

Avant-propos

Ce livre est constitué de rappels de cours, d'exercices et de travaux dirigés corrigés.

Nous voudrions profiter de cet avant-propos pour donner quelques conseils à nos lecteurs, étudiants en MPSI et MP2I.

Le cours doit être appris. Pourquoi ?

- Parce que le temps de la Première et de la Terminale où les maths, même en tant que spécialité, n'étaient qu'une matière parmi de nombreuses autres est heureusement passé. L'horaire de mathématiques en MPSI est conséquent. Vous aller prendre contact avec la matière principale qui irrigue toutes les connaissances scientifiques.
- Parce que vous commencez, cette année, à préparer un concours d'entrée dans une Grande École et que les épreuves se passent sans document. D'ailleurs, que feriez-vous si, alors que vous êtes assis dans un avion, vous entendez le pilote qui demande à son copilote de lui sortir la notice pour savoir comment atterrir ?
- Parce que, comme nous le disent les gérontologues, la mémoire ne fonctionne correctement que si elle est sollicitée en permanence.
- Ne vous laissez pas aller à lire la solution d'un exercice avant de l'avoir cherchée.

Solution lue = exercice foutu

L'apprentissage du cours et sa compréhension sont une activité assez passive. Il faut s'atteler le plus vite possible à la recherche d'exercices, activité véritablement *mathématicienne*, personnelle, excitante et créatrice.

Nous avons respecté le programme et sa partition en deux semestres. Le premier commençant par une familiarisation avec les outils du mathématicien et les calculs qu'il ne sert à rien de mépriser. On ne comprend rien si l'on ne sait pas calculer. Cette partie technique vous sera utile dans toutes vos activités scientifiques.

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté croissante ni même décroissante. S'ils sont truffés d'indications, nous vous avons cependant réservé quelques surprises. Nous vous proposons plus de 400 exercices corrigés !

Index des notations

$\mathcal{F}(E, F)$: ensemble des applications de E dans F .

$\mathcal{C}(E, F)$: ensemble des applications continues sur E et à valeurs dans F .

$\mathcal{CM}(I, E)$: ensemble des applications continues par morceaux de $\mathcal{F}(I, F)$.

$\mathcal{C}^k(I, E)$: ensemble des applications de classe \mathcal{C}^k sur I à valeurs dans E .

$\mathcal{L}(E, F)$: espace vectoriel des applications linéaires de E dans F .

$\text{GL}(E)$: groupe linéaire de E .

I_E : application identique dans E .

$\text{O}(E)$: groupe orthogonal de E .

$\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: espace vectoriel des matrices (n, p) à coefficients dans \mathbb{K} .

$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$: algèbre des matrices carrées (n, n) à coefficients dans \mathbb{K} .

$\text{GL}_n(\mathbb{K})$ groupe des éléments inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

I_n : élément unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

$\text{O}(n)$: groupe des matrices orthogonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

\mathfrak{S}_n : groupe symétrique d'ordre n .

Ker : noyau.

Im : image.

\det : déterminant.

card : cardinal.

$\text{Vect}(A)$: sous-espace vectoriel engendré par A .

$d(x, F)$: distance du vecteur x au sous-espace vectoriel F .

$\llbracket a, b \rrbracket = [a, b] \cap \mathbb{Z}$.

$\delta_{i,j}$: symbole de Krönecker. $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

$\lfloor x \rfloor$: partie entière de x .

Table des matières

Premier semestre

Chapitre 1	Raisonnement, vocabulaire ensembliste, calculs algébriques	1
Chapitre 2	Nombres complexes et trigonométrie.	11
Chapitre 3	Techniques fondamentales de calcul en analyse . . .	31
Chapitre 4	Nombres réels et suites réelles	45
Chapitre 5	Limites, continuité, dérivabilité	65
Chapitre 6	Arithmétique des entiers relatifs	97
Chapitre 7	Structures algébriques usuelles.	111
Chapitre 8	Polynômes et fractions rationnelles	127

Deuxième semestre

Chapitre 9	Analyse asymptotique	149
Chapitre 10	Espaces vectoriels et applications linéaires.	165
Chapitre 11	Matrices	193
Chapitre 12	Déterminants	219
Chapitre 13	Intégration	241
Chapitre 14	Séries numériques	271
Chapitre 15	Probabilités	287
Chapitre 16	Espaces préhilbertiens réels	323
Chapitre 17	Familles sommables	339
Chapitre 18	Fonctions de deux variables	347

1 - Raisonnement, vocabulaire ensembliste, calculs algébriques

Rappels de cours

Un ensemble est un *symbole* « doté de vertus » que l'on a coutume d'attribuer à une *collection d'objets*. Pour écrire que x est élément de E , on écrit $x \in E$.

