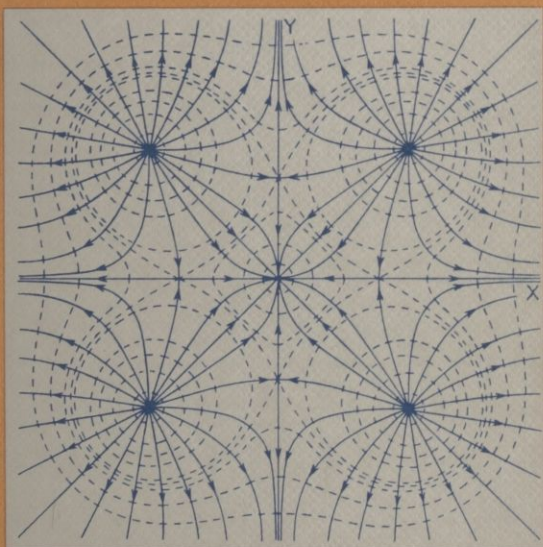


E. DURAND

# ÉLECTROSTATIQUE

I

## LES DISTRIBUTIONS



MASSON

1788207

ELECTROSTATIQUE

E. DUBOIS

NVA 1797381

# ÉLECTROSTATIQUE

TOME I

LES DISTRIBUTIONS

MASSON & Co

LIR  
24005  
(1)



A LA MÊME LIBRAIRIE

---

- SOLUTIONS NUMÉRIQUES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES, par E. DURAND.  
Tome I. — *Équations du type  $F(x) = 0$ . Racines d'un polynôme.* 1960, 328 pages, 103 figures.  
Tome II. — *Systèmes de plusieurs équations. Valeurs propres des matrices.* 1961, 446 pages, 60 figures.
- 
- ÉLECTRICITÉ, du COURS DE PHYSIQUE à l'usage de l'enseignement supérieur scientifique et technique, de G. BRUHAT. 8<sup>e</sup> édition, par G. GOUDET. 1963. Un volume de 912 pages, avec 530 figures.
- ÉLECTRICITÉ, par Y. ROCARD. 2<sup>e</sup> édition, 1956. Un volume de 614 pages, avec 652 figures.
- ÉLECTRICITÉ, par M. ROUAULT, avec la collaboration de P. MERGAULT (Cours de physique à l'usage de la licence).  
Fascicule I. — *Électrostatique. Magnétostatique. Phénomènes quasi-stationnaires.* 1963, 246 pages, 173 figures.  
Fascicule II. — *Propagation. Électricité corpusculaire. Milieu matériels. Radioélectricité. . . . . (sous presse).*
- COURS DE PHYSIQUE THÉORIQUE: *les tenseurs en mécanique et en élasticité*, par L. BRILLOUIN. 2<sup>e</sup> édition, 2<sup>e</sup> tirage, 1960. Un volume de 370 pages, avec figures.
- PROPAGATION DES ONDES DANS LES MILIEUX PÉRIODIQUES, par L. BRILLOUIN et M. PARODI. 1956. Un volume de 348 pages, avec 185 figures.
- LES PRINCIPES DE LA THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET DE LA RELATIVITÉ, par M. A. TONNELAT. 1959. Un volume de 394 pages, avec 45 figures.
- CHAMPS DE VECTEURS ET DE TENSEURS. *Introduction à l'électromagnétisme*, par E. BAUER. 1955. Un volume de 204 pages, avec 38 figures.
- THÉORIES RELATIVISTES DE LA GRAVITATION ET DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME. *Relativité générale et théories*, par A. LICHTNEROWICZ. 1955. Un volume de 298 pages (Collection d'ouvrages de mathématiques à l'usage des physiciens).
- RECHERCHES SUR LA THÉORIE DES QUANTA. *Rédition du texte de 1924*, par Louis de BROGLIE. 1963. Un volume de 128 pages, avec 6 figures.
- MESURES ÉLECTRIQUES. *Continu et basse fréquence*, par J. BAURAND.  
Tome I. — *Unités électriques. Appareils de mesure. Pont de Wheatstone.* 1961, 308 pages, 299 figures.  
Tome II. — *Grandeurs magnétiques. Appareils électroniques. Mesures diverses.* 1962, 306 pages, 328 figures.



# ÉLECTROSTATIQUE

par

E. DURAND

Professeur de Physique Théorique  
à la Faculté des Sciences de Toulouse

TOME I

## LES DISTRIBUTIONS



MASSON et Cie, Éditeurs,  
120, boul. Saint-Germain, PARIS - VI<sup>e</sup>  
1964

ELECTROSTATIQUE

E. DURAND

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction, par tous procédés, y compris la photographie et le micro film réservés pour tous pays.

© 1964 by Masson et Cie

Imprimé en France.

1  
110000 10000  
F

MASSON et Cie - Éditeurs  
100 rue Saint-Germain - PARIS - VI<sup>e</sup>



## PRÉFACE DU TOME I

Tout ce que l'on trouve dans cet ouvrage se déduit de la loi de Coulomb donnant la force qui s'exerce entre deux charges ponctuelles au repos (\*). Il y a bien les potentiels dits « non coulombiens » (potentiel logarithmique d'une droite indéfinie, potentiel parabolique d'une demi-droite, potentiel linéaire d'un plan, etc.), mais on les déduit néanmoins des champs coulombiens en remontant des champs aux potentiels par la formule  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ . Ils ne sont définis qu'à une constante près et ne s'annulent jamais à l'infini. D'ailleurs ces potentiels non coulombiens correspondent à des distributions s'étendant jusqu'à l'infini et qui, à strictement parler, n'ont aucune existence physique. Ils ont cependant une importance pratique considérable et sont couramment utilisés dans les calculs.

\* \* \*

Cet exposé est caractérisé par l'emploi systématique des densités volumiques singulières  $\rho$  qui sont, en fait, des « distributions mathématiques » et qui permettent d'écrire dans tous les cas l'équation du potentiel sous la forme d'une équation de Poisson avec second membre, soit

$$(1) \quad \epsilon_0 \cdot \Delta V = -\rho$$

valable dans tout l'espace, pour des distributions ponctuelles, linéaires, superficielles et volumiques. Ce n'est que dans le cas d'une véritable distribution volumique que  $\rho$  peut être une fonction des coordonnées du type habituel. Sous cette forme (1), l'équation prend son véritable sens qui est d'établir une relation biunivoque entre le potentiel et ses sources. Si on donne  $V$ , cette équation permet de calculer  $\rho$  par des dérivations. Par contre si l'on donne  $\rho$ , on peut calculer  $V$  par l'intégrale

$$(2) \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho \frac{dv}{r}$$

étendue à tout l'espace. Ces équations (1) et (2) ne sont que deux expressions différentes de la correspondance entre  $V$  et  $\rho$  (\*\*).

Autrefois on n'utilisait pas les densités singulières et, pour les distributions occupant un volume nul (points, courbes, surfaces) le potentiel obéissait à l'équation de Laplace.

$$(3) \quad \Delta V = 0$$

(\*) On utilise aussi la règle de composition des forces qui conduit au principe de superposition pour les champs et les potentiels.

(\*\*) Toutefois (1) est plus générale que (2) puisqu'elle correspond aussi aux potentiels non coulombiens.



sauf sur les distributions elles-mêmes qui étaient exclues du domaine étudié. Il fallait ensuite compléter l'équation (3) en donnant les conditions aux limites au voisinage des sources ponctuelles, linéaires et superficielles. Une équation telle que (3) était particulièrement malheureuse car elle n'établissait plus une correspondance entre  $V$  et ses sources. Bien entendu, et en définitive, les deux manières de présenter les choses sont absolument équivalentes. Dans la pratique, c'est même l'équation (3) avec les conditions aux limites supplémentaires qui est la plus commode à utiliser. En fait, on se donne toujours les distributions, non sous la forme de distribution volumique  $\rho$ , mais sous la forme de charges ponctuelles  $q$ , de distributions linéaires  $\lambda$  ou de distributions superficielles  $\sigma$ ; on a les correspondances

$$(4) \quad \begin{aligned} q &\rightarrow \rho = -\frac{q}{4\pi} \Delta \left( \frac{1}{r} \right) \\ \lambda &\rightarrow \rho = -\frac{1}{4\pi} \int_c \lambda \Delta \left( \frac{1}{r} \right) dl \\ \sigma &\rightarrow \rho = -\frac{1}{4\pi} \int_s \sigma \Delta \left( \frac{1}{r} \right) ds. \end{aligned}$$

\* \*

Les systèmes invariants par translation ou par rotation peuvent être décrits avec deux variables, soit respectivement  $(x, y)$  dans le plan normal à la direction de translation ou  $(\rho, z)$  dans le plan méridien passant par l'axe de rotation. Il est alors commode d'introduire systématiquement à côté du potentiel  $V$  la fonction flux  $F$ . Ces deux grandeurs sont reliées par des relations du type

$$(5) \quad \begin{cases} \partial_x F = \partial_y V \\ \partial_y F = -\partial_x V \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \partial_z F = \rho \partial_\rho V \\ \partial_\rho F = -\rho \partial_z V. \end{cases}$$

L'intérêt de la fonction  $F$ , c'est que les valeurs  $F = \text{Cte}$  donnent les lignes de force du champ qui sont orthogonales aux lignes équipotentielles  $V = \text{Cte}$ . Il faut signaler aussi la simplification qu'introduit la combinaison complexe  $\zeta = V - iF$  dans le cas des systèmes invariants par translation.

\* \*

Nous avons aussi introduit d'une manière systématique la notion de courants magnétiques  $\vec{J}^*$  associés à un système de charges électriques  $\rho$ . Les courants magnétiques  $\vec{J}^*$  produisent l'induction électrique  $\vec{B}^*$  et les charges électriques  $\rho$  produisent le champ électrique  $\vec{E}$ . Pour établir aisément des relations entre les deux systèmes précédents, on considère un système polarisé électriquement et caractérisé par la densité de moment électrique  $\vec{P}$ ; ce système est associé aux deux systèmes précédents car on a

$$(6) \quad \vec{J}^* = \text{rot } \vec{P} \quad \rho = -\text{div } \vec{P}$$

et les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}^*$  sont reliés par la formule

$$(7) \quad \vec{B}^* = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Bien entendu ces densités  $\vec{P}, \vec{J}^*, \rho$  peuvent être des « distributions mathématiques » occupant un volume nul.

La charge ponctuelle étant l'élément de base de toutes les distributions, il suffit de donner les systèmes polarisés associés à la charge ponctuelle et l'on en déduit les systèmes associés à une distribution quelconque. Parmi ces systèmes associés, celui qui correspond à  $\vec{P} = -\varepsilon_0 \vec{E}$ , donc à  $\vec{B}^* = 0$ , permet d'interpréter le vide où règne un champ électrique  $\vec{E}$  comme un « milieu polarisé ».

On notera l'analogie étroite qui existe entre les systèmes de masses magnétiques  $\rho^*$  que l'on associe aux courants électriques en magnétostatique (par exemple le feuillet qui est associé au courant linéaire) et les systèmes de courants magnétiques  $J^*$  que l'on associe aux charges électriques en électrostatique. D'ailleurs, on peut interpréter les courants magnétiques fictifs comme des masses magnétiques fictives en mouvements et on a la formule

$$(8) \quad \vec{J}^* = \rho^* \vec{v}.$$

Par exemple, les aimants en rotation produisent une induction électrique  $\vec{B}^*$ .

\*  
\* \*

Les champs dérivent des potentiels (scalaire  $V$  ou vecteur  $\vec{A}^*$ ) et les potentiels eux-mêmes dérivent des potentiels de polarisation. Ces derniers peuvent être en nombre infini puisque les systèmes polarisés fictifs associés aux distributions réelles de charges sont eux-mêmes en nombre infini. Nous montrons que les potentiels de polarisation eux-mêmes peuvent être dérivés d'un super-potential (\*)  $C$ , tel que

$$(9) \quad V = \Delta C.$$

C'est ce super-potential qui nous a suggéré une théorie plus générale de la charge élémentaire, où cette dernière n'est plus rigoureusement ponctuelle mais distribuée dans tout l'espace (chapitre X). Elle possède alors une énergie propre finie. Cette théorie, qui peut être généralisée pour les charges élémentaires en mouvements, nous paraît appelée à des développements importants, non seulement dans le cadre des théories classiques, mais aussi et surtout quand elle aura été transposée dans le cadre des théories quantiques.

\*  
\* \*

Cet ouvrage est aussi caractérisé par l'abondance des illustrations. On y trouvera de nombreux réseaux orthogonaux d'équipotentialles et de lignes de force pour des distributions de types variés. Ces courbes n'ont pas été tracées approximativement, mais résultent de calculs très précis effectués avec les calculateurs électroniques dont dispose l'Institut de Calcul Numérique de l'Université de Toulouse. Dans chaque système de courbes, on s'est efforcé de mettre en évidence celles qui présentaient un caractère particulier (points doubles par exemple). L'Auteur remercie les programmeurs de l'I.C.N. de Toulouse, pour leur amicale collaboration et aussi M. J. SADACA qui a tracé ces courbes à partir des tableaux de chiffres.

(\*) Pour les charges en mouvement ce super-potential est la 4<sup>e</sup> composante de temps d'un quadrivecteur.



\*  
\*  
\*

Le premier chapitre rappelle les formules qui seront nécessaires dans la suite de l'exposé. Elles sont données le plus souvent sans démonstration et c'est aussi une occasion de préciser les notations.

On étudie ensuite successivement les sources ponctuelles, les distributions de sources ponctuelles, les distributions linéaires, les distributions superficielles, les distributions volumiques (chapitres II, III, IV, VI, VIII). On traite chaque fois dans un chapitre à part les distributions invariantes par translation car elles correspondent à des formules particulières qui sont rattachées au potentiel logarithmique. (Chapitres V, VII, IX). Les définitions et les propriétés générales des multipôles ponctuels ou linéaires sont exposées en détail.

Pour tous les types de distributions, on a les équations fondamentales

$$(10) \quad \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

ou, ce qui est équivalent

$$(11) \quad \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \rho \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) dv.$$

On notera le rôle important joué par les fonctions elliptiques de Legendre  $J_1, J_2, J_3$ , et par les fonctions de Bessel  $J_0, K_0, J_1, K_1$ , dans les systèmes de révolution. Ces fonctions se calculent aisément par les méthodes numériques soit sous forme de développements en séries, de développements limités optimisés ou par intégration numérique.

Le chapitre X est consacré aux méthodes de calcul numérique et on s'est surtout attaché à établir des équations aux différences finies. On a étudié avec un soin particulier les singularités des fonctions  $V$  ou  $\vec{E}$  au voisinage des distributions ou au voisinage des singularités géométriques (arêtes, points coniques, etc.) et on donne des développements illimités représentant ces fonctions au voisinage de ces points. Ces développements n'ont pas seulement un intérêt théorique mais sont indispensables pour le calcul numérique des champs par la méthode des différences finies. On notera que les singularités rencontrées dans l'étude des distributions qui sont développables en série entière, sont tout à fait différentes des singularités que l'on rencontre sur les limites (ou au voisinage des arêtes), des conducteurs et des diélectriques. Ces dernières seront étudiées dans le Tome II.

Quelques distributions sont calculées numériquement pour montrer les difficultés que l'on peut rencontrer (domaines illimités, termes complémentaires dus aux singularités, etc.). Toutefois, nous n'avons donné aucune indication sur la manière de résoudre les systèmes d'équations linéaires obtenus, par les méthodes itératives avec accélération de la convergence. Cela sera étudié en détail dans le Tome II où les problèmes de conditions aux limites prendront un caractère plus fondamental que dans le cas des distributions.

\*  
\*  
\*

Le chapitre XI concerne les forces et l'énergie. On y trouvera les diverses expressions de ces grandeurs. On verra comment on passe de la force de Coulomb

$$(12) \quad \vec{F} = \iiint \rho \vec{E} \operatorname{div}$$



(valable pour tous les types de distributions quand  $\rho$  est pris au sens de la théorie des « distributions mathématiques ») aux expressions de l'énergie

$$(13) \quad W = \frac{1}{2} \iiint \rho V \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint E^2 \, dv.$$

Le passage inverse sous une autre forme, est aussi intéressant et donne

$$(14) \quad \vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} W.$$

Enfin le tenseur de Maxwell remplace l'intégrale de volume (12) par l'intégrale de surface

$$(15) \quad \vec{F} = \epsilon_0 \int_s \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \frac{1}{2} \vec{n} \cdot (\vec{E})^2 \right\} ds$$

et cette dernière expression est parfois utile.

\* \*

Le chapitre XII contient des notes diverses. On étudie d'abord quelques particularités des distributions présentant une symétrie (axe, plan de symétrie). Viennent ensuite les équations fondamentales de l'électrostatique en coordonnées quelconques avec les notations tensorielles, et sous la forme lagrangienne, hamiltonnienne, variationnelle. On verra comment toutes les équations fondamentales de l'électrostatique s'obtiennent en annulant la variation d'une intégrale.

