Formations & Techniques

OSCILLATEURS, VIBRATIONS MÉCANIQUES

Analyse et endommagements induits

Exemples d'applications et exercices corrigés

Bernard Lamy

ellipses

Chapitre I

Les oscillateurs à un degré de liberté

Les oscillateurs mécaniques simples sont abordés en premier. Les oscillateurs électrocinétiques analogues sont abordés en fin de chaque paragraphe. Les dérivations première et seconde par rapport au temps de la position x(t) sont notées $\dot{x}$ et $\ddot{x}$. De même, les dérivations première et seconde par rapport au temps de la charge q(t) sont notées $\dot{q}$ et $\ddot{q}$. La dérivée seconde de l'intensité électrique i(t) est notée $\ddot{i}$.

1. ELEMENTS PRINCIPAUX DES OSCILLATEURS

Les oscillateurs mécaniques comportent trois composants principaux schématisés figure 1.1 : l'élément amortisseur, l'élément de masse, l'élément élastique.
Si on applique une force $\vec{F}(t)$ à un élément, sa position $\vec{x}(t)$ varie, la vitesse de déplacement est :

$$\vec{v}\,(t) = d\vec{x}/dt = \dot{\vec{x}}(t) \qquad (1.1)$$

La force mécanique est la cause de la variation, la vitesse est l'effet [1.1]. La relation entre la cause et l'effet dépend de l'élément considéré.

Amortissement fluide Masse Elasticité

Figure 1.1 : symboles des composants des oscillateurs mécaniques.

1.1. Elément amortisseur

Un élément amortisseur est un composant mécanique qui présente un frottement fluide. La relation cause-effet est donnée par la loi du frottement fluide. La force créée par le déplacement, $\vec{F}_f(t)$, est proportionnelle à la vitesse de déplacement, $\vec{v}(t)$:

$$\vec{F}_f(t) = f\,\vec{v}(t) = f\,\dot{\vec{x}}(t) \qquad (1.2)$$

- f : coefficient de frottement fluide.

Si la variation de la vitesse de déplacement est sinusoïdale, $v = v_{max} \sin \omega t$, la variation de la force de frottement est également une fonction sinusoïdale, en phase avec la vitesse : $F_f = f\, v_{max} \sin \omega t = F_{max} \sin \omega t$.
Un amortisseur est un élément de dissipation d'énergie mécanique sous forme de chaleur. La puissance moyenne dégagée est :

$$P = f\,v^2 = f\,\dot{x}^2 \qquad (1.3)$$

- v : valeur efficace de la vitesse.

1.2. Elément de masse

Un élément de masse oppose une inertie vis-à-vis de son mouvement régi par le principe fondamental de la dynamique : la force à appliquer pour créer le mouvement, $\vec{F}_i(t)$, est égale au produit de la masse par son accélération.

$$\vec{F}_i(t) = m\, d\vec{v}/dt = m\, \ddot{\vec{x}} \qquad (1.4)$$

- m : masse de l'élément.

Si la variation de la vitesse de déplacement de l'oscillateur est une fonction sinusoïdale, $v = v_{max} \sin \omega t$, la force d'inertie est également une fonction sinusoïdale, en avance de $\pi/2$ sur la vitesse : $Fi = m\, \omega\, v_{max} \cos\omega t = F_{max} \cos\omega t = F_{max} \sin(\omega t + \pi/2)$.

La masse accumule l'énergie mécanique. L'énergie mécanique instantanée est accumulée sous forme d'énergie cinétique et s'exprime par :

$$W_m = 1/2\, mv^2 = 1/2\, m\, \dot{x}^2 \qquad (1.5)$$

L'énergie mécanique emmagasinée est entièrement restituée lors du mouvement.

1.3. Elément élastique

Un élément élastique présente une capacité de déformation réversible. L'exemple type est le ressort. Ecarté de sa position d'équilibre, la relation entre la cause-effet du mouvement est donnée par la loi de Hooke. L'élément élastique est ramené vers sa position d'équilibre par une force de rappel proportionnelle à l'élongation x :

$$\vec{F}_k(t) = k\, \vec{x}(t) \qquad (1.6)$$

- k : raideur de l'élément. L'inverse, $1/k$, est l'élasticité.