L'ensemble sans élément est noté \emptyset .

Les ensembles sont susceptibles de satisfaire à certaines relations. Nous considérons comme comprise la notion de **relation** R .

On appelle **négation** de R , notée $(\text{non } R)$ et alors $\text{non}(\text{non } R)$ est R .

- **Conjonction** : c'est la relation (notée R_1 et R_2). Elle est vraie si R_1 et R_2 le sont.

- **Disjonction** de deux relations R_1, R_2 (notée R_1 ou R_2). Elle est vraie si l'une au moins des deux est vraie.

- **Implication** (notée $R_1 \Rightarrow R_2$) est : R_2 ou $(\text{non } R_1)$.

- **Équivalence** : (notée $R_1 \iff R_2$). C'est $(R_1 \Rightarrow R_2 \text{ et } R_2 \Rightarrow R_1)$

- **Raisonnement par l'absurde** :

montrer $R_1 \Rightarrow R_2$ est équivalent à : montrer $(\text{non } R_2) \Rightarrow (\text{non } R_1)$.

- **Relation d'inclusion** : si E et F sont deux ensembles, on dit que E est contenu dans F ou E est une partie de F si $x \in E \Rightarrow x \in F$.

- **Relation d'égalité** : $E = F$ si $E \subset F$ et $F \subset E$.

- **Quantificateurs**

Pour tout x , la relation R est vérifiée : $\forall x, R$.

Il existe x tel que R soit vérifiée : $\exists x, R$.

$$\text{non } (\exists x \in E, R) \iff (\forall x \in E, \text{non } R)$$

$$\text{non } (\forall x \in E, R) \iff (\exists x \in E, \text{non } R)$$

- Opérations sur les parties d'un ensemble.

- $\mathcal{P}(E)$ ensemble des parties de l'ensemble E .

- $C_E(A) = E \setminus A = \bar{A} = A^c$ le complémentaire dans E de la partie A .

• **Intersection et réunion de deux ensembles**

$$x \in A \cap B \iff (x \in A) \text{ et } (x \in B)$$

$$x \in A \cup B \iff (x \in A) \text{ ou } (x \in B)$$

$$C_E(\emptyset) = E \text{ et } C_E(E) = \emptyset,$$

$$C_E(A \cup B) = (C_E(A)) \cap (C_E(B)) \text{ et } C_E(A \cap B) = (C_E(A)) \cup (C_E(B)).$$

$$A \cap A = A ; A \cap B = B \cap A ; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

$$A \cup A = A ; A \cup B = B \cup A ; A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) ; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *disjoints*.

• **Produit cartésien de deux ensembles**

C'est l'ensemble des couples (x, y) , $x \in E$ et $y \in F$. Il est noté $E \times F$.

• Relations binaires. \mathcal{R} est dite

réflexive, si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$,

symétrique, si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,

antisymétrique, si $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$,

transitive, si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$,

\mathcal{R} est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique, transitive.

\mathcal{R} est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique, transitive.

On appelle **classe d'équivalence** de x pour la relation \mathcal{R} , l'ensemble des y de E tels que $x\mathcal{R}y$.

Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence \mathcal{R} sur E , sont non vides, deux à deux disjointes de réunion E .

On dit que x est congru à y modulo a dans \mathbb{R} (on note $x \equiv y [a]$) s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = ka$.

On dit que x est congru à y modulo n dans \mathbb{Z} (on note $x \equiv y [n]$) s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kn$.

Applications

• Une application f de E dans F associe à tout élément x de E un unique élément y de F que l'on note $y = f(x)$.

• La restriction de f à $A \subset E$ est $f|_A : A \mapsto F, x \mapsto f(x)$.

• Si $A \subset E$, on note \mathbb{I}_A la fonction caractéristique de A . C'est l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par $\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in C_E(A) \end{cases}$

• Image directe de $A \subset E$ est la partie $f(A) = \{f(x) \in F \mid x \in A\}$.