On y trouve aussi une courte note sur les « distributions mathématiques ». En fait, pour ce qui nous intéresse dans cet ouvrage, on peut dire que la théorie des distributions mathématiques se réduit à ceci : des expressions comme

$$(16) \quad \Delta\left(\frac{1}{r}\right), \quad \Delta(\text{Log } R), \quad \Delta(|x|), \quad \dots \text{ etc.}$$

sont partout nulles sauf dans certains domaines de volume nul, où elles ne sont pas définies. On convient alors de leur donner un sens chaque fois qu'elles apparaissent dans des intégrales, en admettant que l'on peut intégrer par parties comme pour les fonctions régulières (c'est un peu comme le symbole  $i$  des imaginaires qui n'a pas de signification réelle, mais que l'on traite comme les autres symboles de l'algèbre et chaque fois que l'on rencontre  $i^2$ , on convient de le remplacer par  $-1$ ).

Enfin l'ouvrage se termine par une méthode permettant d'obtenir rapidement et dans leur plus grande généralité les développements du potentiel ou du flux autour des points singuliers.

\* \*

L'Auteur remercie tous ceux qui l'ont aidé dans sa tâche et plus particulièrement Messieurs J. GÉLARD et Ph. DURAND qui ont relu et corrigé toutes les épreuves. Il dédie cet ouvrage à son Maître le Professeur Louis de BROGLIE, en témoignage de sa respectueuse admiration.

Le Tome II de cette *Electrostatique* s'intitulera « *Les milieux matériels* » et traitera des problèmes de conditions aux limites.

E. DURAND.



NOTATIONS ET RAPPEL  
DE FORMULES MATHÉMATIQUES

1. — *Scalaire.* — Une grandeur scalaire n'est pas modifiée par une rotation des axes de coordonnées et elle est définie par un seul nombre. Si on définit un scalaire en chaque point de l'espace, on a un champ de scalaire  $a(x, y, z)$ . Éventuellement cette grandeur peut varier dans le temps en un point de l'espace et c'est alors une fonction  $a(x, y, z, t)$  des coordonnées spatiales et du temps.

Nous aurons l'occasion de parler du produit scalaire de deux vecteurs, du potentiel scalaire  $V(x, y, z)$ , de la densité volumique de charge électrique  $\rho(x, y, z)$ , etc....

Un scalaire n'est pas toujours associé à un seul point de l'espace comme par exemple la grandeur

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

qui représente la distance du point de coordonnées  $(\xi, \eta, \zeta)$  au point de coordonnées  $(x, y, z)$ . Si l'on convient de laisser fixe le point  $(\xi, \eta, \zeta)$ , la grandeur  $r$  devient une fonction de  $x, y, z$ . L'inverse  $1/r$  du scalaire précédent reviendra souvent dans nos calculs.

Il est parfois plus commode de désigner les coordonnées d'un point par  $x_1, x_2, x_3$  plutôt que  $x, y, z$ , ou par  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , plutôt que  $\xi, \eta, \zeta$ . Cela permet de désigner ces coordonnées d'une manière globale par la notation  $x_u$  ou  $\xi_u$  en convenant que l'indice  $u$  peut prendre les trois valeurs 1, 2, 3. De même les trois dérivées partielles s'écriront simplement

$$\partial_u \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Pour les fonctions de  $r$  qui dépendent aussi des  $\xi_u$  nous serons amenés à prendre les dérivées partielles par rapport à ces variables et nous introduirons les symboles primés

$$\partial'_u \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_3}$$

On notera que pour les fonctions de  $r$ , on a

$$\partial_u = -\partial'_u$$

Enfin, nous ferons un usage continu de la règle de sommation sur les indices muets, ainsi appelés quand ils sont répétés haut et bas dans un produit de plusieurs facteurs algébriques ou symboliques. En voici un exemple avec



le développement en série de Taylor de la fonction  $1/r$  des variables  $\xi_u$ . On a (fig. I-1)

$$(1) \quad \frac{1}{r} = \left\{ \frac{1}{r} \right\}_0 + \frac{1}{1!} \xi_u \left\{ \partial'^u \left( \frac{1}{r} \right) \right\}_0 + \frac{1}{2!} \xi_u \xi_v \left\{ \partial'^u \partial'^v \left( \frac{1}{r} \right) \right\}_0 + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \xi_u \xi_v \xi_w \dots \xi_p \xi_q \left\{ \partial'^u \partial'^v \partial'^w \dots \partial'^p \partial'^q \left( \frac{1}{r} \right) \right\}_0 + \dots$$

Au lieu de prendre les dérivées partielles  $\partial'_u$  de  $1/r$  par rapport aux  $\xi_u$  puis de faire  $\xi_u = 0$  dans le résultat, il revient au même de prendre la dérivée changée de signe, soit  $-\partial^u$ , de  $1/R = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{-\frac{1}{2}}$ . On peut donc écrire (1) sous la forme

$$(2) \quad \frac{1}{r} = \left\{ 1 - \xi_u \partial^u + \frac{1}{2} \xi_u \xi_v \partial^u \partial^v - \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n}{n!} \xi_u \xi_v \dots \xi_p \xi_q \overbrace{\partial^u \partial^v \dots \partial^p \partial^q}^n + \dots \right\} \left( \frac{1}{R} \right).$$

Ce développement n'est convergent qu'à l'extérieur d'une sphère de rayon OM et de centre O. A l'intérieur de cette sphère, on peut développer  $1/r$  en série suivant les puissances croissantes de  $x, y, z$ , soit

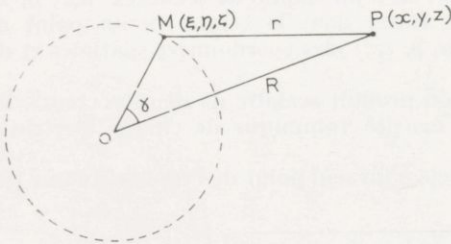


FIG. — I-1.

$$(3) \quad \frac{1}{r} = \sum_{l,m,n} a_{lmn} x^l y^m z^n;$$

$$l + m + n = 0, 1, 2, \dots$$

C'est le développement en série de Taylor de  $1/r$  considéré comme

une fonction de  $x, y, z$ , au voisinage de l'origine O des coordonnées.

Un développement analogue à (2) peut être utilisé pour  $(\text{Log } r)$  avec  $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$ , quand  $R > OM$ , soit

$$(4) \quad \text{Log } r = \left\{ 1 - \xi_u \partial^u + \frac{1}{2} \xi_u \xi_v \partial^u \partial^v - \dots \right\} (\text{Log } R),$$

la somme sur les indices  $u, v$  allant de 1 à 2.

2. — **Vecteurs.** — a) **Définitions et notations.** — Un vecteur est représenté par un segment de droite orienté (fig. I-2). Analytiquement, il est défini par ses trois composantes en coordonnées cartésiennes rectangulaires. Nous le représenterons par la notation  $\vec{A}$  et les composantes s'écriront  $A_1 A_2 A_3$  ou simplement  $A_u$ . Quand on utilise les coordonnées  $x, y, z$ , au lieu de  $x_u$ , on écrit  $A_x A_y A_z$ .

Les composantes  $A_u$  d'un vecteur avec les indices placés en bas s'appellent les composantes covariantes. On considère aussi les composantes contrevariantes  $A^u$  avec l'indice placé en haut. En axes cartésiens on a toujours  $A_u = A^u$ . Nous utiliserons néanmoins les deux notations pour faire jouer la règle de sommation sur les indices muets.

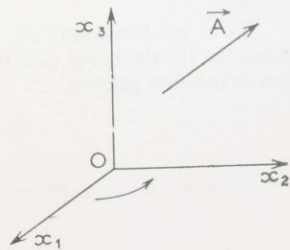


FIG. — I-2.

Il existe deux types d'axes de coordonnées : les axes directs comme ceux de la figure 2 et les axes inverses obtenus en modifiant le sens positif sur l'un des trois axes. On utilise toujours des axes directs, sauf pour l'étude des variétés enantiomorphes où il est préférable d'avoir des axes adaptés au milieu pour que les formules restent les mêmes.

**b) Champs de vecteurs.** — Au lieu d'un vecteur appliqué en un point unique de l'espace, on a souvent à considérer une infinité de vecteurs. S'il y a un vecteur défini en chacun des points de l'espace, on a affaire à un champ de vecteurs. Pour définir un tel champ, il faut donner trois fonctions  $A_u$  des variables  $x, y, z$  et éventuellement du temps  $t$ . Parmi les nombreux champs de vecteurs que nous aurons l'occasion de rencontrer, nous pouvons citer

$$\begin{aligned} \vec{E} \vec{B}^* & \text{ Champ et induction électrique,} \\ \vec{E}^* \vec{B} & \text{ Champ et induction magnétique,} \\ \vec{J} \vec{J}^* & \text{ Densités de courant électrique et magnétique, ... etc.} \end{aligned}$$

Un autre champ de vecteurs dont nous aurons souvent besoin est défini par

$$r_u = x_u - \xi_u.$$

C'est le vecteur joignant le point  $\xi_u$  au point  $x_u$ . Nous l'écrivons aussi  $\vec{r} = \vec{x} - \vec{\xi}$ .

**c) Produit scalaire.** — Il est défini par l'expression

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_u A_u B_u.$$

En utilisant la règle de sommation sur les indices muets, il s'écrit

$$(5) \quad (\vec{A} \cdot \vec{B}) = A_u B^u.$$

Il est bon de noter que l'on peut toujours changer le nom d'un indice muet et écrire par exemple

$$A_u B^u = A_v B^v = A_w B^w.$$

On montre facilement que  $(\vec{A} \cdot \vec{B})$  est égal au produit de la longueur de chacun des vecteurs par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent, soit (fig. I-3)

$$(6) \quad (\vec{A} \cdot \vec{B}) = A \cdot B \cdot \cos \theta.$$

D'une manière générale nous désignerons la longueur d'un vecteur (ou son module) qui est un nombre toujours positif par la même lettre que le vecteur, mais nous supprimerons la flèche. Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est le carré de son module puisque  $\cos \theta = 1$ . En particulier

$$(\vec{r})^2 = r^2 = r_u r^u = (x_u - \xi_u)(x^u - \xi^u)$$

c'est-à-dire le carré de la distance des deux points.

**d) Produit vectoriel.** — Le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est un vecteur  $\vec{C}$  défini par

$$(7) \quad C_w = A_u B_v - A_v B_u \quad (uvw \text{ permutation circulaire de } 123).$$

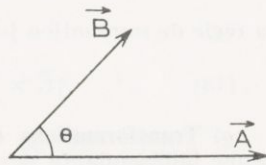


FIG. — I-3.

On écrit aussi

$$(8) \quad \vec{C} = [\vec{A} \times \vec{B}].$$

Le produit vectoriel n'est pas commutatif; il change de signe quand on permute les deux vecteurs. Il change aussi de signe quand on passe des axes droits à des axes gauches, mais nous avons dit que nous utiliserions toujours des axes droits.

On sait que le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur normal au plan formé par les deux vecteurs primitifs de telle sorte que les trois vecteurs  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  forment un trièdre direct; sa grandeur est égale à l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , soit (fig. I-4)

$$(9) \quad C = A \cdot B \cdot \sin \theta.$$

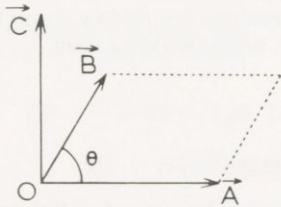


FIG. I-4.

e) **Produit mixte.** — Le produit mixte de trois vecteurs  $\vec{A} \vec{B} \vec{C}$  est défini par  $\vec{C} \cdot [\vec{A} \times \vec{B}]$ ; c'est donc le produit scalaire du vecteur  $\vec{C}$  par

le vecteur  $[\vec{A} \times \vec{B}]$ . On a la propriété suivante d'associativité

$$(10) \quad \vec{C} \cdot [\vec{A} \times \vec{B}] = [\vec{C} \times \vec{A}] \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot [\vec{B} \times \vec{C}].$$

On montre qu'il est égal au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs, avec d'ailleurs les signes (+) ou (—), soit (fig I-5)

$$(11) \quad [\vec{A} \times \vec{B}] \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

f) **Double produit vectoriel.** — Le double produit vectoriel de trois vecteurs  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$ , est défini par l'expression

$$(12) \quad C_v [A^u B^v - A^v B^u] = A^u (C_v B^v) - B^u (C_v A^v),$$

la règle de sommation jouant sur l'indice  $v$ . On l'écrit aussi

$$(13) \quad [\vec{C} \times [\vec{A} \times \vec{B}]] = \vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{A}).$$

g) **Transformations orthogonales.** — Le vecteur est une réalité intrinsèque indépendante des axes mais les composantes dépendent du choix de ces derniers. Dans une rotation des axes par exemple, les composantes se modifient suivant une loi bien déterminée, les nouvelles composantes  $\bar{A}_u$  étant des combinaisons linéaires des anciennes, ce qui peut s'écrire

$$(14) \quad \bar{A}_u = \alpha_u^v A_v$$

avec une somme de 1 à 3 sur l'indice muet  $v$ . Sous forme matricielle cela s'écrit

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \bar{A} = \alpha A.$$

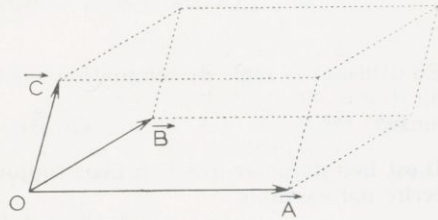


FIG. — I-5.



On notera que dans  $\alpha_u^v$ , l'indice du bas désigne la ligne tandis que l'indice du haut désigne la colonne.

En multipliant (15) par la matrice inverse de  $\alpha$ , soit  $\alpha^{-1}$ , on obtient

$$(16) \quad A = \alpha^{-1} \bar{A}.$$

Pour une rotation des axes, on a

$$(17) \quad \sum_w \alpha_u^w \alpha_v^w = \delta_{uv}, \quad \sum_w \alpha_u^w \alpha_w^v = \delta^{uv}.$$

Si l'on appelle matrice transposée de  $\alpha$ , la matrice  $\alpha_t$  dont les éléments sont obtenus en permutant les lignes et les colonnes de  $\alpha$ , soit  $(\alpha_{ij})_t = \alpha_{ji}$ , la formule (17) s'écrit

$$(18) \quad \alpha_u^w (\alpha_t)_w^v = (\alpha_t)_u^w \alpha_w^v = \delta_u^v$$

ou

$$(19) \quad \alpha \cdot \alpha_t = \alpha_t \cdot \alpha = 1,$$

ce qui prouve que  $\alpha_t = \alpha^{-1}$ , c'est-à-dire que la matrice inverse qui figure dans (16) coïncide avec la matrice transposée.

Voici l'expression générale de la matrice  $\alpha$  des rotations où  $\lambda_u$  sont les cosinus directeurs de l'axe de rotation et  $\theta$  la grandeur de l'angle dont tourne le système :

$$(20) \quad \alpha = \begin{vmatrix} \lambda_1^2 (1 - \cos \theta) + \cos \theta & \lambda_1 \lambda_2 (1 - \cos \theta) + \lambda_3 \sin \theta & \lambda_1 \lambda_3 (1 - \cos \theta) - \lambda_2 \sin \theta \\ \lambda_2 \lambda_1 (1 - \cos \theta) - \lambda_3 \sin \theta & \lambda_2^2 (1 - \cos \theta) + \cos \theta & \lambda_2 \lambda_3 (1 - \cos \theta) + \lambda_1 \sin \theta \\ \lambda_3 \lambda_1 (1 - \cos \theta) + \lambda_2 \sin \theta & \lambda_3 \lambda_2 (1 - \cos \theta) - \lambda_1 \sin \theta & \lambda_3^2 (1 - \cos \theta) + \cos \theta \end{vmatrix}.$$

**Exemples:** ROTATION DE 120° AUTOUR DE L'AXE 3.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1; \quad \cos \theta = -1/2, \quad \sin \theta = \sqrt{3}/2.$$

d'où

$$(21) \quad \alpha = \begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \alpha^{-1} = \begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

ROTATION DE 90° AUTOUR DE L'AXE 3.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1; \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = 1$$

d'où

$$(22) \quad \alpha = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \alpha^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

ROTATION ÉLÉMENTAIRE

$$\vec{\delta\omega} = \vec{\lambda} \cdot \delta\theta$$

la matrice (20), avec  $\cos \theta \neq 1$  et  $\sin \theta \neq \delta\theta$ , donne

$$(23) \quad \alpha = \begin{vmatrix} 1 & \delta\omega_3 & -\delta\omega_2 \\ -\delta\omega_3 & 1 & \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 & -\delta\omega_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \delta\omega_{12} & \delta\omega_{13} \\ \delta\omega_{21} & 1 & \delta\omega_{23} \\ \delta\omega_{31} & \delta\omega_{32} & 1 \end{vmatrix}.$$

D'après (14), les variations d'un vecteur  $\vec{A}$  peuvent s'écrire

$$(24) \quad \delta A_w = \bar{A}_w - A_w = A_u \delta \omega_v - A_v \delta \omega_u \quad \text{ou} \quad \delta \vec{A} = [\vec{A} \times \vec{\delta \omega}].$$

Les rotations ne sont pas les seules transformations qui jouissent de la propriété  $\alpha_i = \alpha^{-1}$  et que l'on appelle des transformations orthogonales. En voici deux exemples

$$(25) \quad \alpha' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \alpha'' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$\alpha'$  correspond à une réflexion sur le plan  $x_3$  (changement de  $x_3$  en  $-x_3$ ) et  $\alpha''$  correspond à une réflexion sur le plan passant par  $x_3$  et bissectant l'angle  $(x_1, x_2)$ . On vérifie aisément que  $\alpha' \alpha'_i = \alpha'' \alpha''_i = 1$  et que l'opération déterminant, effectuée sur le tableau de ces matrices, donne  $\Delta = -1$ .