Si la variation de la vitesse du déplacement est sinusoïdale, $\dot{x} = v(t) = v_{max} \sin \omega t$, la force de rappel est une fonction sinusoïdale mais en retard de $\pi/2$ sur la vitesse :

$$F_k = k\, x = k \int v(t)\, dt = k\, v_{max} \int \sin \omega t\, dt = -\, k\, v_{max}/\omega \cos \omega t = F_{max} \sin(\omega t - \pi/2)$$

Un élément élastique accumule l'énergie mécanique. Lors de sa détente, il libère l'énergie potentielle d'élasticité emmagasinée :

$$W_k = k\, x^2/2 \qquad (1.7)$$

2. LES OSCILLATIONS HARMONIQUES

Le mouvement harmonique est un mouvement périodique dont la représentation sinusoïdale est aisée.

2.1. Représentation géométrique

→ Un pendule [1.2] laisse une trace de forme sinusoïdale sur un plan en mouvement de translation perpendiculaire au plan des oscillations, plan situé au bas de l'arc de cercle décrit par le pendule, figure 1.2.

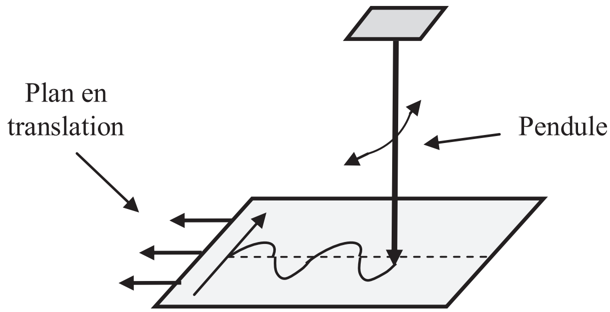

Figure 1.2 : trace laissée par un pendule sur un plan. D'après [1.2].

→ La projection d'un mouvement circulaire uniforme de rotation sur une droite, axe vertical $\overrightarrow{Ox}$ de la figure 1.3 par exemple, est un mouvement sinusoïdal.

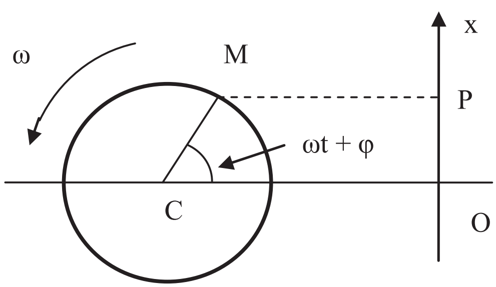

Figure 1.3 : projection d'un mouvement circulaire uniforme.

2.2. Equations du mouvement

Le mouvement de la projection, P, du point M sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$, figure 1.3, suit l'équation :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \tag{1.8}$$

- $x(t)$: élongation, distance de 0 à P qui varie avec le temps t ;
- A : amplitude, valeur maximale de l'élongation ;
- ω : pulsation $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ (T : période, f : fréquence) ;
- $\omega t + \varphi$: phase du mouvement, angle qui précise la position du point P ;
- φ : angle de CM avec CO, à l'instant t = 0.

2.3. Loi de force

La loi d'élongation d'un oscillateur harmonique est $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, soit, en effectuant deux dérivations successives [1.3] :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1.9}$$

Ce type d'équation de mouvement peut être obtenu par l'action sur un solide d'une force de rappel, $F = -k\,x$, proportionnelle à l'élongation. D'après le principe fondamental de la dynamique, la somme des forces extérieures, $\sum \vec{F}_{ext}$, qui s'exercent sur un solide est égale à la dérivée de la quantité de mouvement de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt}\vec{p}\,(t)$$

- $\vec{p}\,(t)$: quantité de mouvement, $\vec{p}\,(t) = m\,\vec{v}(t)$,
- $\vec{v}(t)$: vecteur vitesse du centre d'inertie du solide.