• Image réciproque de $B \subset F$ par f est $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ *i.e.* l'ensemble des antécédents des éléments de B .

• Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$, on définit $g \circ f \in \mathcal{F}(E, G)$ par la formule

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

- $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est **injective** si deux éléments distincts de E ont des images distinctes, ce qui s'écrit :

$$\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

i.e. $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

- $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est **surjective** si tout élément de F a au moins un antécédent par f *i.e.*

$$(\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)) \text{ i.e. } f(E) = F.$$

- $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est **bijective** si elle est à la fois surjective et injective *i.e.* si

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).$$

- La composée de deux applications injectives (*resp.* surjectives, *resp.* bijectives), est injective (*resp.* surjective, *resp.* bijective).

Dans ce dernier cas, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Énoncés des exercices

1. Montrer $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$.

2. Montrer $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

3. Montrer : $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$.

4. Soient A et B des parties d'un ensemble E .

Montrer : $B \subset A \iff \forall X \in \mathcal{P}(E), (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$.

5. Soient A et B des parties d'un ensemble E . On définit $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$.

- Donner une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de f .
- Idem avec la surjectivité.

6. Soit f une application de E dans lui-même.

Montrer que f est bijective si, et seulement si, pour toute partie A de E on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ où \overline{A} désigne le complémentaire de A dans E .

7. Soit f une bijection de \mathbb{N} sur lui-même.

a. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$ montrer $f = Id$.

b. Idem si l'on suppose $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$.

c. On suppose enfin : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \neq n$. Prouver que $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < n\}$ et $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > n\}$ sont des parties infinies de \mathbb{N} .

8. Soit E un ensemble. Montrer que la relation \mathcal{R} relation définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$A\mathcal{R}B \iff A = B \text{ ou } A = \overline{B}$$

est une relation d'équivalence.

9. Soit \mathcal{R} la relation définie sur \mathbb{R} par : $x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$.

a. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

b. Pour tout nombre réel x préciser le cardinal de la classe d'équivalence de x .

10. Montrer $\binom{n+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n}{p}$ si $0 \leq p \leq n$

a. Par récurrence sur n .

b. En utilisant $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.

c. Déterminer des nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k^2 = \alpha \frac{k(k-1)}{2} + \beta k \text{ et } k^3 = \gamma \frac{k(k-1)(k-2)}{6} + \delta \frac{k(k-1)}{2} + \varepsilon k.$$

Retrouver alors $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$ et $\sum_{k=1}^n k^3$.

11. Soient E un ensemble de cardinal n et $\mathcal{A}_n = \{f : E \rightarrow \mathbb{N} \mid \sum_{x \in E} f(x) \leq p\}$ où p est un entier naturel fixé.

Montrer par récurrence sur n que \mathcal{A}_n contient $\binom{n+p}{n}$ éléments.

12. Soit $(\Sigma_2) \begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^3z = 1 - m \end{cases}$ où $m \in \mathbb{R}$.

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et en discutant suivant les valeurs de m préciser, dans les cas où ce système admet des solutions, la nature géométrique de l'ensemble de ces solutions.

13. On considère le système $(\Sigma_1) \begin{cases} ax + by + z = \alpha \\ x + aby + z = \beta \\ x + by + az = \gamma \end{cases}$ où $(a, b, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^5$.

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et en discutant suivant les valeurs de $(a, b, \alpha, \beta, \gamma)$ préciser, dans les cas où ce système admet des solutions, la nature géométrique de l'ensemble de ces solutions.

14. Soient f une application de E dans F et A_1, A_2 deux parties de E . Montrer que

a. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.

b. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

c. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ avec égalité si f est injective.

d. $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$ avec égalité si f est injective.

15. Soient f une application de E dans F et B_1, B_2 deux parties de F . Montrer que
- $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
 - $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
 - $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
 - $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.
-
16. Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G .
- Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
 - Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
-