D'une manière générale, d'après la règle de multiplication de deux déterminants, les relations (17), (18) et (19) s'écrivent aussi

$$(26) \quad \Delta^2 = 1 \quad \text{d'où} \quad \Delta = \pm 1$$

et l'on vérifie aisément que les rotations correspondent à  $\Delta = +1$ .

On peut aussi montrer que dans les transformations orthogonales, le mineur  $\alpha_u^v$  de  $\alpha_u^v$  dans le déterminant formé avec les  $\alpha_u^v$  est égal à

$$(27) \quad \alpha_u^v = \alpha_u^v \cdot \Delta.$$

D'une manière générale, si (14) est la loi de transformation des composantes covariantes d'un vecteur, les composantes contrevariantes se transforment suivant la loi

$$(28) \quad \bar{A}^u = \beta_v^u A^v \quad \text{avec} \quad \beta_v^u = \frac{\alpha_u^v}{\Delta}.$$

(Noter la permutation des indices dans la correspondance entre  $\beta_v^u$  et  $\alpha_u^v$ ). Dans le cas particulier d'une transformation orthogonale, d'après (27) on a  $\beta_v^u = \alpha_u^v$  et (28) n'est pas différente de (14), ce qui est assez naturel dans le cas des coordonnées cartésiennes puisque  $A_u = A^u$ .

3. — *Inversion d'une correspondance linéaire.* — On a souvent entre  $n$  grandeurs  $A_i$  et  $n$  grandeurs  $B_j$ , des relations du type

$$(29) \quad A_i = b_{ij} B^j \quad i, j = 1, 2, 3 \dots n.$$

la somme sur l'indice muet  $j$  allant de 1 à  $n$ . C'est le cas, par exemple des charges et des potentiels d'un système de conducteurs en équilibre électrostatique. Posons

$$\begin{cases} \Delta = \text{déterminant des } b_{ij}, \\ \mathcal{B}^{ij} = \text{mineur de } b_{ij} \text{ pris avec son signe dans ce déterminant;} \end{cases}$$

Multiplions (29) par  $\mathcal{B}^{ik}$ , soit

$$\mathcal{B}^{ik} A_i = \mathcal{B}^{ik} b_{ij} B^j = \Delta \cdot \delta_j^k B^j = B^k \cdot \Delta;$$

en posant

$$(30) \quad a^{ki} = \frac{\mathcal{B}^{ik}}{\Delta} \quad (\text{Noter la permutation des indices})$$

on a

$$(31) \quad B^k = a^{ki} A_i.$$

On voit que chaque  $B^k$  est une combinaison linéaire des  $A_i$  et l'on dit que (31) est l'inversion de la correspondance linéaire (29).

4. — **Tenseurs.** — a) **Définitions.** — Dans l'espace ordinaire à trois dimensions les tenseurs sont des grandeurs physiques qui ont un nombre de composantes égal à  $3^p$  si  $p$  est l'ordre du tenseur. Par exemple  $T_{uv\dots w}^{ij\dots}$  où chacun des indices  $uvwij$  peut prendre l'une quelconque des valeurs 1, 2, 3, est un tenseur de rang cinq, trois fois covariant et deux fois contrevariant; il a 343 composantes. En coordonnées cartésiennes, comme pour les vecteurs, les composantes covariantes et les composantes contrevariantes sont les mêmes et nous les utilisons uniquement pour faire jouer la règle de sommation d'une manière convenable.

Voici les principaux tenseurs que nous aurons l'occasion de rencontrer

|                    |                                                |
|--------------------|------------------------------------------------|
| $\varepsilon_{uv}$ | Perméabilité électrique.                       |
| $\mu_{uv}$         | Perméabilité magnétique.                       |
| $\sigma_{uv}$      | Tenseur symétrique des tensions élastiques.    |
| $e_{uv}$           | Tenseur symétrique des déformations.           |
| $T_{uv}$           | Tenseur de Maxwell.                            |
| $\Pi_{ij}^q$       | Tenseur piézoélectrique.                       |
| $A_{uv}^{ij}$      | Tenseur des coefficients d'élasticité, etc.... |

On peut obtenir des tenseurs par la multiplication des composantes de plusieurs vecteurs. Par exemple avec deux vecteurs  $A_u$  et  $B_v$  on peut former le tenseur  $A_u B_v$  qui a 9 composantes asymétriques. On peut aussi considérer la combinaison antisymétrique  $[A_u B_v - A_v B_u]$  qui a 6 composantes non nulles. Enfin il y a la combinaison symétrique  $(A_u B_v + A_v B_u)$  qui possède 9 composantes.

On forme aisément des tenseurs en coordonnées cartésiennes en prenant les dérivées partielles multiples d'un autre tenseur. On a par exemple

$$(32) \quad \partial^u \partial^v \left( \frac{1}{r} \right) = 3 \frac{r^u r^v}{r^5} - \frac{\delta^{uv}}{r^3}.$$

Un tenseur qui se présente naturellement dans les calculs est le tenseur

$$(33) \quad \partial_u x_v = \delta_{uv} = \begin{cases} 0 & \text{si } u \neq v, \\ 1 & \text{si } u = v, \end{cases}$$

qu'on appelle le symbole de Kronecker.

b) **Rotation des axes.** — Dans une rotation des axes les nouvelles composantes  $\bar{T}$  sont des combinaisons linéaires des anciennes. D'une manière plus précise la loi de transformation de  $T_{uv\dots w}^{ij\dots}$  est la même que celle du produit des composantes de vecteurs  $A_u B_v C^D E_w$ , c'est-à-dire que l'on a

$$(34) \quad \bar{T}_{uv\dots w}^{ij\dots} = \beta_{kl}^i \beta_{lm}^j \alpha_n^p \alpha_o^q \alpha_w^r T_{pq\dots r}^{kl\dots},$$

avec une somme de 1 à 3 à effectuer sur tous les indices muets. On voit que les scalaires sont des tenseurs d'ordre zéro tandis que les vecteurs sont des tenseurs d'ordre 1.

La loi de transformation d'un tenseur de rang deux, deux fois covariant, peut se mettre sous une forme simple qui est parfois utile. On a en effet

$$\bar{T}_{uv} = \alpha_u^i \alpha_v^j T_{ij} = \alpha_v^j (\alpha T)_{uj} = \sum_j (\alpha T)_{uj} (\alpha)_j^v = (\alpha T \alpha)_uv,$$



d'où, sous forme matricielle

$$(35) \quad \bar{T} = \alpha T \alpha_t,$$

T étant la matrice carrée constituée avec les éléments du tenseur T et  $\alpha_t$  étant la matrice transposée de la matrice des transformations orthogonales.

Cherchons la variation de  $T_{uv}$  pour la rotation élémentaire (23). On a

$$\bar{T}_{uv} = \alpha_u^i \alpha_v^j T_{ij} \quad \text{et} \quad \alpha_i^j = \delta_i^j + \delta\omega_i^j$$

les  $\delta\omega_{ij}$  étant des grandeurs antisymétriques telles que  $\delta\omega_{uv} = -\delta\omega_{vu} = \delta\omega_{vw}$  et  $u, v, w$ , étant toujours une permutation circulaire de 1, 2, 3. En négligeant les infiniments petits du second ordre, on a

$$\alpha_u^i \alpha_v^j T_{ij} = \{ \delta_u^i \delta_v^j + \delta_u^i \delta\omega_v^j + \delta_v^j \delta\omega_u^i \} T_{ij} = \delta\omega_u^i T_{iv} + \delta\omega_v^j T_{uj} + T_{uv}$$

ce qui donne pour la variation cherchée

$$(36) \quad \delta T_{uv} = \bar{T}_{uv} - T_{uv} = T_{uj} \delta\omega_v^j + T_{iv} \delta\omega_u^i.$$

c) **Règle de sommation.** — Cette règle que nous avons utilisée pour les vecteurs est particulièrement efficace dans le cas des tenseurs. En voici un exemple où l'on utilise aussi la possibilité de changer le nom d'un indice muet

$$(37) \quad \frac{1}{2} [A_u B_v - A_v B_u] [C^u D^v - C^v D^u] = (A_u C^u) (B_v D^v) - (A_u D^u) (B_v C^v).$$

Sous forme vectorielle (37) s'écrit

$$(38) \quad [\vec{A} \times \vec{B}] \cdot [\vec{C} \times \vec{D}] = (\vec{A} \cdot \vec{C}) (\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D}) (\vec{B} \cdot \vec{C}).$$

En particulier, on obtient ainsi le carré du produit vectoriel de deux vecteurs en faisant  $\vec{A} = \vec{C}$ ,  $\vec{B} = \vec{D}$  dans (38), soit

$$(39) \quad [\vec{A} \times \vec{B}]^2 = (\vec{A})^2 (\vec{B})^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2.$$

La règle de sommation sur les indices muets peut aussi jouer sur les indices d'un même tenseur; on l'appelle alors la contraction. Par exemple avec le symbole de Kronecker on a  $\delta_u^u = 3$ . La contraction du tenseur (32) donne

$$(40) \quad \partial_u \partial^u \left( \frac{1}{r} \right) = 3 \frac{r_u r^u}{r^5} - \frac{\delta_u^u}{r^3} = \frac{3-3}{r^3} \quad (\text{zéro si } r \neq 0).$$

d) **Symétrie; antisymétrie; tenseur adjoint.** — Quand un tenseur ne change pas en permutant deux de ses indices, on dit qu'il est symétrique sur ces deux indices. Si le tenseur change de signe pour la même opération, on dit qu'il est antisymétrique sur les indices considérés; avec deux indices on a donc  $T_{ij} = -T_{ji}$ . Quand un tenseur est quelconque on peut toujours le décomposer en sa partie symétrique et en sa partie antisymétrique, soit

$$T_{ij} = \frac{1}{2} [T_{ij} + T_{ji}] + \frac{1}{2} [T_{ij} - T_{ji}] = S_{ij} + A_{ij}.$$

On notera que le tenseur antisymétrique de rang deux, qui a 6 composantes non nulles n'en a que trois de distinctes, soit

$$\begin{vmatrix} 0 & T_{12} & -T_{31} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ T_{31} & -T_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut lui faire correspondre un vecteur  $T_w$ , n'ayant par conséquent que trois composantes, par la formule

$$(41) \quad T_w = \frac{1}{2} \varepsilon_{uvw} T^{uv}.$$

$\varepsilon_{uvw}$  est l'indicateur de dualité. Il est égal à zéro si tous les indices ne sont pas différents, à +1 si  $uvw$  est une permutation paire de 1, 2, 3, à -1 si  $uvw$  est une permutation impaire de 1, 2, 3. Le vecteur  $T_w$  s'appelle le vecteur adjoint (\*) ou dual du tenseur  $T_{uv}$ . Pratiquement la correspondance établie par la formule (41) revient à écrire

$$(42) \quad T_w = T_{uv},$$

$uvw$  étant une permutation paire de 1, 2, 3, les axes de coordonnées étant des axes à droite. Comme exemple on peut citer le produit vectoriel de deux vecteurs ou le rotationnel d'un vecteur.

Le tenseur de rang trois  $T^{uvw}$  complètement antisymétrique sur ses trois indices, a 27 composantes qui s'expriment toutes avec le même nombre précédé du signe (+) ou (-). On lui fait correspondre le scalaire  $T$ , qui n'a qu'une composante, par la formule

$$(43) \quad T = \frac{1}{6} \varepsilon_{uvw} T^{uvw}.$$

Comme exemple de ce type on peut citer le produit mixte de trois vecteurs ou la divergence d'un produit vectoriel.

5. — *Analyse vectorielle.* — a) **Gradient d'un scalaire.** — Soit  $\Phi(x, y, z)$  une fonction scalaire des coordonnées. Les trois dérivées partielles forment un vecteur  $A_u$  qui, par définition, est le gradient de la fonction  $\Phi$ . On écrit

$$(44) \quad A_u = \partial_u \Phi \quad \text{ou} \quad \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi;$$

$\partial_u \Phi$  est un vecteur, parce que les symboles de dérivation partielle  $\partial_u$  se transforment comme les composantes d'un vecteur dans une rotation des axes. Voici deux exemples de gradients

$$(45) \quad \partial_u r = r_u / r \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\text{grad}} r = \vec{r} / r$$

$$(46) \quad \partial_u \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{r_u}{r^3} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Dans ces formules les dérivées sont prises par rapport aux variables  $x_u$ . Pour des fonctions de  $r$  on peut aussi prendre les dérivées par rapport aux variables  $\xi_u$ ; en désignant par  $\overrightarrow{\text{grad}}'$  les gradients correspondants, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r) = - \overrightarrow{\text{grad}}' f(r)$$

Nous aurons souvent l'occasion d'utiliser cette dernière relation.

On représente souvent les symboles de dérivation partielle par les vecteurs symboliques  $\vec{\partial}$  ou  $\vec{\nabla}$ . Il ne faut cependant pas oublier que ce sont des symboles de dérivation; ils commutent entre eux mais ne commutent pas avec une

(\*) En coordonnées quelconques, il faudrait remplacer  $\varepsilon_{uvw}$  par  $\sqrt{|\Delta|} \cdot \varepsilon_{uvw}$ ,  $\Delta$  étant le déterminant des  $g_{ij}$ .

fonction des coordonnées; si, par exemple, on doit prendre le gradient d'un produit de deux scalaires  $a$  et  $b$ , il faut écrire

$$\partial_u(ab) = a\partial_u b + b\partial_u a.$$

On appelle dérivée d'une fonction  $f(x, y, z)$  suivant une direction de vecteur unitaire  $\vec{n}$ , l'expression

$$(47) \quad n_u \partial^u f = (\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})f = \frac{df}{dn}.$$

Nous rencontrerons souvent une expression de ce genre avec le vecteur unitaire de la normale positive à une surface. L'opérateur  $n_u \partial^u = d/dn$  peut s'appliquer à un tenseur quelconque (scalaire, vecteur, etc...).

**b) Divergence d'un vecteur.** — La divergence d'un vecteur  $\vec{A}$  est un scalaire défini par l'expression

$$\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3.$$

On écrit aussi

$$(48) \quad \text{div } \vec{A} = \partial_u A^u = (\vec{\delta} \cdot \vec{A}).$$

On peut considérer la divergence comme un produit scalaire symbolique; elle n'est pas modifiée par une rotation des axes. Voici un exemple de divergence

$$(49) \quad \partial_u r^u = \text{div } \vec{r} = 3.$$

**c) Rotationnel d'un vecteur.** — Le rotationnel d'un vecteur  $\vec{A}$  est un vecteur  $\vec{B}$  défini par

$$(50) \quad B_w = [\partial_u A_v - \partial_v A_u] \quad (u, v, w \text{ permutation circulaire de } 1, 2, 3).$$

On écrit aussi

$$(51) \quad \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = [\vec{\delta} \times \vec{A}] = [\vec{\nabla} \times \vec{A}].$$

On peut donc le considérer comme un produit vectoriel symbolique du vecteur  $\vec{\delta}$  par le vecteur  $\vec{A}$ . Dans les pays de langue anglaise on écrit  $\overrightarrow{\text{curl}}$  au lieu de  $\overrightarrow{\text{rot}}$ . Voici un exemple de rotationnel

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{r} = 0.$$

**d) Le laplacien.** — L'opérateur laplacien est défini par

$$(52) \quad \partial_u \partial^u = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = (\vec{\delta} \cdot \vec{\delta}).$$

On peut donc le considérer comme le produit scalaire symbolique de  $\vec{\delta}$  par lui-même. On le désigne presque toujours par la lettre  $\Delta$ . Il peut s'appliquer aussi bien à un scalaire qu'à un vecteur, soit

$$\Delta \Phi = \partial_u \partial^u \Phi, \quad \Delta \vec{A} = \partial_u \partial^u \vec{A}$$

Voici quelques exemples de laplaciens :

1.  $\Delta r = 2/r.$

2. D'après (40) le laplacien de  $1/r$  est partout nul, sauf peut-être au point  $r = 0$ ; nous verrons plus loin qu'il prend brusquement une valeur infinie.