Soit, si m est constante :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

- m : masse du solide ;
- $\vec{a}$: vecteur accélération du centre d'inertie du solide.

Ainsi : $F = -k\,x = m\,\ddot{x}$
Soit $\ddot{x} + (k/m)\,x = 0$ qui est de la forme de l'équation (1.9) précédemment établie :

$$\ddot{x} + \omega^2\,x = 0$$

La solution générale est $x = a\cos(\omega\,t+\varphi)$:
- a et φ dépendent des conditions initiales ;
- $\omega = \sqrt{k/m}$.

→ La loi de force de l'oscillateur harmonique est $F = -k\,x$; $k > 0$.
→ Réciproquement, tout oscillateur dont la loi de force est $F = -kx$ avec $k > 0$ est harmonique. Comme $k > 0$, la force est une force de rappel dirigée vers l'origine O.

2.4. Energie de l'oscillateur

La loi de force de l'oscillateur harmonique est $F = -k\,x$ avec $k > 0$. L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à $m\,\ddot{x} + k\,x = 0$, et, en multipliant chaque terme par $\dot{x}$:

$m\,\ddot{x}\,\dot{x} + k\,x\,\dot{x} = 0$, c'est-à-dire : $d/dt\,[1/2\ m\,\dot{x}^2 + 1/2\ k\,x^2) = 0$

Ainsi : $(1/2)\,m\,\dot{x}^2 + (1/2)\,k\,x^2 =$ Constante

→ Le terme $(1/2)\,m\dot{x}^2 = (1/2)\,mv^2$ est l'énergie cinétique, Ec, de la masse m.
→ Le terme $(1/2)\,kx^2$ est l'énergie potentielle, Ep, de l'élément élastique, définie à une constante additive près. La valeur de l'énergie potentielle est nulle, $Ep = 0$, pour $x = 0$. Ainsi : $Ep = (1/2)\,kx^2$.

La somme $Ec + Ep = (1/2)\,mv^2 + (1/2)\,kx^2$ est l'énergie mécanique totale qui se conserve au cours du mouvement.

$$Et = Ec + Ep = (1/2)\,mv^2 + (1/2)\,kx^2 = Cte \tag{1.10}$$

L'élongation est $x = a\cos(\omega t + \varphi)$.

La vitesse s'exprime par : $v = \dot{x} = - a\,\omega \sin(\omega t + \varphi)$

L'énergie cinétique de l'oscillateur est :

$$Ec = (1/2)\, mv^2 = [1/2\ m\, a^2\, \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)] \qquad (1.11)$$

L'énergie potentielle de l'oscillateur est :

$$Ep = (1/2)\, kx^2 = [1/2\ m\, a^2\, \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)] \qquad (1.12)$$

L'énergie mécanique totale est alors $Et = \{1/2\ m\, a^2\, \omega^2\, [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)]\}$, soit :

$$Et = (1/2)\, m\, a^2 \omega^2 \qquad (1.13)$$

Au cours du mouvement, il y a transformation de l'énergie cinétique en énergie potentielle et inversement, mais l'énergie totale de l'oscillateur reste constante et proportionnelle au carré de l'amplitude.

2.5. Exemples d'oscillateurs harmoniques

Une masse qui oscille librement, horizontalement ou verticalement, à l'extrémité d'un ressort ou d'un pendule simple constitue un oscillateur mécanique harmonique. L'analogue électrique de l'oscillateur mécanique harmonique est constitué par le circuit oscillant obtenu en branchant en série une inductance et une capacité.

2.5.1. Système masse-ressort horizontal sans frottement

Une masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort horizontal figure 1.4. Le ressort de raideur k est sans masse. A l'équilibre initial, le ressort n'est pas contraint.
La masse, qui peut se déplacer sans frottement sur le plan horizontal, est écartée de sa position d'équilibre d'une distance, x, puis libérée sans vitesse initiale.