Solutions des exercices

1. Supposons $A \cup B = A \cap C$.
 $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A$ donc $B \subset A$.
 De même $A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$ d'où $A \subset C$.
 Réciproquement si $B \subset A \subset C$ alors $A \cup B = A$ et $A \cap C = A$ d'où $A \cup B = A \cap C$.
-
2. Si $x \in (A \cup B) \setminus C$ alors ou bien $x \in A$ ou bien $x \in B$ mais, comme $x \notin C$, cela montre que ou bien $x \in A \setminus C$ ou bien $x \in B \setminus C$, ce qui prouve $(A \cup B) \setminus C \subset (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
 Réciproquement si $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ alors x est soit dans A soit dans B donc dans $A \cup B$ mais $x \notin C$ donc $x \in (A \cup B) \setminus C$.
 En définitive on a montré : $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
-
3. Soit $x \in B$, distinguons deux cas :
- ou bien $x \in A$ et alors $x \in A \cap B \subset A \cap C \subset C$,
 - ou bien $x \notin A$ donc $x \in (A \cup B) \setminus A \subset (A \cup C) \subset C$.
- Dans tous les cas $x \in C$. On a effectivement montré $B \subset C$.
-
4. Supposons $B \subset A$. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$.
 $(A \cap X \subset A \text{ et } B \subset A) \Rightarrow (A \cap X) \cup B \subset A$
 et aussi $A \cap X \subset X \Rightarrow (A \cap X) \cup B \subset X \cup B$, donc $(A \cap X) \cup B \subset A \cap (X \cup B)$.
 D'autre part si $x \in A \cap (X \cup B)$ ou bien $x \in X$ et alors $x \in A \cap X$, ou bien $x \in B$.
 En fin de compte $x \in (A \cap X) \cup B$. En résumé $(A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$.
 Supposons $(A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$ pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$.
 En particulier lorsque $X = \emptyset$ cela donne $\emptyset \cup B = A \cap B \subset A$ d'où $B \subset A$.
-
5. a. $f(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset) = f\left(\bigcup_E (A \cup B)\right)$ et donc une condition nécessaire d'injectivité est $A \cup B = E$.
 Réciproquement si cette égalité est vérifiée et si $f(X) = f(Y)$,

on a $X = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y$.

Une condition nécessaire et suffisante d'injectivité est donc $A \cup B = E$.

b. Si $f(X) = (A \cap B, \emptyset)$ alors $X \cap A = A \cap B$ d'où $X \cap A \cap B = A \cap B = \emptyset$ donc $A \cap B = \emptyset$ est une condition nécessaire de surjectivité.

Réciproquement si cette condition est remplie et si $(Y, Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, en posant $X = Y \cup Z$ on a $X \cap A = (Y \cup Z) \cap A = (Y \cap A) \cup (Z \cap A) = Y$ car $Y \subset A$ et $Z \cap A \subset B \cap A = \emptyset$. De même $X \cap B = (Y \cap B) \cup (Z \cap B) = Z$, d'où $f(X) = (Y, Z)$, ce qui montre que f est surjective.

Par suite f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.

6. Supposons f bijective et soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

Si $x \in \overline{A}$ et $y \in f(A)$ alors $f^{-1}(y) \in A$ donc $x \neq f^{-1}(y)$ et, par injectivité de f , $f(x) \neq y$, d'où $f(x) \in \overline{f(A)}$.

De même si $y \in \overline{f(A)}$ alors $f^{-1}(y) \in \overline{A}$ car, sinon $y = f(f^{-1}(y)) \in f(A)$, donc $y \in f(\overline{A})$. En résumé $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Supposons réciproquement que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Si $(x, y) \in E^2$ et $x \neq y$, si $A = \{x\}$ alors $y \in \overline{A}$, donc $f(y) \in \overline{f(A)} = \overline{\{f(x)\}}$ ce qui montre que $f(x) \neq f(y)$ et, donc, f est injective.

D'autre part $\overline{f(E)} = f(\overline{E}) = f(\emptyset) = \emptyset$ i.e. $f(E) = E$ et f est surjective.

En définitive f est bijective.

7. a. Procédons par récurrence.

On a $f(0) \leq 0$ par hypothèse d'où $f(0) = 0$.

Si l'on suppose l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $k \in \llbracket 0, n \rrbracket \Rightarrow f(k) = k$ alors, par hypothèse, $f(n+1) \leq n+1$ et, comme $f(n+1) \notin \{f(0), f(1), \dots, f(n)\}$ par injectivité de f , il vient $f(n+1) = n+1$.

Par théorème de récurrence $f = Id$.

b. Procédons de même.

Si k_0 est l'antécédent de 0 alors, par hypothèse, $0 = f(k_0) \geq k_0$, d'où $k_0 = 0$.