3. Le laplacien de  $\text{Log } r$  où  $r$  est la distance de deux points dans le plan a pour expression

$$(53) \quad (\partial_1^2 + \partial_2^2) \text{Log } r = \frac{2-2}{r^2},$$



il est donc aussi partout nul sauf peut-être au point  $r = 0$ ; nous verrons plus loin qu'il prend brusquement une valeur infinie.

4. Le laplacien de  $r$  s'écrit

$$(54) \quad \Delta r = \Delta|x - \xi| = 0,$$

il est donc partout nul sauf peut-être au point  $r = 0$  où la dérivée première de la fonction est discontinue (voir fig. 29). Nous verrons que sa valeur est infinie en ce point.

6. — *Quelques identités vectorielles.* — Ces identités sont le plus souvent évidentes avec les notations explicites utilisant la règle de sommation et l'on n'éprouve même pas le besoin de les invoquer quand on les rencontre dans les calculs. Les voici écrites sous les deux formes, les expressions symboliques classiques n'étant pas du tout évidentes.

$$(55) \quad \begin{cases} \partial^u \partial^v \Phi - \partial^v \partial^u \Phi = 0, & \partial_a \partial^u \Phi = \Delta \Phi, \\ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} \Phi = 0, & \overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\text{grad}} \Phi = \Delta \Phi, \\ \partial^u [\partial^v A^w - \partial^w A^v] + \partial^v [\partial^w A^u - \partial^u A^w] + \partial^w [\partial^u A^v - \partial^v A^u] = 0, \\ \overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0, \\ \partial_v [\partial^u A^v - \partial^v A^u] = \partial^u (\partial_v A^v) - \partial_v \partial^u A^u, \\ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{\text{div}} \vec{A} - \Delta \vec{A}, \\ \partial_a (a A^u) = a \partial_a A^u + A^u \cdot \partial_a a, \\ \overrightarrow{\text{div}} (a \vec{A}) = a \cdot \overrightarrow{\text{div}} \vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} a), \\ \partial^u (a A^v) - \partial^v (a A^u) = a [\partial^u A^v - \partial^v A^u] - [A^u \cdot \partial^v a - A^v \partial^u a], \\ \overrightarrow{\text{rot}} (a \vec{A}) = a \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - [\vec{A} \times \overrightarrow{\text{grad}} a], \\ \partial^u (A_v B^v) = A_v \partial^u B^v + B^v \partial^u A_v \\ = A_v \partial^v B^u + B_v \partial^v A^u + A_v [\partial^u B^v - \partial^v B^u] + B_v [\partial^u A^v - \partial^v A^u] \\ \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} + [\vec{A} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}] + [\vec{B} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}] \\ \partial_v [A^v B^v - A^v B^u] = A^u \partial_v B^v - B^u \partial_v A^v + B_v \partial^v A^u - A_v \partial^v B^u, \\ \overrightarrow{\text{rot}} [\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{div}} \vec{B} - \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{div}} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}, \\ \overrightarrow{\text{div}} [\vec{A} \times \vec{B}] = (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}). \end{cases}$$

7. — *Transformation des intégrales multiples.* — Si  $\vec{n}$  désigne le vecteur unitaire de la normale extérieure à la surface  $S$  limitant le volume  $v$ , on a (fig. I-6)

$$(56) \quad \iiint_v \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \cdot dv = \iint_s \vec{n} \cdot \Phi \cdot ds,$$

$$(57) \quad \iiint_v \overrightarrow{\text{div}} \vec{A} \cdot dv = \iint_s (\vec{n} \cdot \vec{A}) \cdot ds,$$

$$(58) \quad \iiint_v \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot dv = \iint_s [\vec{n} \times \vec{A}] \cdot ds,$$

Les relations (57), (58) se déduisent immédiatement de (56) en y remplaçant  $\Phi$  par une composante de vecteur, puis en formant la contraction et la combinaison antisymétrique.

Si une surface  $S$  s'appuie sur un contour fermé  $C$  et si le sens de circula-

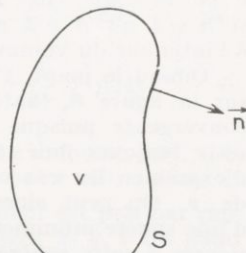


FIG. — I-6.

tion sur  $C$  par rapport au vecteur unitaire  $\vec{n}$  de la normale est le même que le sens de rotation autour de  $Ox_3$  qui amène  $Ox_1$  sur  $Ox_2$ , on a (fig. I-7)

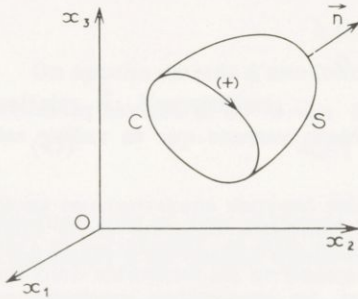


FIG. — I-7.

$$(59) \quad \int_c \Phi \cdot d\vec{l} = \iint_s [\vec{n} \times \text{grad } \Phi] ds,$$

$$(60) \quad \int_c (\vec{A} \cdot d\vec{l}) = \iint_s (\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A}) ds,$$

$$(61) \quad \int_c [d\vec{l} \times \vec{A}] = \iint_s \{ (\vec{n} \cdot \text{grad}) \vec{A} + [\vec{n} \times \text{rot } \vec{A}] - \vec{n} \cdot \text{div } \vec{A} \} \cdot ds.$$

Les relations (60), (61) se déduisent immédiatement de (59).

On écrit parfois  $\vec{n} \cdot dS = d\vec{S}$ . Dans ce qui suit nous écrirons toutes les intégrales multiples avec un seul signe somme, les lettres placées au bas de ce signe indiquant qu'il s'agit d'une intégrale curviligne, d'une intégrale de surface ou d'une intégrale de volume (\*).

Les six intégrales précédentes sont des cas particuliers d'une formule générale valable pour un espace à un nombre quelconque de dimensions et qui s'écrit

$$(62) \quad \underbrace{\iint \dots \int}_n A_{uvw} [dx^u dx^v dx^w \dots] = \underbrace{\iint \dots \int}_{n+k} \underbrace{\partial_p \partial_q \dots}_k A_{uvw} [dx^p dx^q \dots dx^u dx^v \dots],$$

les éléments d'intégration étant considérés comme des grandeurs antisymétriques sur tous les indices. Nous aurons en particulier à utiliser l'expression

$$(63) \quad \int_v \partial_v T^{uv} dv = \int_s n_v T^{uv} ds.$$

8. — **Convergence ou divergence de quelques intégrales.** — Les intégrales du type

$$(64) \quad \int_v \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{r^n} dv,$$

où  $f$  est une fonction bornée dans le volume  $v$  et  $r = MP$  (fig. I-8), sont convergentes si  $n = 1$  ou  $n = 2$  et elles sont divergentes à l'intérieur du volume si  $n \geq 3$ .

Quand le point  $P$  est extérieur, comme sur la figure 8, l'intégrale est évidemment convergente puisque la fonction à intégrer reste toujours finie. Il suffit par conséquent d'examiner les cas où  $P$  est à l'intérieur de  $v$ . On peut alors entourer le point  $P$

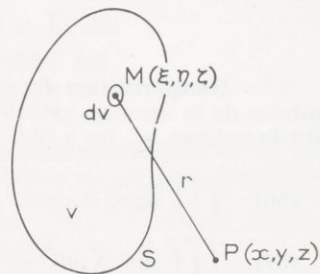


FIG. — I-8.

d'une sphère infiniment petite de rayon  $a$ . Les parties du volume  $v$  extérieures à cette sphère apportent une contribution finie à l'intégrale. Pour les

(\*) Les relations (56) à (61) sont encore valables si  $\Phi$  ou  $\vec{A}$  présentent des discontinuités, à condition de définir les symboles  $\text{grad } \Phi$ ,  $\text{div } \vec{A}$ ,  $\text{rot } \vec{A}$ , en ces points; sinon, voir les exercices (14) et (15) de la fin du chapitre.

points intérieurs, désignons par  $f_m$  la valeur maximum de  $f$ ; on peut écrire

$$\int_v \frac{f}{r^n} dv < f_m \int_0^a \frac{4\pi r^2}{r^n} dr.$$

Pour  $n = 1, n = 2$  on obtient respectivement  $2\pi a^2$  et  $4\pi a$  et ceci tend vers zéro quand  $a \rightarrow 0$ . L'intégrale (64) est donc convergente.

Quand  $n = 3$ , on a un logarithme qui est infini pour  $r = 0$ . C'est la même chose quand  $n > 3$  car on obtient une puissance négative de  $a$ . Dans tous ces cas les intégrales du type (64) sont donc divergentes.

Dans le plan (fig. I-9), avec deux variables, l'intégrale

$$(65) \quad \int_s \frac{f(\xi, \eta)}{r^n} ds,$$

est convergente uniquement quand  $n = 1$ , si le point P est à l'intérieur; elle est divergente quand  $n \geq 2$ . Le raisonnement qui conduit à ce résultat est le même que précédemment. On considère un petit cercle qui entoure P et  $ds = 2\pi r \cdot dr$ . Quand  $n = 1$  l'intégrale étendue au cercle est plus petite que  $2\pi a f_m$  qui tend vers zéro avec  $a$ . L'intégrale (65) est donc convergente dans ces conditions. Pour  $n = 2$  on a un logarithme et l'intégrale diverge.

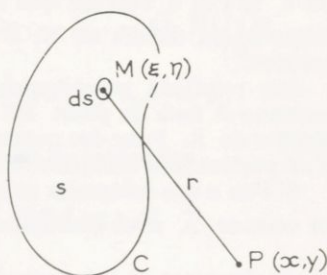


FIG. — I-9.

On vérifiera de la même manière que l'intégrale dans le plan

$$\int_s f(\xi, \eta) \cdot \text{Log } r \cdot ds,$$

est convergente en tout point intérieur et extérieur à la courbe C qui limite le domaine S.

Dans le cas où  $n = 1, 2$  pour (64) ou  $n = 1$  pour (65), on peut encore avoir des intégrales divergentes si le volume  $v$  s'étend jusqu'à l'infini. Cela se présente aussi bien pour les points intérieurs que pour les points extérieurs au volume  $v$  ou à la surface S.

9. — Continuité ou discontinuité de quelques intégrales (\*). — a) Intégrales de surface. — Considérons l'intégrale

$$(66) \quad \vec{J}(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_s f(\xi, \eta, \zeta) \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot ds \\ = \frac{1}{4\pi} \int_s f(M) \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} ds,$$

où  $r$  est la distance du point  $M(\xi, \eta, \zeta)$  de la surface au point  $P(x, y, z)$  et  $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$ . Le gradient est pris par rapport aux coordonnées  $x, y, z$  du point P (fig. I-10). Une telle intégrale est une fonction des coordonnées de P qui est discontinue à la traversée de S.

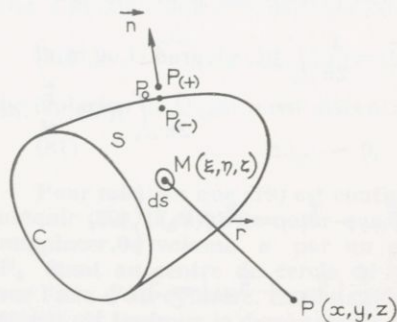


FIG. — I-10.

Si l'on considère les valeurs  $\vec{J}_{(+)}$  et  $\vec{J}_{(-)}$  pour deux points  $P_{(+)}$  et  $P_{(-)}$

(\*) Voir E. DURAND : Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse, p. 161, 1956.



situés de part et d'autre de  $S$  et à son voisinage immédiat, ainsi que la valeur  $\vec{J}_s$  au point  $P_0$  situé sur  $S$  entre les deux points précédents, on a

$$(67) \quad \vec{J}_{(+)} - \vec{J}_{(-)} = \vec{n} \cdot f(P_0) \cdot \begin{cases} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{cases}$$

$$(68) \quad \frac{1}{2} \{ \vec{J}_{(+)} + \vec{J}_{(-)} \} = \vec{J}_s.$$

On a 1, 1/2, 0 suivant que le point  $P_0$  est sur  $S$ , sur la courbe  $C$  qui la limite ou en dehors de  $S$ ;  $\vec{n}$  est toujours le vecteur unitaire de la normale positive.

Les relations précédentes sont valables quand  $f(M)$  est une fonction continue et finie du point  $M$  sur la surface et quand le point  $P_0$  est un point régulier de  $S$ . Pour des points singuliers de  $S$  on a des expressions différentes et en particulier l'intégrale devient infinie pour un point conique.

Si l'on a des intégrales analogues à (66) où la fonction  $f$  est remplacée par un vecteur  $\vec{A}$  avec multiplication scalaire ou vectorielle, soit

$$(69) \quad \vec{J} = -\frac{1}{4\pi} \int_s \left[ \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right] ds,$$

$$(70) \quad \vec{J} = -\frac{1}{4\pi} \int_s \left[ \vec{A} \times \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right] ds,$$

on a évidemment

$$(71) \quad \vec{J}_{(+)} - \vec{J}_{(-)} = (\vec{A} \cdot \vec{n}) \begin{cases} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{cases},$$

$$(72) \quad \vec{J}_{(+)} - \vec{J}_{(-)} = [\vec{A} \times \vec{n}] \begin{cases} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{cases},$$

ainsi que (68). puisque (67) et (68) sont valables pour chacune des composantes du vecteur  $\vec{A}$ .

Dans le plan où  $r$  est la distance  $\overline{MP}$  du point  $M(\xi, \eta)$  d'une courbe  $C$  au point  $P(x, y)$  (fig. I-11), on a des formules analogues aux précédentes pour l'intégrale

$$(73) \quad \vec{J} = \frac{1}{2\pi} \int_c f(\xi, \eta) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} (\text{Log } r) \cdot dl \\ = \frac{1}{2\pi} \int_c f(M) \cdot \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot dl$$

soit

$$(74) \quad \vec{J}_{(+)} - \vec{J}_{(-)} = \vec{N} \cdot f(P_0) \cdot \begin{cases} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{cases},$$

$$(75) \quad \frac{1}{2} \{ \vec{J}_{(+)} + \vec{J}_{(-)} \} = \vec{J}_c;$$

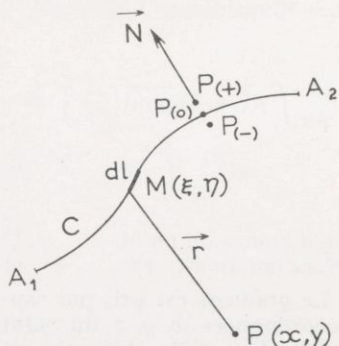


Fig. — I-11.

$\vec{N}$  est le vecteur unitaire de la normale positive à la courbe  $C$  et l'on a 1, 1/2, 0 suivant que  $P_0$  est sur la courbe  $C$ , sur l'un des deux points  $A_1, A_2$  qui la limitent ou en dehors de  $C$ .

Aux points  $A_1$  et  $A_2$ , les composantes de  $\vec{J}$  dans le prolongement de la

courbe C deviennent infinies, mais varient d'une manière continue et c'est pourquoi la différence (74) est encore finie, avec la valeur 1/2.

Les résultats précédents sont valables pour un point régulier de la courbe C. Si la courbe présente un brusque changement de direction, toutes les composantes de  $\vec{J}$  sont infinies au voisinage de ce point.

Si f, dans (73), est remplacée par un vecteur  $\vec{A}(M)$ , avec une multiplication scalaire ou vectorielle, on a des expressions analogues à (71), (72) où  $\vec{N}$  remplace simplement  $\vec{n}$ ; par exemple avec

$$(76) \quad \bar{J} = \frac{1}{2\pi} \int_c \left( \vec{A} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2} \right) \cdot dl \quad \text{on a} \quad \begin{cases} \bar{J}_{(+)} - \bar{J}_{(-)} = (\vec{A} \cdot \vec{N}) \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases} \\ \frac{1}{2} \{ \bar{J}_{(+)} + \bar{J}_{(-)} \} = \bar{J}_c. \end{cases}$$

Revenons aux figures (I-10), (I-11) et considérons les intégrales

$$(77) \quad \bar{J} = \int_S \frac{f(M)}{r} \cdot ds \quad \text{et} \quad \bar{J} = \int_c f(M) \text{Log } r \cdot dl.$$

Contrairement à (66) ces intégrales (77) sont continues à la traversée de S ou de C soit

$$(78) \quad \bar{J}_{(+)} = \bar{J}_{(-)} = \bar{J}_S.$$

La démonstration est analogue à celle qui conduit à (67). Si f(M) est continue on élimine toute discontinuité dans la fonction sous le signe somme en retirant de S un petit disque entourant le point P. On n'a donc qu'à examiner le cas où S est un disque plan et où l'on se déplace suivant son axe.