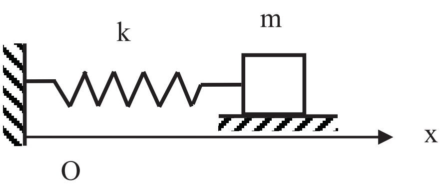

Figure 1.4 : masse à l'extrémité d'un ressort horizontal.

La position de la masse est repérée sur l'axe horizontal $\overrightarrow{Ox}$. Sur cet axe, la masse est soumise à la force horizontale de rappel du ressort, $F = - kx$.
La loi fondamentale de la dynamique projetée sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$, conduit à : $m\,\ddot{x} = - kx$, équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme (1.9) :

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0$$

- $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, pulsation propre.

La solution de cette équation est une fonction sinusoïdale, $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Les constantes A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales.

2.5.2. Système masse-ressort vertical sans frottement

Une masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort vertical sans masse, de raideur k, figure 1.5. La masse peut se déplacer verticalement sans frottement. Au repos l'allongement du ressort, Δl, est tel que $k\,\Delta l = mg$.

La masse, dont la position est repérée sur l'axe vertical $\overrightarrow{Oy}$, est écartée de sa position d'équilibre d'une distance, y, puis libérée sans vitesse initiale.

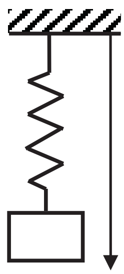

Figure 1.5 : masse à l'extrémité d'un ressort vertical.

A l'équilibre, le poids $m\,\vec{g}$ est compensé par la force de tension initiale du ressort, $k\,\overrightarrow{\Delta l}$.

La loi fondamentale de la dynamique, en projection sur l'axe $\overrightarrow{Oy}$, conduit à la relation : $m\,\ddot{y} = -\,k\,y$, seule la force de rappel due à l'allongement complémentaire, y, du ressort est à considérer.

L'équation différentielle, de la forme de l'équation (1.9) est identique à celle qui régit le système masse-ressort horizontal sans frottement :

$$\ddot{y} + \omega_0^2\,y = 0$$

- $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, pulsation propre.

Comme pour le système masse-ressort horizontal, la solution de cette équation est une fonction sinusoïdale, $y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, A et φ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales.

2.5.3. Le pendule simple

Un pendule est constitué d'une masse m suspendue à un fil inextensible de longueur L, figure 1.6. La masse, m, localisée en M, est soumise au poids, $\vec{P}$, et à la traction du fil, $\vec{T}$.

Le poids peut être décomposé en une composante tangente à la trajectoire et une composante perpendiculaire à la trajectoire.

Lorsque le pendule est écarté de sa position d'équilibre, la composante tangente à la trajectoire, d'intensité F, est la seule force qui crée le mouvement pour ramener la masse vers sa position initiale :

$$F = P\sin\theta = m\,g\sin\theta \qquad (1.14)$$

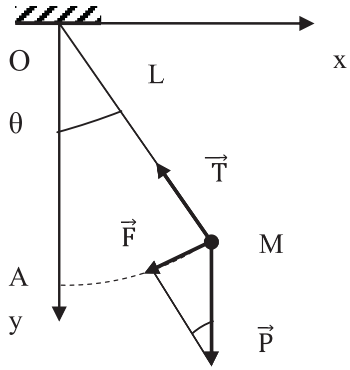

Figure 1.6 : pendule simple.

Pour des oscillations de faibles amplitudes**,** inférieures à 10°, sin θ = θ (exprimé en radians).
La relation (1.14) devient :

$$\theta\ (rad) = F/mg \tag{1.15}$$

D'autre part, θ (Rad) = AM / L. Pour de petits angles, la corde se confond avec l'arc, la longueur de l'arc AM est proche de l'élongation x, repérée sur l'axe horizontal $\overrightarrow{Ox}$ ainsi :

$$\theta\ (rad) = x/L \tag{1.16}$$

En remarquant que $\vec{x}$ et $\vec{F}$ sont toujours de signes contraires, les relations (1.15) et (1.16) permettent d'exprimer F :

$$F = -\ mg\ x/L = -\ k\ x \qquad \text{avec : } mg/L = -\ k$$

La force $\vec{F}$ est une force de rappel proportionnelle à x et de signe contraire : comme indiqué au paragraphe 2.3, le mouvement d'un pendule de faible amplitude est alors un mouvement vibratoire harmonique.