Si l'on suppose l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $k \in \llbracket 0, n \rrbracket \Rightarrow f(k) = k$ alors, en notant k_{n+1} l'antécédent de $n+1$, on a $n+1 = f(k_{n+1}) \geq k_{n+1}$ et, comme $f(k_{n+1}) \notin \{f(0), f(1), \dots, f(n)\}$, nécessairement $k_{n+1} \notin \llbracket 0, n \rrbracket$, d'où $k_{n+1} = n+1$.

Par théorème de récurrence $f = Id$.

c. Soit $X = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < n\}$, supposons que cet ensemble est fini.

La question b. et l'hypothèse $f \neq Id$ montrent que X est non vide. Soit p son maximum. Alors $n \geq p+1 \Rightarrow f(n) > n$ d'où $f(\llbracket p+1, +\infty \rrbracket) \subset \llbracket p+2, +\infty \rrbracket$.

Comme f est surjective, nécessairement $\llbracket 0, p+1 \rrbracket \subset f(\llbracket 0, p \rrbracket)$ qui est au plus de cardinal $p+1$: c'est impossible. Par suite X est infini.

De même soit $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > n\}$, alors $f(Y) = \{k \in \mathbb{N} \mid f^{-1}(k) < k\}$ car f est bijective. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(k) \neq k$, le début de la question montre que $f(Y)$ est infini et, donc, Y aussi.

8. Soient $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$.

$A = A \Rightarrow A\mathcal{R}A$, \mathcal{R} est réflexive.

$A\mathcal{R}B \Rightarrow (A = B \text{ ou } A = \overline{B}) \Rightarrow (B = A \text{ ou } B = \overline{A}) \Rightarrow B\mathcal{R}A$, \mathcal{R} est symétrique.

$(ARB \text{ et } BRC) \Rightarrow (A = B \text{ ou } A = \overline{B}) \text{ et } (B = C \text{ ou } B = \overline{C})$

d'où $(A = C \text{ ou } A = \overline{C})$ puis ARC , \mathcal{R} est transitive.

Par suite \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

9. a. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$xe^x = xe^x \Rightarrow x\mathcal{R}x.$$

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow xe^y = ye^x \Rightarrow ye^x = xe^y \Rightarrow y\mathcal{R}x.$$

$(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow xe^y = ye^x \text{ et } ye^z = ze^y \Rightarrow xe^{-x} = ye^{-y} = ze^{-z} \Rightarrow x\mathcal{R}z$, par suite \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

b. On vient de voir : $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$ où l'on a posé $f : x \mapsto xe^{-x}$.

f est dérivable sur \mathbb{R} avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ d'où le tableau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+ 1 +$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow 1/e$	$\searrow 0$

Par suite f réalise une bijection de $] -\infty, 1]$ sur $] -\infty, 1/e]$ et aussi une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1/e[$.

Si $x \leq 0$ ou $x = 1/e$ alors la classe de x est réduite à x , sinon elle contient deux éléments.

10. a. Notons \mathcal{P}_n la propriété : $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

$$\binom{0}{0} = 1 = \binom{1}{1} \text{ d'où } \mathcal{P}_0.$$

Supposons \mathcal{P}_n et soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\text{alors } \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

De plus si $p = n+1$ alors $\binom{n+1}{p} = 1 = \binom{n+2}{p+1}$, d'où \mathcal{P}_{n+1} .

$$\text{b. Tout d'abord } \binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1} \Rightarrow \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$

Posons $x_k = \binom{k}{p+1}$ si $p \leq k \leq n$, alors $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_p$

par télescopage, donc $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

c. $k(k-1) = k^2 - k$ donc $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ convient.

De même $k(k-1)(k-2) = k^3 - 3k^2 + 2k$ d'où $k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) = k^3 - k$ d'où $(\gamma, \delta, \varepsilon) = (6, 6, 1)$ convient.

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \alpha \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} + \beta \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \alpha \binom{n+1}{3} + \beta \binom{n+1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } S_2 &= 2 \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{6} [2(n-1)+3] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \\ S_3 &= \sum_{k=1}^n k^3 = 6 \sum_{k=1}^n \binom{k}{3} + 6 \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} \\ &= 6 \binom{n+1}{4} + 6 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4} [(n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2] = \frac{n(n+1)}{4} (n^2 + n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

11. $\mathcal{A}_0 = \mathbb{N}^\emptyset$ de cardinal $1 = \binom{p}{0}$.