On notera que l'intégrale (66) n'est autre que le gradient changé de signe de (77).

b) **Intégrales de volume.** — L'intégrale

$$(79) \quad \bar{J}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{f(M)}{r} \cdot dv$$

est une fonction des coordonnées du point P qui est continue ainsi que ses dérivées premières, quand le point P traverse la surface S qui limite v (fig. I-8). Par contre les dérivées secondes sont discontinues et l'on a

$$(80) \quad (\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})^2 \{ \bar{J}_{(+)} - \bar{J}_{(-)} \} = f(P_0).$$

Le laplacien de  $\bar{J}$  est aussi discontinu puisque

$$(81) \quad \Delta \bar{J}_{(+)} = 0, \quad \Delta \bar{J}_{(-)} = -f(P).$$

Pour montrer que (79) est continue ainsi que ses dérivées premières et pour obtenir (80), il suffit de noter que pour l'étude de ces discontinuités, on peut remplacer le volume v par un petit cylindre de base circulaire, le point P<sub>0</sub> étant au centre du cercle de base. On est donc ramené au calcul de  $\bar{J}$  sur l'axe d'un cylindre. Sur la surface même la valeur des grandeurs discontinues est toujours la demi-somme des valeurs de part et d'autre.

Les formules précédentes sont encore valables dans le plan avec deux variables et pour l'intégrale (fig. I-9)

$$(82) \quad \bar{J}(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_s f(M) \cdot \text{Log } r \cdot ds.$$

10. — *L'angle solide  $\Omega$  sous lequel, d'un point  $P$ , on voit une surface  $S$  limitée par une courbe  $C$ .* — On rencontre souvent des fonctions discontinues à la traversée de certaines surfaces; physiquement elles sont dues à la présence

de charges simples ou de dipôles et analytiquement elles sont plus ou moins rattachées aux propriétés de la fonction angle solide  $\Omega$ .

Par définition, l'angle solide sous lequel du point  $P$  de la figure I-12 on voit la surface  $S$  limitée par la courbe  $C$ , a pour expression

$$(83) \quad \Omega = \int_s d\Omega = \int_s \frac{\cos \theta}{r^2} ds \\ = \int_s \left( \vec{n} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) ds = - \int_s \left( \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right) ds.$$

On peut dire aussi que l'angle solide est la surface découpée dans la sphère de rayon 1 et de centre  $P$ , par le cône de sommet  $P$  s'appuyant sur le contour  $C$ .

L'angle  $\theta$  varie de 0 à  $\pi$  de telle sorte que l'élément d'intégration  $d\Omega$  est positif si l'on voit le côté positif de la surface  $0 < \theta < (\pi/2)$  et négatif si l'on voit l'autre côté  $(\pi/2) < \theta < \pi$ . L'angle solide  $\Omega$  est une fonction des coordonnées de  $P$  qui est discontinue à la traversée de la surface  $S$ . D'après la formule (71) du paragraphe précédent et puisque  $(\vec{n} \cdot \vec{n}) = 1$ , on a

$$(84) \quad \Omega_{(+)} - \Omega_{(-)} = 4\pi,$$

$$(85) \quad \Omega_s = \frac{1}{2} \{ \Omega_{(+)} + \Omega_{(-)} \} \quad (\text{pour un point régulier de } S).$$

Sur la courbe  $C$  qui limite  $S$  la fonction  $\Omega$  est indéterminée et dépend de la direction suivant laquelle on aborde la courbe.

Si la surface  $S$  est fermée la courbe  $C$  disparaît et on vérifie aisément (fig. I-13) que  $\Omega = 0$  si le point  $P$  est à l'extérieur;  $\Omega_s = -2\pi$  si le point

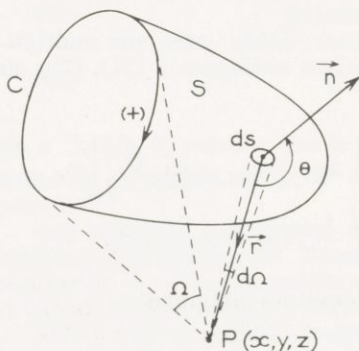


FIG. — I-12.

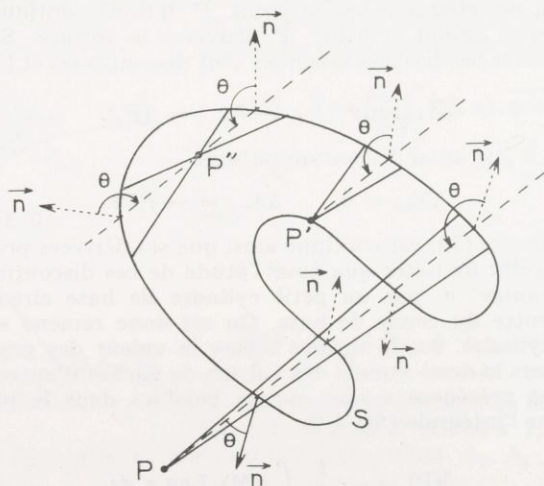


FIG. — I-13.



P est sur la surface en un point régulier; enfin  $\Omega = -4\pi$  si le point P est à l'intérieur. Dans ce cas particulier les relations générales (84), (85) sont bien vérifiées.

Pour des surfaces fermées présentant des points singuliers ou des arêtes, comme sur la figure I-14, l'expression de  $\Omega_s$  n'est plus valable. Sur une arête,

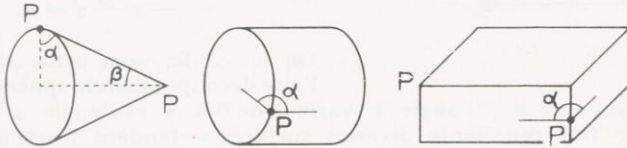


FIG. — I-14.

dont l'angle du dièdre formé par les deux plans tangents est  $\alpha$ , on a  $\Omega_s = -2\alpha$ ; au sommet du cône de révolution de demi-angle  $\beta$  on a  $\Omega_s = -2\pi(1 - \cos \beta)$ ; aux sommets d'un parallélépipède rectangle on a  $\Omega_s = -\pi/2$  et sur l'une des arêtes où  $\alpha = \pi/2$  on a  $\Omega_s = -\pi$ .

Sur une surface cylindrique indéfinie s'appuyant sur un contour fermé C (fig. I-15) on a encore  $\Omega' = 0$ ;  $\Omega'' = -4\pi$ ;  $\Omega_s = -2\pi$ ; la surface n'est pas fermée mais l'angle solide sous lequel on voit les ouvertures finies rejetées à l'infini, est nul.

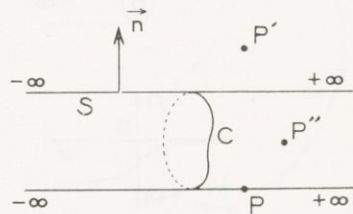


FIG. — I-15.

Pour une surface conique non fermée de sommet O et s'étendant jusqu'à l'infini (fig. I-16), si  $\alpha$  est l'angle solide du cône, on a

$$(86) \quad \begin{cases} \Omega'' = (\alpha - 4\pi) & \text{à l'intérieur,} \\ \Omega' = \alpha & \text{à l'extérieur,} \\ \Omega_s = (\alpha - 2\pi) & \text{(sauf au point O où } \Omega_s = 0). \end{cases}$$

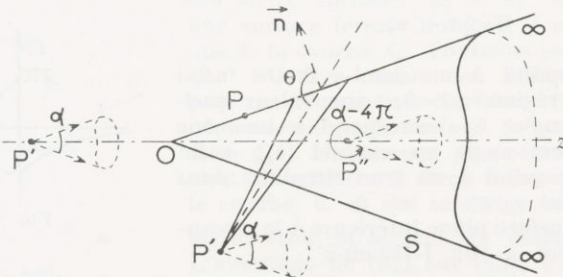


FIG. — I-16.

Comme cas particulier du précédent, avec  $\alpha = 2\pi$ , on a un plan indéfini normal en O à l'axe Oz et (86) devient

$$(87) \quad \Omega'' = -2\pi, \quad \Omega' = 2\pi, \quad \Omega_s = 0;$$

(Le point singulier du cône disparaît dans ces conditions).

Voici quelques exemples d'angles solides qui nous seront utiles. Le demi-

plan  $S$  limité par la droite  $C$  normale au plan de la figure I-17 est vu du point  $P$  sous l'angle

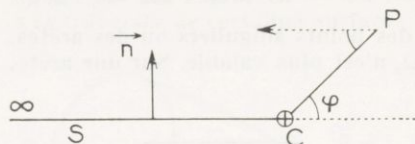


FIG. — I-17.

$$(88) \quad \Omega = 2\varphi, \quad \Omega_s = 0$$

avec

$$-\pi < \varphi < \pi.$$

On le vérifie sans peine en calculant l'aire découpée dans la sphère de rayon 1 avec  $dS = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$ , l'angle  $\theta$  variant de 0 à  $\pi$  et l'angle  $\varphi$  de 0 à  $\varphi$ . La figure I-18 représente diverses surfaces s'étendant jusqu'à l'infini et

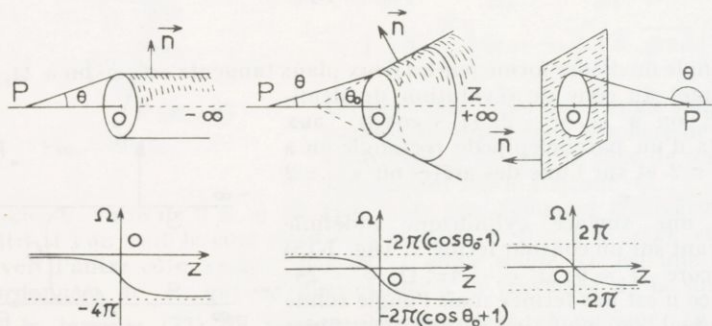


FIG. — I-18.

s'appuyant sur une circonférence d'axe  $Oz$ , ainsi que la variation de  $\Omega$  le long de l'axe. Cette dernière a pour expression

$$(89) \quad \Omega = 2\pi (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

avec

$$0 < \theta < \pi,$$

$\theta_0 = 0$  correspond à un demi-cylindre infini situé dans la région  $z > 0$ ; une valeur quelconque de l'angle  $\theta_0$  correspond à un cône tronqué de demi-angle au sommet  $\theta_0$ ; enfin  $\theta_0 = \pi/2$  correspond à un trou circulaire dans un plan indéfini.

Pour une surface plane intérieure à la circonférence de rayon  $a$  (fig. I-19) on a

$$(90) \quad \Omega = 2\pi (\varepsilon - \cos \theta) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{si } z < 0, \\ 0 & \text{si } z = 0, \\ +1 & \text{si } z > 0. \end{cases}$$

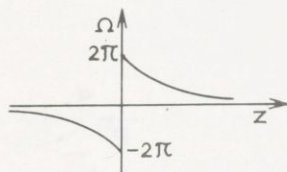
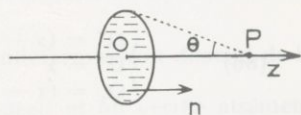


FIG. — I-19.

Pour un point  $P$  hors de l'axe,  $\Omega$  s'exprime en fonction des intégrales de Legendre de première et de troisième espèce

$$(91) \quad \mathcal{J}_1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad \mathcal{J}_3(k, m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \cdot [1 - m^2 \sin^2 \psi]}$$

soit

$$(92) \quad \Omega = \varepsilon(1 - \varepsilon')\pi + \frac{2z}{r_1} \left\{ \varepsilon' \sqrt{1 - m^2} \mathfrak{J}_3(k, m) - \mathfrak{J}_1(k) \right\}$$

avec

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = \frac{\sqrt{4aR}}{r_1}; \quad m = \frac{\sqrt{4aR}}{R+a}; \quad \varepsilon' \sqrt{1 - m^2} = \frac{R-a}{R+a} \\ r_1 = \sqrt{(R+a)^2 + z^2}; \quad R: \text{ distance du point } P \text{ à l'axe } Oz. \\ \varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{si } z < 0, \\ 0 & \text{si } z = 0, \\ 1 & \text{si } z > 0, \end{cases} \quad \varepsilon' = \begin{cases} -1 & \text{si } R < a, \\ 0 & \text{si } R = a, \\ 1 & \text{si } R > a. \end{cases} \end{array} \right.$$

Le terme en  $\mathfrak{J}_3$  est discontinu pour  $R = a$ , car  $\mathfrak{J}_3$  devient infini comme  $\pi/2\sqrt{(1-k^2)(1-m^2)}$  quand  $m \rightarrow 1$ , mais cette discontinuité est compensée par  $-\varepsilon\varepsilon'\pi$ . Quand  $R = 0$  dans (92), on retrouve la formule (90).

On peut montrer (\*) que l'intégrale de surface (83) qui définit l'angle solide, se transforme en intégrale curviligne qui s'écrit (fig. I-20)

$$(94) \quad \Omega = \int_C \frac{1}{r} \left( \left[ \vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r} \right] \cdot d\vec{l} \right) \left\{ 1 - \left( \vec{v} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \right\}$$

où  $\vec{v}$  est un vecteur unitaire constant de direction arbitraire.

Il est assez naturel que l'on puisse mettre (83) sous la forme d'une intégrale curviligne, puisque pour un point  $P$  tel que celui de la figure I-21, l'angle solide est le même pour les deux surfaces  $S$  et  $S'$  (on a en effet  $\Omega = 0$  pour l'ensemble des deux surfaces ( $S' + S$ ) qui constituent une surface fermée unique); il ne dépend donc que de la courbe  $C$ . Toutefois pour un point tel que  $P'$ , il y aurait une différence de  $\pm 4\pi$  pour ces deux mêmes surfaces. On peut donc se demander à quelle surface  $S$  correspond la formule (94). Un examen plus attentif montre que

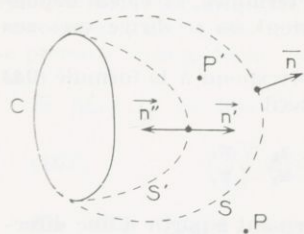


FIG. — I-21.

c'est un cylindre  $\Sigma$  demi-infini qui s'appuie sur la courbe  $C$  et qui se dirige vers l'infini dans la direction et le sens du vecteur unitaire  $\vec{v}$ . L'avantage de (94) sur (83), c'est que l'on a déjà intégré sur une variable.

11. — *L'angle  $\varphi$  sous lequel, d'un point  $P$  du plan, on voit les extrémités  $A_1$  et  $A_2$  d'une courbe  $C$ .* — Avec  $r = PM = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$  (fig. I-22) on a

$$(95) \quad \varphi = \int_C d\varphi = \int_C \frac{\cos \theta}{r} dl = \int_C \frac{(\vec{r} \cdot \vec{N})}{r^2} dl = \int_C (\vec{N} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} (\text{Log } r)) dl.$$

(\*) E. DURAND, C. R. Acad. Sciences, t. 242, p. 78, 1956.

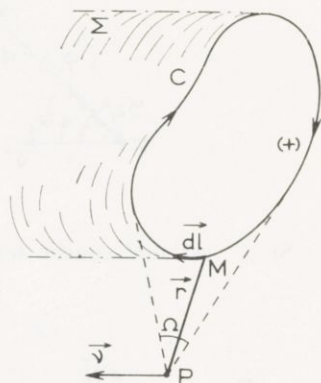


FIG. — I-20.



Un telle fonction des coordonnées du point  $P$  est discontinue à la traversée de la courbe  $C$ . D'après les formules (74), (75) du paragraphe précédent, on a

$$(96) \quad \varphi_{(+)} - \varphi_{(-)} = 2\pi$$

$$(97) \quad \varphi_c = \frac{1}{2} \{ \varphi_{(+)} + \varphi_{(-)} \} \quad (\text{pour un point régulier de la courbe } C).$$

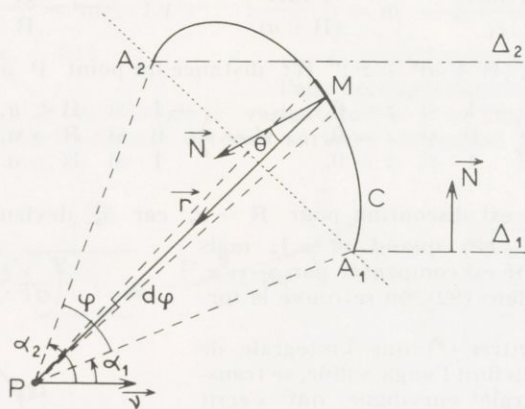


FIG. — I-22.

Si  $C$  est une courbe fermée (fig. I-23) et si la normale positive est la normale extérieure, on a :  $\varphi' = 0$  pour un point  $P'$  extérieur et  $\varphi'' = -2\pi$  pour un point  $P''$  intérieur. Sur la courbe  $C$  elle-même, en un point régulier on a  $\varphi_c = -\pi$ , et  $\varphi_c = -\beta$  pour un point anguleux où les deux tangentes font un angle  $\beta$ .

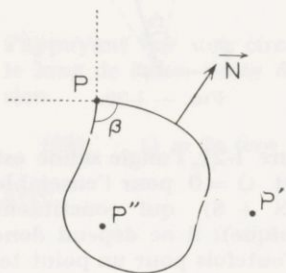


FIG. — I-23.