Les oscillations libres, non amorties, et de faible amplitude sont quasi sinusoïdales. La période propre To peut dépendre de la longueur, L, du fil, de la masse, m, et de l'intensité de la pesanteur, $\vec{g}$. Ainsi, $To = K\ L^{\alpha}\ m^{\beta}\ g^{\gamma}$ (K étant une constante).

Cette relation doit être homogène pour les unités, la seconde (s), le mètre (m), le kilogramme (kg) : $[\ s\ ] = [\ m]^{\alpha}\ [\ kg\ ]^{\beta}\ [\ N/kg]^{\gamma}$
D'après la relation fondamentale de la dynamique, F = m $\ddot{x}$, le Newton N est équivalent à kg (m/s²). Ainsi, $[\ s\ ] = [\ m\ ]^{\alpha} [\ kg\ ]^{\beta}\ [\ kg\ (m\ /\ s^2)/kg\ ]^{\gamma}$.

Soit $[\ s\ ] = [\ m\ ]^{\alpha+\gamma}\ [\ kg\ ]^{\beta}\ [\ s\ ]^{-2\gamma}$ et après identification :

$-\ 2\ \gamma = 1$, $\alpha + \gamma = 0$, $\beta = 0$, soit, $\gamma = -\ 1/2$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$ ainsi, $To = K\ L^{1/2}\ g^{-1/2}$.

$$To = K\ \sqrt{L/g}$$

Le calcul, Chapitre III, paragraphe 3, montre que K = 2π pour les petites oscillations. La période propre des petites oscillations du pendule simple est ainsi :

$$To = 2\pi \sqrt{L/g} \qquad (1.17)$$

La période propre du pendule est indépendante de sa masse. La période propre dépend uniquement de sa longueur [1.2]. Le pendule est utilisé pour mesurer la valeur de l'attraction de la pesanteur en tout point : $g = 4\pi^2 L/T^2$.

2.5.4. Oscillateur électrique simple

L'analogue électrique de l'oscillateur mécanique sinusoïdal est constitué par le circuit oscillant, LC, inductance-capacité, figure 1.7.

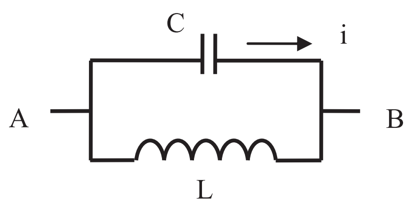

Figure 1.7 : oscillateur électrique simple.

La différence de potentiel V entre les points A et B s'exprime par :

$V = -L\, di/dt = q/C$, q est la charge du condensateur.

Comme $i = \dot{q}$, la relation précédente conduit à :

$$L\,\ddot{q} + q/C = 0 \qquad (1.18)$$

L'équation (1.18) est analogue à celle de l'oscillateur mécanique masse-ressort (1.9). Les lois de variation de la charge, q, de la tension, V, ($V = q/C$), et également de l'intensité, i, ($i = \dot{q}$) sont sinusoïdales.

Les similitudes entre les relations (1.18) et (1.9) conduisent aux analogies entre grandeurs électriques et mécaniques regroupées tableau 1.1.

Mécanique		Electricité	
x	Elongation	q	Charge
v	Vitesse	i	Intensité
m	Masse	L	Inductance
k	Raideur	1/C	Inverse de la capacitance

Tableau 1.1 : analogies électricité-mécanique

L'énergie totale d'oscillation est :

$$E = (L\, i^2)/2 + q^2/2C = Cte$$

L'énergie totale est constante. Il convient cependant de fournir constamment de l'énergie au circuit oscillant qui présente des pertes d'énergie, par rayonnement hertzien en particulier, propriété utilisée en TSF [1.3].