Pour ceux que le cas $n = 0$ effraie on va traiter le cas $n = 1$: \mathcal{A}_1 est en bijection avec $\llbracket 0, p \rrbracket$ de cardinal $p+1 = \binom{p+1}{1}$.

Supposons que \mathcal{A}_n est de cardinal $\binom{n+p}{n}$ et soit E de cardinal $n+1$.

Fixons x_0 dans E , alors $E \setminus \{x_0\}$ est de cardinal n et $f \in \mathcal{A}_{n+1}$ si, et seulement si, il existe k dans $\llbracket 0, p \rrbracket$ tel que $f(x_0) = k$ et $\sum_{x \in E \setminus \{x_0\}} f(x) \leq p-k$.

Si l'on note $\mathcal{B}_k = \{f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{N} \mid \sum_{x \in E \setminus \{x_0\}} f(x) \leq p-k\}$ alors $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$

est une partition de \mathcal{A}_{n+1} d'où $\text{card}(\mathcal{A}_{n+1}) = \sum_{k=0}^p \text{card}(\mathcal{B}_k) = \sum_{k=0}^p \binom{n+p-k}{n}$

soit $\text{card}(\mathcal{A}_{n+1}) = \sum_{\ell=n}^{n+p} \binom{\ell}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$ d'après l'exercice précédent.

Cela termine la récurrence.

12. On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$ puis $L_2 \leftrightarrow L_3$ et on obtient le

$$\text{système équivalent} \begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ (1+m^2)y - 2m^3z = 1-m-2m^2 \\ m(1-m^2)z = 2m(1-m) \end{cases}$$

- Si $m \in \{0, 1\}$ les deux premières lignes sont indépendantes et la troisième ligne est $0 = 0$, l'ensemble des solutions est donc une droite.
- Si $m = -1$ les deux premières lignes sont indépendantes et la troisième ligne est $0 = -4$, l'ensemble des solutions est vide.
- Sinon les trois lignes sont indépendantes, l'intersection des trois plans est réduite à un point.

13. Si $a = 1$ la condition de compatibilité est $\alpha = \beta = \gamma$ et on obtient le plan d'équation $x + by + z = \alpha$. Désormais $a \neq 1$.

Effectuons $L_1 \leftarrow L_1 - aL_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, on obtient le

$$\text{système équivalent} \begin{cases} (2-a-a^2)z = \alpha + \beta - (a+1)\gamma \\ b(a-1)y + (1-a)z = \beta - \gamma \\ x + by + az = \gamma \end{cases}$$

et on note que $2 - a - a^2 = (1 - a)(2 + a)$ et que L_2 et L_3 sont indépendantes.

- Si $b = 0$ on effectue $L_1 \leftarrow L_1 - (2 + a)L_2$ et la condition de compatibilité est $\alpha + \gamma = (a + 1)\beta$, l'ensemble des solutions est alors une droite. Désormais $b \neq 0$.
- Si $a = -2$ la condition de compatibilité est $\alpha + \beta + \gamma = 0$, l'ensemble des solutions est alors une droite.
- Dans tous les autres cas les trois lignes sont indépendantes, l'intersection des trois plans est réduite à un point.

14. a. est évidente.

b. On en déduit que $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.

Réciproquement, si $y \in f(A_1 \cup A_2)$, il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$. Donc $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

c. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ se déduit de a).

Si $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, il existe $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$ tel que $y = f(x_1) = f(x_2)$

Si f est injective, il s'ensuit que $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$ et donc $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

d. se prouve de même.

15. a. est évidente.

b. On en déduit que $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

Si $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ alors $f(x) \in B_1 \cup B_2$. Si $f(x) \in B_1$ alors $x \in f^{-1}(B_1)$ et si $f(x) \in B_2$ alors $x \in f^{-1}(B_2)$. Dans tous les cas, $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

c. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Si $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$, alors $f(x) \in B_1$ et $f(x) \in B_2$, donc $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

d. se prouve de même.

16. a. Pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x)$ car $g \circ f$ est surjective.

Comme $z = g[f(x)]$ et comme $f(x) \in F$, en posant $y = f(x)$, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Donc g est surjective.

b. Pour $x, x' \in E$, $f(x) = f(x') \Rightarrow g[f(x)] = g[f(x')] \iff g \circ f(x) = g \circ f(x')$.

L'injectivité de $g \circ f$ implique $x = x'$. Donc f est injective.