Sur la droite  $\Delta$  passant par les points  $A_1$  et  $A_2$  d'une courbe  $C$  limitée, on a  $\varphi = \pi$  ou zéro suivant que l'on est entre  $A_1A_2$  ou en dehors de cet intervalle. Aux points  $A_1, A_2$  la fonction  $\varphi$  est indéterminée, sa valeur dépendant de la manière dont on se dirige vers ces points.

La formule qui correspond à la formule (94) de l'angle solide, s'écrit

$$(98) \quad \varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} -\pi < \alpha_1 < \pi, \\ -\pi < \alpha_2 < \pi, \end{cases}$$

les angles  $\alpha$  étant comptés positivement ou négativement à partir d'une direction  $\vec{v}$  arbitraire. Avec cette formule, on remplace la courbe  $C$  par deux demi-droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  parallèles, issues des points  $A_1, A_2$  et s'éloignant à l'infini dans la direction  $\vec{v}$  (fig. I-22).

12. — *Propriétés de quelques laplaciens singuliers.* — a) **Expressions relatives au laplacien  $\Delta(1/r)$ .** — Nous avons vu que ce laplacien était partout nul sauf peut-être pour  $r = 0$  où son expression se présentait sous la forme  $0/0$ . Les formules qui suivent vont nous montrer que sa valeur au point  $O$  doit être considérée comme infinie, car son produit par un facteur nul peut avoir une valeur finie.

INTRODUCTION DE  $\Delta(1/r)$  DANS UNE INTÉGRALE DE VOLUME. — Si nous convenons d'appliquer au symbole  $\Delta(1/r)$  les règles habituelles de transformation des intégrales multiples, on peut écrire

$$(99) \quad \iiint_v \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \cdot dv = \iiint_v \operatorname{div}' \overrightarrow{\operatorname{grad}}' \left(\frac{1}{r}\right) \cdot dv \\ = \iint_s (\vec{n} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}') \left(\frac{1}{r}\right) \cdot ds = \Omega,$$

$\Omega$  étant l'angle solide sous lequel on voit, du point  $P(x, y, z)$ , la surface  $S$  qui limite le volume  $v$  (fig. I-24, a). Pour une surface fermée on a  $\Omega = -4\pi, -2\pi, 0$ , suivant que le point  $P$  est à l'intérieur de  $S$ , sur  $S$  ou à l'extérieur. L'expression (99) s'écrit alors

$$(100) \quad \iiint_v \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \cdot dv = -4\pi \begin{cases} 1, \\ 1/2, \\ 0. \end{cases}$$

Dans les autres cas où le volume  $v$  s'étend jusqu'à l'infini, il faut considérer les diverses valeurs de  $\Omega$  du paragraphe 10.

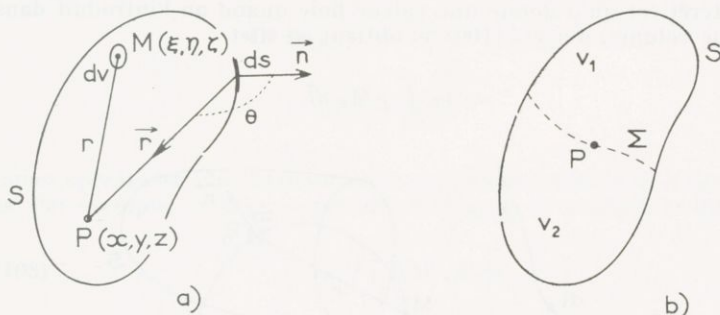


FIG. — I-24.

Le fait que l'intégrale de volume de  $\Delta(1/r)$  ait une valeur finie alors que  $\Delta(1/r)$  est partout nul sauf au point  $r = 0$ , nous conduit à admettre que ce symbole est infini au point  $r = 0$ . On peut en effet réduire le volume autour de ce point à une valeur aussi petite qu'on le veut de telle sorte que l'intégrale se présente sous la forme indéterminée  $(0 \times \infty)$  et  $\Omega$  en est la vraie grandeur.

Si  $f(\xi, \eta, \zeta)$  est une fonction continue, il est facile de voir que l'on a

$$(101) \quad \iiint_v f(\xi, \eta, \zeta) \cdot \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \cdot dv = \Omega \cdot f(x, y, z).$$

En effet  $\Delta(1/r)$  étant partout nul sauf pour  $r = 0$  c'est-à-dire  $(\xi, \eta, \zeta) = (x, y, z)$  on peut réduire le volume  $v$  à des dimensions aussi petites que l'on veut autour de  $r = 0$ ; on peut donc faire sortir  $f(M)$  de l'intégrale en lui donnant la valeur  $f(P)$  et (101) se réduit alors à (99).

Si la fonction  $f$  présente une surface de discontinuité  $\Sigma$  à l'intérieur du volume  $v$  comme dans la figure I-24, b, en un point régulier de  $\Sigma$ , on a

$$(102) \quad -2\pi (f_1 + f_2) \quad \text{au lieu de} \quad -4\pi f \quad \text{dans (101).}$$

Pour établir (102) à partir de (101) il suffit de décomposer le domaine  $v$  en deux domaines  $v_1$  et  $v_2$ ; pour chacun d'eux, le point  $P$  est sur la limite et (101) s'applique avec le facteur  $\Omega = -2\pi$ .

En prenant les dérivées partielles des deux membres de (101) et en admettant que l'on puisse dériver sous le signe somme, on obtient

$$(103) \quad \iiint_v f(\xi, \eta, \zeta) \cdot \partial_x^l \partial_y^m \partial_z^n \Delta \left( \frac{1}{r} \right) \cdot dv = \Omega \cdot \partial_x^l \partial_y^m \partial_z^n f(x, y, z),$$

En fait cette relation est une manière d'introduire efficacement dans les calculs le symbole  $\partial_x^l \partial_y^m \partial_z^n \Delta(r^{-1})$  qui est partout nul et qui a pour  $r = 0$  une valeur infinie, mais de nature encore plus complexe que  $\Delta(1/r)$ . L'intérêt des relations du type (103) c'est qu'en leur appliquant toutes les règles habituelles de l'analyse relatives aux fonctions classiques, on aboutit à des relations exactes. Par exemple on peut passer du premier membre de (103) au second membre en intégrant  $(l + m + n)$  fois par parties (\*).

INTRODUCTION DE  $\Delta(1/r)$  DANS UNE INTÉGRALE CURVILIGNE. — Le symbole

$$(104) \quad \int_C f(M) \cdot \Delta \left( \frac{1}{r} \right) \cdot d\vec{l}$$

est nul partout sauf sur la courbe  $C$ , où il prend une valeur infinie (fig. I-25, a).

Son intérêt est qu'il donne une valeur finie quand on l'introduit dans une intégrale de volume; d'après (100) on obtient en effet

$$(105) \quad -4\pi \int_C f(M) \cdot d\vec{l}.$$

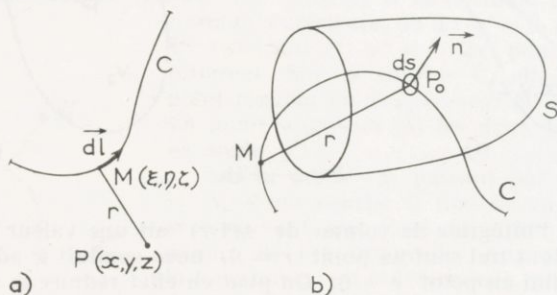


FIG. — I-25.

Nous utiliserons cette propriété dans la définition des densités volumiques correspondant à des densités linéaires du type habituel.

On obtient aussi une valeur finie en prenant le flux de (104) à travers une surface coupée par la courbe  $C$  (fig. I-25, b). Comme on a  $(\vec{n} \cdot d\vec{l}) \cdot ds = \pm dv$  avec un signe (+) si  $C$  coupe  $S$  du côté négatif vers le côté positif et un signe (—) dans le cas contraire, on peut écrire successivement

$$(106) \quad \iint_C \vec{n} \cdot ds \int_S f(M) \cdot \Delta \left( \frac{1}{r} \right) \cdot d\vec{l} = \iiint f(M) \cdot \Delta \left( \frac{1}{r} \right) \cdot dv = -4\pi \cdot f(P_0).$$

L'expression est infinie en tout point de  $C$ . Quand on prend son flux à travers  $S$  on peut se limiter à l'élément  $dS \rightarrow 0$  et l'on comprend que ceci puisse être fini puisque c'est de la forme  $(0 \times \infty)$ .

(\*) Voir au chapitre XII, la théorie des *distributions mathématiques*. On notera que l'on a ici  $\partial_x^l \partial_y^m \partial_z^n = (-1)^{l+m+n} \partial_x^l \partial_y^m \partial_z^n$ .



On pourrait aussi considérer des expressions analogues avec un symbole du type (104) mais où  $f(M)$  serait remplacée par un vecteur avec multiplication scalaire ou vectorielle par  $\vec{dl}$ .

INTRODUCTION DE  $\Delta(1/r)$  DANS UNE INTÉGRALE DE SURFACE. — L'expression symbolique

$$(107) \quad \iint_S f(M) \cdot \vec{n} \cdot \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \cdot ds,$$

qui est une fonction des coordonnées  $x, y, z$  du point  $P$ , est partout nulle, sauf quand le point est sur la surface  $S$ , auquel cas elle est infinie (fig. I-26, a).

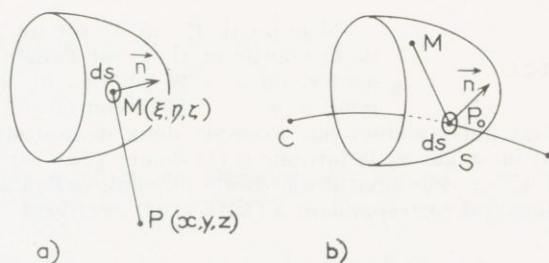


FIG. — I-26.

Certaines opérations effectuées sur cette expression conduisent à des grandeurs finies. Par exemple, on peut en prendre l'intégrale de volume, ce qui donne

$$(108) \quad -4\pi \iiint f(M) \cdot \vec{n} \cdot ds.$$

On peut aussi calculer sa circulation le long d'une courbe  $C$  qui coupe  $S$  (fig. I-26, b) ce qui donne

$$(109) \quad \int_C \vec{dl} \cdot \iint_S f(M) \cdot \vec{n} \cdot \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \cdot ds = -4\pi \left\{ \sum_{i=1}^m f(P_i) - \sum_{j=1}^n f(P_j) \right\},$$

si  $C$  coupe  $m$  fois  $S$  dans le sens  $(-, +)$  aux points  $P_i$  et  $n$  fois  $S$  dans le sens  $(+, -)$  aux points  $P_j$  (en particulier  $m = n = 0$  si  $C$  ne coupe pas  $S$ ). Quand  $f(M)$  est une constante on a simplement

$$(110) \quad \int_C \vec{dl} \cdot \iint_S \vec{n} \cdot \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \cdot ds = -4\pi(m - n).$$

L'expression (107) est infinie en tout point de  $S$ , mais la circulation qui s'effectue sur une longueur nulle se présente sous la forme  $(0 \times \infty)$  et a une vraie valeur finie.

On peut aussi utiliser des expressions symboliques analogues à (107) mais où  $f$  est remplacé par un vecteur avec multiplication scalaire ou vectorielle.

**b) Expressions relatives au laplacien  $\Delta(\text{Log } r)$ .** — Dans le plan, avec  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ , c'est le laplacien de  $(\text{Log } r)$  qui jouit de propriétés analogues à celles du laplacien de  $\Delta(1/r)$  dans l'espace. Il est en effet nul partout sauf pour  $r = 0$  où sa forme  $0/0$  a une vraie valeur infinie.

La formule correspondant à (99) s'écrit (fig. I-27)

$$(111) \quad \iint_S \Delta(\text{Log } r) \cdot ds = -\varphi$$

$\varphi$  étant l'angle sous lequel du point  $P$  on voit la courbe  $C$  qui limite  $S$ . Comme  $\varphi = -2\pi, -\pi, 0$ , suivant que le point  $P$  est à l'intérieur d'une courbe régulière fermée, sur cette courbe ou en dehors d'elle, on peut écrire

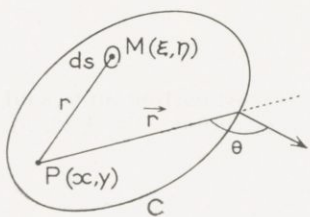


FIG. — I-27.

$$(112) \quad \iint_S \Delta(\text{Log } r) \cdot ds = 2\pi \begin{cases} 1, \\ 1/2, \\ 0. \end{cases}$$

Si le point  $P$  sur  $C$  est un point anguleux de la courbe et si  $\alpha$  est l'angle des deux tangentes, on a  $\alpha/2\pi$  au lieu de  $1/2$  qui correspond à  $\alpha = \pi$ . Si la courbe  $C$  a des points à l'infini, (112) n'est plus valable; par exemple deux demi-droites issues d'un point et formant un angle  $\alpha$ , la formule (111) donne  $(2\pi - \alpha)/2\pi$ ,  $(\pi - \alpha)/2\pi$ ,  $-\alpha/2\pi$ . Quand  $\alpha = \pi$  cela devient une droite indéfinie et l'on a  $1/2, 0, -1/2$ . Les expressions qui correspondent à (101), (103) s'écrivent

$$(113) \quad \iint_S f(\xi, \eta) \cdot \Delta(\text{Log } r) \cdot ds = -\varphi \cdot f(x, y)$$

et

$$(114) \quad \iint_S f(\xi, \eta) \cdot \partial_x^m \partial_y^n \Delta(\text{Log } r) \cdot ds = -\varphi \partial_x^m \partial_y^n f(x, y).$$

Si le point  $P$  intérieur se trouvait sur une ligne de discontinuité pour la fonction  $f$ , on aurait  $\pi(f_1 + f_2)$  au lieu de la valeur  $2\pi f$  donnée par (113). L'expression symbolique

$$(115) \quad \int_C f(M) \cdot \vec{N} \cdot \Delta(\text{Log } r) \cdot dl$$

où  $\vec{N}$  est le vecteur unitaire de la normale positive à la courbe  $C$  (fig. I-28, a), est une fonction de  $P(x, y)$  partout nulle, sauf sur la courbe  $C$  où elle est infinie.

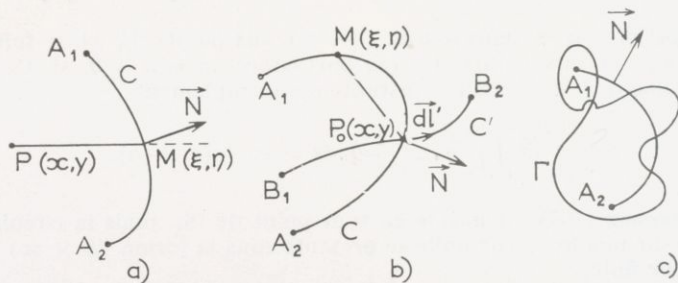


FIG. — I-28.

Quand on prend la circulation de (115) le long d'une courbe  $C'$  qui coupe  $C$  (fig. I-28, b) on obtient une valeur finie. Elle s'écrit

$$(116) \quad \int_{C'} \vec{dl}' \cdot \int_C f(M) \cdot \vec{N} \cdot \Delta(\text{Log } r) \cdot dl$$

et comme  $(\vec{dl}' \cdot \vec{N}) \cdot dl = \pm ds$  avec (+) ou (−) suivant que  $C'$  coupe  $C$  du sens négatif vers le sens positif ou inversement. On voit que cette expression (116) se ramène à (112) d'où

$$(117) \quad \int_{C'} \vec{dl}' \cdot \int_C f(M) \cdot \vec{N} \cdot \Delta(\text{Log } r) \cdot dl = 2\pi \left\{ \sum_{i=1}^m f(P_i) - \sum_{j=1}^n f(P_j) \right\},$$

si  $C'$  coupe  $C$ ,  $m$  fois de (−) vers (+) aux points  $P_i$  et  $n$  fois de (+) vers (−) aux points  $P_j$ .

Si  $f(M)$  est une constante, on a simplement

$$(118) \quad \int_C \vec{dl}' \cdot \int_C \vec{N} \cdot \Delta(\text{Log } r) \cdot dl = 2\pi(m - n).$$

Par exemple dans le cas de la figure I-28,  $c$  (\*) on a  $m = 3$ ,  $n = 1$ . Si le circuit  $\Gamma$  coupait la courbe aux points  $A_1$  et  $A_2$ ,  $m'$  fois dans un sens et  $n'$  fois dans l'autre, il faudrait ajouter à (118) le terme  $\pi(m' - n')$  sans facteur 2.

c) **Expressions relatives au laplacien de  $r = |x - \xi|$ .** — Pour une fonction d'une seule variable, le laplacien se réduit à la dérivée seconde  $\partial_x^2$  ou  $\partial_\xi^2$ . Dans ce cas c'est la fonction  $r = |x - \xi|$  dont le laplacien jouit de propriétés analogues à celles que nous avons rencontrées pour  $(1/r)$  et  $(\text{Log } r)$  avec trois et deux variables respectivement.

