(4 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+1}) - 6(4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n) \\ &= 20 \times 2^{n+2} - 35 \times 3^{n+1} - 24 \times 2^{n+1} + 42 \times 3^n \\ &= 2^{n+1}(2 \times 20 - 24) + 3^n(42 - 35 \times 3) = 16 \times 2^{n+1} - 63 \times 3^n \\ &= 4 \times 2^2 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^2 \times 3^n = 4 \times 2^{n+3} - 7 \times 3^{n+2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• **Conclusion** : Par récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre : exercice 1.15, exercice 1.16.

□ **Méthode 1.13.— Comment appliquer une récurrence forte**

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **forte**, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geq n_0$:

- **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie au rang initial n_0 ;
- **Hérédité** : on suppose que la propriété est vraie du rang n_0 **jusqu'à** un certain rang $n \geq n_0$ fixé (« on suppose que la propriété est vraie aux rangs $n_0, n_0 + 1, \dots, n$ ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n + 1$;
- **Conclusion** : « Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ ».

Exemple : montrer que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Pour $n \geq 2$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « n s'écrit comme un produit de nombres premiers ».

Ici le rang initial n_0 est égal à 2.

• **Initialisation** : $\mathcal{P}(2)$ est vraie puisque $2 = 2$ et 2 est un nombre premier !

• **Hérédité** : Soit n un entier supérieur ou égal à 2 fixé. On suppose que $\mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, c'est-à-dire que tout entier $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ peut se décomposer en produit de nombres premiers. On veut montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ($n+1$ se décompose en un produit de nombres premiers).

Il y a deux cas :

- ▶ si $n+1$ est premier, il n'y a rien à faire ($n+1 = n+1$ et $n+1$ est un nombre premier !)
- ▶ si $n+1$ n'est pas un nombre premier, on peut écrire $n+1 = pq$, où p et q sont des entiers compris entre 2 et n . D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à p et q (p et q appartiennent à $\llbracket 2, n \rrbracket$ donc $\mathcal{P}(p)$ et $\mathcal{P}(q)$ sont vraies) : p et q se décomposent en produit de nombres premiers. Il en est alors de même pour leur produit $pq = n+1$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

• **Conclusion** : On vient de démontrer, par récurrence forte, que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Mise en œuvre : exercice 1.17.

■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. $\forall x < 2, x^2 < 4$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. La négation de « la fonction f est croissante sur \mathbb{R} » est « la fonction f est décroissante sur \mathbb{R} ».	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. La négation de « la nuit, tous les chats sont gris » est « le jour, aucun chat n'est gris »	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. La réciproque de « la nuit, tous les chats sont gris » est « quand tous les chats sont gris, il fait nuit »	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. La contraposée de « la nuit, tous les chats sont gris » est « quand tous les chats sont gris, il fait jour ».	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \geq n + 1$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>