Comme  $r = (x - \xi)$  si  $x > \xi$  et  $r = (\xi - x)$  si  $x < \xi$ , on voit que l'on a partout  $\Delta r = 0$  sauf peut-être pour  $r = 0$  où la dérivée  $dr/d\xi$  présente une discontinuité (fig. I-29).

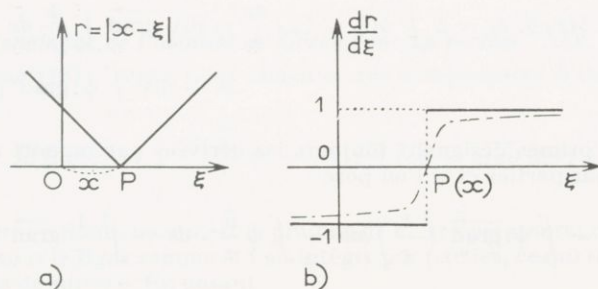


FIG. — I-29.

Si nous convenons d'appliquer au symbole  $\Delta r$  la règle d'intégration par parties on peut écrire successivement

$$(119) \quad \int_a^b \Delta r \cdot d\xi = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \cdot d\xi = \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)_{\xi=a}^{\xi=b} = 2 \begin{cases} 1, \\ 1/2, \\ 0, \end{cases}$$

avec 1, 1/2, 0 suivant que le point  $P$  de coordonnée  $x$  se trouve entre les points  $A$  et  $B$  de coordonnées  $a$  et  $b$ , sur l'un de ces deux points, ou en dehors de cet intervalle, soit respectivement

$$a < x < b, \quad \begin{cases} x = a, & x < a, \\ x = b, & x > b, \end{cases}$$

(\*) Le sens positif sur  $\Gamma$  a été oublié; le lecteur le rétablira.



Le facteur  $1/2$  dans (119) provient de la valeur nulle de la dérivée pour  $x = \xi$ . C'est une convention qui paraît naturelle quand on considère la marche d'escalier de la figure I-29,  $b$  comme la limite de la courbe en pointillés de la même figure.

De (119), on en déduit, comme dans les paragraphes précédents, que l'on a pour une fonction continue  $f(x)$  de l'intervalle  $(a, b)$

$$(120) \quad \int_a^b f(\xi) \cdot \Delta r \cdot d\xi = 2 \cdot f(x) \cdot \begin{cases} 1, \\ 0. \end{cases}$$

Si  $f(x)$  présente une discontinuité simple en un point  $P(x)$  intérieur à  $(a, b)$ , on a  $\{f_1(x) + f_2(x)\}$  au lieu de  $2 \cdot f(x)$

Enfin la relation qui correspond à (103), (114) s'écrit :

$$(121) \quad \int_a^b f(\xi) \cdot \delta_x^m \Delta r \cdot d\xi = 2 \cdot \delta_x^m f(x) \cdot \begin{cases} 1, \\ 0. \end{cases}$$

On notera que le laplacien de  $r$  qui est la dérivée de la courbe de la figure I-29,  $b$  peut être considéré comme infini au point  $\xi = x$ , comme on y est invité par un passage à la limite à partir de la courbe en pointillés. On peut aussi arriver au même résultat en notant que dans (119), l'intervalle d'intégration peut être réduit à  $d\xi \rightarrow 0$  et comme le produit  $\Delta r \cdot d\xi$  est fini, c'est que  $\Delta r$  est infini au point  $\xi = x$ ; on a alors une expression du type  $(\infty \times 0)$  qui peut avoir une vraie valeur finie.

13. — *L'identité de Green pour un scalaire*  $\psi(x, y, z)$ . — La relation (101) peut s'écrire

$$(122) \quad \Omega \cdot \psi(x, y, z) = \Delta \int_v \psi(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{dv}{r} = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \int_v \frac{\psi}{r} dv \\ = - \operatorname{div} \int_v \psi \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}' \left( \frac{1}{r} \right) \cdot dv,$$

les symboles primés désignant toujours les dérivées par rapport à  $\xi, \eta, \zeta$ . Si l'on intègre par parties et si l'on pose

$$(123) \quad \vec{\mathfrak{A}} = \int_v \psi \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}' \left( \frac{1}{r} \right) \cdot dv = \int_s \psi \frac{\vec{n}}{r} \cdot ds - \int \frac{1}{r} \overrightarrow{\operatorname{grad}}' \psi \cdot dv,$$

on a

$$(124) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{\mathfrak{A}} = - \Omega \cdot \psi, \\ \operatorname{rot} \vec{\mathfrak{A}} = 0. \end{cases}$$

(123) est donc une solution du système (124).

Si l'on fait rentrer le symbole  $\operatorname{div}$  sous les signes somme de  $\vec{\mathfrak{A}}$  et si on le transforme en  $-\operatorname{div}'$ , on peut intégrer par parties pour l'intégrale de volume et l'on obtient l'identité de Green

$$(125) \quad \Omega \cdot \psi(P) = \int_v \Delta \psi \cdot \frac{dv}{r} - \int_s \vec{n} \cdot \left\{ \left( \frac{1}{r} \right) \overrightarrow{\operatorname{grad}}' \psi - \psi \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}' \left( \frac{1}{r} \right) \right\} ds.$$

Si l'on a affaire à une surface  $S$  fermée et régulière et si l'on introduit le symbole  $d/dn = \vec{n} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}'$  de la dérivée normale, elle prend la forme classique

$$(126) \quad \frac{1}{2} \left\{ 4\pi \cdot \psi(P) = - \int_v \Delta \psi \cdot \frac{dv}{r} + \int_s \left\{ \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{r} \right) \right\} ds. \right.$$

Rappelons que 1, 1/2, 0 correspondent respectivement aux trois cas où le point P de coordonnées  $x, y, z$  est à l'intérieur de S, sur S, à l'extérieur de S.

Quand le volume  $v$  est tout l'espace et que les intégrales de surface s'anulent sur la sphère de rayon infini, il reste

$$(127) \quad 4\pi \cdot \psi(P) = - \iiint \Delta \psi \cdot \frac{dv}{r}.$$

Nous verrons que ce cas se présente pour le potentiel coulombien.

Dans le cas d'une fonction  $\psi(x, y)$  à deux variables, on obtient comme précédemment, mais à partir de (113), l'expression

$$(128) \quad \frac{1}{0} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \psi(P) = \int_S \Delta \psi \cdot \text{Log } r \cdot ds - \int_C \left\{ \text{Log } r \cdot \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d}{dn} (\text{Log } r) \right\} dl, \right.$$

C étant une courbe régulière fermée qui limite le domaine S du plan. Dans le cas général d'une courbe C ayant des points à l'infini avec des points anguleux, on aurait  $-\varphi \cdot \psi(P)$  au premier membre de (128).

Enfin pour une fonction  $\psi(x)$  d'une seule variable, en opérant comme pour les formules précédentes mais à partir de (120), on peut obtenir, avec  $\partial_{\xi} r = -\partial_x r$  et en intégrant par parties

$$(129) \quad \frac{1}{0} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \psi(x) = \int_a^b \partial_{\xi}^2 \psi \cdot r \cdot d\xi - \left\{ r \partial_{\xi} \psi - \psi \partial_{\xi} r \right\}_{\xi=a}^{\xi=b} \right.$$

14. — *L'analogue de l'identité de Green pour un vecteur*  $\vec{A}(x, y, z)$ . — On part encore de (101), écrite pour chacune des composantes d'un vecteur  $\vec{A}$ , soit

$$(130) \quad \Omega \cdot \vec{A}(x, y, z) = \Delta \int_v \frac{\vec{A}}{r} dv = - \left\{ \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} - \vec{\text{grad}} \text{div} \right\} \int_v \frac{\vec{A}}{r} dv.$$

On a deux termes dont chacun est le produit de deux opérateurs; on fait rentrer les premiers sous le signe somme et l'on intègre par parties, ce qui fait apparaître des intégrales de surface. En posant

$$(131) \quad \vec{\alpha} = - \vec{\text{rot}} \int_v \frac{\vec{A}}{r} dv = \int_v \vec{\text{rot}}' \frac{\vec{A}}{r} dv - \int_S [\vec{n} \times \vec{A}] \frac{ds}{r},$$

$$(132) \quad a = - \text{div} \int_v \frac{\vec{A}}{r} dv = \int_v \text{div}' \frac{\vec{A}}{r} dv - \int_S (\vec{n} \cdot \vec{A}) \frac{ds}{r},$$

l'équation (130) s'écrit alors

$$(133) \quad \begin{cases} \vec{\text{grad}} a - \vec{\text{rot}} \vec{\alpha} = - \Omega \vec{A}, \\ \text{div} \vec{\alpha} = 0. \end{cases}$$

Les expressions (131), (132) sont une solution particulière du système (133) d'équations aux dérivées partielles quand  $\Omega$  et  $\vec{A}$  sont donnés (se donner  $\Omega$  revient évidemment à se donner le volume  $v$ ).



En faisant, comme dans les paragraphes précédents, rentrer les opérateurs  $\vec{\text{rot}}$  et  $\vec{\text{grad}}$  respectivement dans les intégrales de  $\vec{\text{A}}$  et  $a$ , puis en les remplaçant par  $\vec{\text{rot}}'$ ,  $\vec{\text{grad}}'$ , et en intégrant par parties, on obtient la relation cherchée

$$(134) \quad \Omega \cdot \vec{\text{A}}(x, y, z) = \int_v \left\{ \left[ \vec{\text{rot}}' \vec{\text{A}} \times \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right] + \text{div}' \vec{\text{A}} \cdot \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right\} dv \\ - \int_s \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{\text{A}}) \cdot \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) + \left[ \vec{n} \times \vec{\text{A}} \right] \times \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right\} ds.$$

Le premier terme de l'intégrale de volume de (134) peut encore être transformé par

$$(135) \quad \vec{\text{rot}}' \left\{ \frac{\vec{\text{rot}}' \vec{\text{A}}}{r} \right\} = \frac{1}{r} \vec{\text{rot}}' \vec{\text{rot}}' \vec{\text{A}} - \left[ \vec{\text{rot}}' \vec{\text{A}} \times \vec{\text{grad}}' \left( \frac{1}{r} \right) \right],$$

en intégrant (135) et en transformant le premier membre en intégrale de surface, puis en portant dans (134), on obtient la nouvelle forme

$$(136) \quad \Omega \vec{\text{A}}(x, y, z) = \int_C \left\{ \frac{1}{r} \vec{\text{rot}}' \vec{\text{rot}}' \vec{\text{A}} + \text{div}' \vec{\text{A}} \cdot \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right\} dv \\ + \int_s \left\{ \left[ \vec{n} \times \vec{\text{rot}}' \vec{\text{A}} \right] \frac{1}{r} - (\vec{n} \cdot \vec{\text{A}}) \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right. \\ \left. - \left[ \vec{n} \times \vec{\text{A}} \right] \times \vec{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right\} ds.$$

L'équation (134) donne  $\vec{\text{A}}$  quand on connaît sa divergence et son rotationnel à l'intérieur de  $v$  (où  $\Omega = -4\pi$ ) et quand on connaît ses valeurs sur  $S$  qui limite  $v$ .

Quand  $S$  est rejeté à l'infini et que l'on a  $\vec{\text{A}} \rightarrow 0$  suffisamment vite pour que les intégrales de surface soient nulles, il ne reste dans (134) et (136) que les intégrales de volume. Nous verrons que c'est le cas pour les champs et les potentiels-vecteurs du type coulombien et ampérien que l'on rencontre dans l'étude des phénomènes permanents de l'électromagnétisme.

Pour un vecteur fonction de deux variables  $(x, y)$ , on peut obtenir à partir de (113) où  $f(\xi, \eta)$  est remplacé par  $\vec{\text{A}}(\xi, \eta)$ , une expression analogue à (134) soit

$$(137) \quad \varphi \cdot \vec{\text{A}}(x, y) = \int_s \left\{ \left[ \vec{\text{rot}}' \vec{\text{A}} \times \vec{\text{grad}} (\text{Log } r) \right] + \text{div}' \vec{\text{A}} \cdot \vec{\text{grad}} (\text{Log } r) \right\} ds \\ + \int_C \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{\text{A}}) \cdot \vec{\text{grad}} (\text{Log } r) + \left[ \vec{n} \times \vec{\text{A}} \right] \times \vec{\text{grad}} (\text{Log } r) \right\} dl.$$

où  $\varphi$  est l'angle sous lequel on voit la courbe  $C$ . Pour une courbe fermée, on a  $\varphi = -2\pi, -\pi, 0$  suivant que le point  $P$  de coordonnées  $(x, y)$  est à l'intérieur de  $C$ , sur  $C$ , à l'extérieur de  $C$ .

On peut aussi mettre (137) sous une forme analogue à (136) en faisant apparaître  $\vec{\text{rot}}' \vec{\text{rot}}' \vec{\text{A}}$ .

15. — *Identité relative à deux vecteurs  $\vec{\text{A}}(x, y, z)$  et  $\vec{\text{B}}(x, y, z)$ .* — Si  $\vec{\text{A}}$  et  $\vec{\text{B}}$  sont deux vecteurs quelconques, les composantes étant des fonctions



des coordonnées  $x, y, z$  à l'intérieur du volume  $v$  limité par une surface  $S$ , on a l'identité

$$\begin{aligned}
 & \int_v \{ \vec{A} \cdot \text{div } \vec{B} + \vec{B} \cdot \text{div } \vec{A} - [\vec{A} \times \text{rot } \vec{B}] - [\vec{B} \times \text{rot } \vec{A}] \} dv, \\
 (138) \quad & = \int_s \{ \vec{A} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{B}) - [\vec{A} \times [\vec{n} \times \vec{B}]] \} ds, \\
 & = \int_s \{ \vec{B} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{A}) - [\vec{B} \times [\vec{n} \times \vec{A}]] \} ds.
 \end{aligned}$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire de la normale extérieure à la surface  $S$ .

En développant le double produit vectoriel on vérifie aussitôt que les deux intégrales de surfaces sont identiques puisqu'elles donnent toutes les deux

$$(139) \quad \int_s \{ \vec{A} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{A}) - \vec{n} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) \} ds.$$

Pour démontrer (138) on peut partir de l'identité tensorielle évidente

$$\begin{aligned}
 (140) \quad & \partial_\nu \{ A^\mu B^\nu + A^\nu B^\mu \} - \delta^{\mu\nu} \cdot A_\omega B^{\omega\mu} \{ \\
 & = A^\mu \cdot \partial_\nu B^\nu + B^\nu \cdot \partial_\nu A^\mu - A_\nu [\partial^\nu B^\nu - \partial^\nu B^\mu] - B_\nu [\partial^\nu A^\nu - \partial^\nu A^\mu]
 \end{aligned}$$

En intégrant dans le volume  $v$ , le premier membre de (140) donne (139) et le dernier membre écrit sous la forme vectorielle ordinaire redonne bien le premier membre de (138).

16. — *Théorème relatif à l'intégrale de volume du produit scalaire de deux vecteurs.* — Soient  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  deux champs de vecteurs qui satisfont aux relations

$$(141) \quad \text{div } \vec{A} = 0, \quad \text{rot } \vec{B} = 0.$$

Nous supposons que  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont partout continus sauf sur certaines surfaces fermées en nombre fini. Sur ces dernières nous admettons que les composantes normales de  $\vec{A}$  et les composantes tangentielles de  $\vec{B}$  sont continues, soit

$$(142) \quad \vec{n} \cdot (\vec{A}_{(+)} - \vec{A}_{(-)}) = 0, \quad [\vec{n} \times (\vec{B}_{(+)} - \vec{B}_{(-)})] = 0$$

les signes (+) et (−) désignant les vecteurs de chaque côté de la surface et dans son voisinage immédiat. Par contre les composantes normales de  $\vec{B}$  et les composantes tangentielles de  $\vec{A}$  peuvent avoir des discontinuités quelconques à la traversée de la surface  $S$ .

Enfin imaginons une sphère de rayon  $r$  englobant toutes les surfaces (fig. I-30); nous admettons que  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  s'annulent à l'infini de telle sorte que

$$\begin{aligned}
 (143) \quad & \lim_{r \rightarrow \infty} (r\vec{A}) = 0, \\
 & \lim_{r \rightarrow \infty} (r\vec{B}) = 0.
 \end{aligned}$$

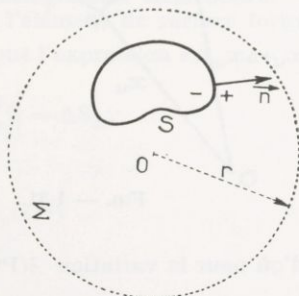


FIG. — I-30.

Dans ces conditions nous allons montrer que l'on a

$$(144) \quad \iiint (\vec{A} \cdot \vec{B}) dv = 0,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace.

Comme le rotationnel de  $\vec{B}$  est nul on peut poser  $\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}} b$ , la fonction  $b$  étant un scalaire. On a donc

$$(145) \quad (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} b = \text{div}(b\vec{A}) - b \text{div} \vec{A} = \text{div}(b\vec{A})$$

Désignons par  $v$  les volumes intérieurs aux surfaces  $S$  et par  $V$  le volume du reste de l'espace. On a

$$(146) \quad \iiint (\vec{A} \cdot \vec{B}) dv = \int_v \text{div}(b\vec{A}) dv + \int_V \text{div}(b\vec{A}) dv.$$

Les volumes  $v$  sont limités extérieurement par les surfaces  $S$ . On peut imaginer que  $V$  est limité extérieurement par la sphère  $\Sigma$  de rayon  $r$ , puis faire tendre  $r$  vers l'infini; de plus  $V$  est limité intérieurement par les surfaces  $S$ .

Les intégrales du second membre de (146) se transforment en intégrale de surface et quand  $r \rightarrow \infty$  l'intégrale étendue à  $\Sigma$  tend vers zéro en vertu des conditions (143). Il reste alors

$$(147) \quad \iiint (\vec{A} \cdot \vec{B}) dv = \int_s b \cdot (\vec{n} \cdot (\vec{A}_{(-)} - \vec{A}_{(+)}) ds = 0.$$

Le théorème est donc bien démontré.

Remarque : Le théorème peut être étendu au cas où  $(\vec{n} \cdot (\vec{A}_{(+)} - \vec{A}_{(-)}))$  n'est plus nul; (144) sera encore vérifiée en vertu de (147) si

$$(148) \quad \int_s b \cdot (\vec{n} \cdot (\vec{A}_{(-)} - \vec{A}_{(+)}) ds = 0.$$

17. — *Déplacement arbitraire des points d'un milieu continu.* — a) **Variation d'un vecteur joignant deux points du milieu.** — Soient  $\delta x_u$  les composantes du déplacement des points du milieu, qui sont des fonctions des  $x_u$ . Le point  $P$  de coordonnées  $x_u$  vient en  $P'$

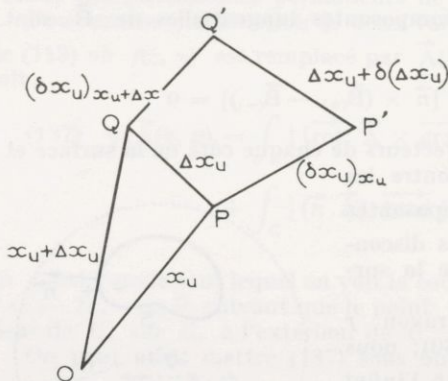


FIG. — I-31.

et les composantes de  $\vec{PP}'$  sont  $(\delta x_u)_{x_u}$ . Le point  $Q$  de coordonnées  $x_u + \Delta x_u$  vient en  $Q'$  et les composantes de  $\vec{QQ}'$  sont  $(\delta x_u)_{x_u + \Delta x_u}$ . Les déplacements étant arbitraires, le vecteur  $\vec{QQ}'$  est différent de  $\vec{PP}'$ . Le vecteur  $\vec{PQ}$  joignant les deux points  $P$  et  $Q$  du milieu devient le vecteur  $\vec{P'Q'}$  après le déplacement des points. On a (fig. I-31)

$$(149) \quad \vec{PQ} + \vec{QQ}' = \vec{PP}' + \vec{P'Q'}$$

d'où pour la variation  $\delta(\vec{PQ}) = (\vec{P'Q'} - \vec{PQ})$  du vecteur  $\vec{PQ}$

$$(150) \quad \delta(\vec{PQ}) = \vec{QQ}' - \vec{PP}'$$

ce qui s'écrit encore sous forme explicite

$$(151) \quad \delta(\Delta x_u) = (\delta x_u)_{x_u + \Delta x_u} - (\delta x_u)_{x_u}.$$

En développant en série de Taylor la fonction  $\delta x_u$  des coordonnées  $x_u$  et en se limitant aux termes du premier ordre, le second membre de (151) peut se mettre sous la forme

$$(152) \quad \delta(\Delta x_u) = \Delta x_v \partial_v (\delta x_u) = \Delta (\delta x_u)$$

C'est la relation cherchée.

Noter que  $\Delta(\delta x_u)$  est la différentielle totale de la fonction  $\delta x_u$  et que  $\Delta x_u$  peut s'écrire  $\Delta x^v \partial_v x_u$  de telle sorte que le symbole  $\Delta$  a la même signification dans les deux membres de (152). En d'autres termes la relation (152) exprime que les symboles  $\Delta$  et  $\delta$  commutent entre eux.

**b) Variation du volume d'un parallélépipède élémentaire.** — Considérons le parallélépipède élémentaire formé par les trois vecteurs  $\Delta_1 \vec{r}$ ,  $\Delta_2 \vec{r}$ ,  $\Delta_3 \vec{r}$  issus d'un même point P. Son volume est

$$(153) \quad \Delta v = ([\Delta_1 \vec{r} \times \Delta_2 \vec{r}] \cdot \Delta_3 \vec{r}) = \begin{vmatrix} \Delta_1 x_u & \Delta_1 x_v & \Delta_1 x_w \\ \Delta_2 x_u & \Delta_2 x_v & \Delta_2 x_w \\ \Delta_3 x_u & \Delta_3 x_v & \Delta_3 x_w \end{vmatrix} = \Delta v^{[uvw]}.$$

C'est en fait un tenseur complètement antisymétrique et de rang trois. Calculons la variation  $\delta(\Delta v)$  de ce volume dans un déplacement arbitraire  $\delta x_u$  des points du milieu, les extrémités des vecteurs  $\Delta \vec{r}$  joignant deux points de ce milieu. En variant successivement chacune des colonnes du déterminant (153) et en utilisant la formule (152) nous obtenons les trois déterminants

$$(154) \quad \delta(\Delta v) = \partial_i (\delta x_u) \Delta v^{[iuv]} + \partial_j (\delta x_v) \Delta v^{[ujw]} + \partial_k (\delta x_w) \Delta v^{[uvw]}$$

Mais, à cause de l'antisymétrie du tenseur  $\Delta v^{[uvw]}$ , les sommes sur les indices muets  $i, j, k = 1, 2, 3$  n'ont en fait qu'un seul terme au lieu de trois, celui pour lequel  $i \neq v, w; j \neq u, w; k \neq u, v$ , c'est-à-dire  $i = u, j = v, k = w$ . L'expression (154) s'écrit donc

$$(155) \quad \delta(\Delta v) = (\Delta v) \cdot \partial_u (\delta x^u)$$

ou

$$(156) \quad \frac{\delta(\Delta v)}{\Delta v} = \text{div} (\vec{\delta \lambda}).$$

**c) Variation de l'élément de surface d'un parallélogramme élémentaire.** — On calcule comme précédemment la variation de l'élément de surface formé par deux vecteurs élémentaires  $\Delta_1 \vec{r}$  et  $\Delta_2 \vec{r}$  et dont l'expression est

$$(157) \quad \Delta S_w = [\Delta_1 \vec{r} \times \Delta_2 \vec{r}]_w = \begin{vmatrix} \Delta_1 x_u & \Delta_1 x_v \\ \Delta_2 x_u & \Delta_2 x_v \end{vmatrix} = \Delta S_{uv}.$$

On trouve

$$(158) \quad \delta(\Delta S_w) = \Delta S_w \partial_u (\delta x^u) - \Delta S_u \partial_w (\delta x^u)$$

ou vectoriellement

$$(159) \quad \delta(\Delta \vec{S}) = \vec{\Delta S} \cdot \text{div} (\vec{\delta \lambda}) - [\vec{\Delta S} \times \text{rot} (\vec{\delta \lambda})] - (\vec{\Delta S} \cdot \text{grad}) (\vec{\delta \lambda})$$



18. — *Variation des densités volumiques dans le déplacement des points d'un milieu.* — a) **Densité scalaire.** — On peut imaginer que ces points sont les atomes ou les molécules qui constituent le milieu matériel. Quand il y en a un très grand nombre dans un élément de volume, on peut traiter le milieu comme s'il était continu. Nous allons raisonner sur la densité moyenne de charge électrique  $\rho(x, y, z)$ , mais les résultats sont évidemment valables pour une densité scalaire quelconque.

La variation  $\delta\rho$  est la somme de deux termes  $\delta\rho_{(1)}$  et  $\delta\rho_{(2)}$  associés respectivement au déplacement d'ensemble des points d'un élément de volume et à la variation du volume occupé par un groupe d'atomes déterminés. Pour le premier terme la formule de Taylor donne

$$\rho = \rho_0 + \delta x_u \cdot \partial^u \rho$$

d'où

$$(160)$$

$$\delta\rho_{(1)} = \rho_0 - \rho = -(\vec{\delta\lambda} \cdot \vec{\text{grad}} \rho)$$

la variation  $\delta\rho_{(1)}$  est en effet égale à  $(\rho_0 - \rho)$  et non à  $(\rho - \rho_0)$  car on utilise ici des axes (\*) fixes (non liés aux points matériels) et  $\delta\rho_{(1)}$  est la varia-

tion de  $\rho$  dans cet élément de volume fixe placé en M (fig. I-32).

Pour déterminer le deuxième terme  $\delta\rho_{(2)}$  il faut se rappeler que  $\rho$  est une densité volumique telle que  $\rho dv = dq$ ; en considérant maintenant le volume occupé par un nombre de charges bien déterminé on a  $\delta(dq) = 0$ , d'où

$$(161) \quad \delta\rho_{(2)} = -\rho \frac{\delta(dv)}{dv} = -\rho \text{div}(\vec{\delta\lambda})$$

en vertu de la formule (156).

Pour la variation totale on a donc

$$\delta\rho = \delta\rho_{(1)} + \delta\rho_{(2)} = -\{\vec{\delta\lambda} \cdot \vec{\text{grad}} \rho + \rho \text{div}(\vec{\delta\lambda})\}$$

soit

$$(162) \quad \delta\rho = -\text{div}(\rho \cdot \vec{\delta\lambda}).$$

Nous utiliserons cette formule dans le calcul de l'énergie électrostatique.

b) **Densité de courant.** — Considérons une densité de courant permanent

$$(163) \quad \vec{J}(x, y, z) = \rho \vec{v}.$$

Sa variation dans les mêmes conditions que précédemment s'écrit

$$(164) \quad \delta J_u = v_u \cdot \delta\rho + \rho \cdot \delta v_u.$$

Il suffit de calculer la variation  $\delta v_u$ . Elle a deux causes; une première tient à la nature du vecteur vitesse d'une particule puisque  $v_u = \Delta x_u / \Delta t$ . Si on laisse  $\Delta t$  inchangé, on a d'après (152)

$$(165) \quad (\delta v_u)_{(1)} = \frac{\Delta x_u}{\Delta t} \cdot \partial^v (\delta x_u) = v_u \partial^v (\delta x_u).$$

(\*) Chaque fois qu'il y a déformation nous ne pouvons utiliser des axes liés à la matière, car nos formules sont écrites en coordonnées cartésiennes.

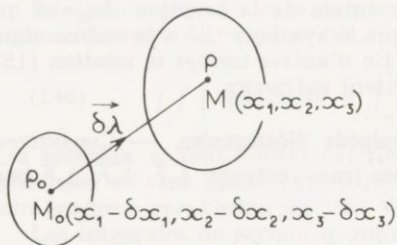


FIG. — I-32.

La deuxième cause de variation est due au fait que  $\vec{v}(x, y, z)$  est une fonction des coordonnées; comme précédemment pour  $\delta\rho$ , on a

$$(166) \quad (\delta v_u)_{(2)} = -\delta x_v \partial^v v_u.$$

Pour la variation totale on a donc

$$(167) \quad \delta v_u = (\delta v_u)_{(1)} + (\delta v_u)_{(2)} = v_v \partial^v (\delta x_u) - \delta x_v \partial^v v_u.$$

En portant (167) et (162) dans (164), on obtient

$$(168) \quad \delta J^u = -v^u \partial_v (\rho \delta x^v) + \rho v_v \partial^v (\delta x^u) - \rho (\delta x_v) \partial^v v^u.$$

Si le courant est conservatif, on a  $\partial_v (\rho v^v) = 0$  et en ajoutant à (168) le terme nul  $\delta x^u \partial_v (\rho v^v)$  on obtient

$$(169) \quad \delta J^u = -\partial_v [\rho v^u \cdot \delta x^v - \rho v^v \cdot \delta x^u] = -\partial_v [J^u \cdot \delta x^v - J^v \cdot \delta x^u]$$

ou encore sous forme vectorielle

$$(170) \quad \delta \vec{J} = \text{rot} [\delta \vec{\lambda} \times \vec{J}].$$

### 19. — Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées quelconques.

— Les coordonnées cartésiennes d'un point sont reliées aux nouvelles coordonnées par des relations du type

$$(171) \quad x^u = x^u(q^1, q^2, q^3), \quad u = 1, 2, 3;$$

ou inversement

$$(172) \quad q^i = q^i(x^1, x^2, x^3), \quad i = 1, 2, 3,$$

de telle sorte qu'une correspondance biunivoque soit établie entre les deux systèmes. Jusqu'à nouvel ordre nous ne considérerons que les composantes contrevariantes avec un indice placé en haut. En principe nous utilisons le jeu des indices  $u, v, w$ , pour les coordonnées cartésiennes et le jeu des indices  $i, j, k$ , pour les coordonnées quelconques; éventuellement on est aussi amené à considérer d'autres jeux comme  $l, m, n$ , etc...

En différentiant (171) et (172), on déduit les relations entre les  $dx^w$  et les  $dq^i$ , ou leurs inverses

$$(173) \quad dx^w = \partial_i x^w \cdot dq^i, \quad dq^i = \partial_w q^i \cdot dx^w.$$

On écrit simplement  $\partial_i$  pour  $\partial/\partial q^i$  et  $\partial_w$  pour  $\partial/\partial x^w$ ; il y a une somme sur les indices muets  $i$  et  $w$  dans (173).

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$(174) \quad \alpha_i^w = \partial_i x^w, \quad \beta_w^i = \partial_w q^i$$

ce qui permet d'écrire (173) sous la forme

$$(175) \quad dx^w = \alpha_i^w dq^i, \quad dq^i = \beta_w^i dx^w.$$

Comme la deuxième de ces équations s'obtient en inversant la première, de (30) on déduit

$$(176) \quad \begin{aligned} \alpha_w^k &= \Delta^{-1} \alpha_w^k \\ &= \Delta^{-1} [\alpha_i^u \alpha_j^v - \alpha_i^v \alpha_j^u] \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta = \det |\alpha_i^u|, \\ \alpha_w^k: \text{mineur de } \alpha_w^k. \end{cases}$$



Ce déterminant  $\Delta$  est appelé le déterminant fonctionnel de la transformation.

Inversement en notant que la première équation (175) s'obtient en inversant la deuxième, on peut écrire

$$(177) \quad \alpha_i^w = (\Delta')^{-1} \beta_i^w \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta' = \det |\beta_{iw}^i| \\ \beta_i^w : \text{mineur de } \beta_{iw}^i. \end{array} \right.$$

On sait que l'on a

$$(178) \quad \Delta' = \Delta^{-1}.$$

Ces mineurs  $\alpha_{iw}^i$  et  $\beta_i^w$  obéissent à des identités remarquables qui s'écrivent

$$(179) \quad \partial_i \alpha_{iw}^i = 0, \quad \partial_w \beta_i^w = 0.$$

Vérifions par exemple la première de ces équations (179). On part pour cela de l'expression du déterminant  $\Delta$  par développement sur la ligne  $i$ , soit

$$\alpha_{iu}^i \alpha_j^u = \delta_j^i \Delta.$$

Dérivons les deux membres par rapport à  $q^i$ , soit

$$\alpha_j^u \partial_i \alpha_{iu}^i + \alpha_{iu}^i \partial_i \alpha_j^u = \delta_j^i \partial_i \Delta.$$

Mais on a  $\partial_i \alpha_j^u = \partial_j \alpha_i^u$  et  $\alpha_{iu}^i \partial_j \alpha_i^u$  est la dérivée  $\partial_j \Delta$  du déterminant  $\Delta$ ; il reste donc

$$\alpha_j^u \partial_i \alpha_{iu}^i = 0$$

multiplions par  $\beta_{iw}^j$  ce qui donne  $\delta_w^u \partial_i \alpha_{iw}^i = 0$ , ou en définitive la première équation (179); le raisonnement serait le même pour la deuxième équation (179).

Les identités (179) s'écrivent encore

$$(180) \quad \partial_i (\beta_{iw}^i \Delta) = 0, \quad \partial_w (\alpha_i^w \Delta^{-1}) = 0$$

On peut passer de la première équation (175) à la deuxième en multipliant par  $\beta_{iw}^i$ ; ou inversement de la deuxième à la première en multipliant par  $\alpha_i^w$ ; d'où les relations

$$(181) \quad \alpha_i^w \beta_{iw}^j = \delta_i^j, \quad \beta_{iu}^i \alpha_i^u = \delta_u^i$$

Sous forme matricielle (\*), ces deux dernières relations s'écrivent simplement

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1.$$

ce qui veut dire que les deux matrices  $\alpha$  et  $\beta$  sont inverses l'une de l'autre. On notera que l'on a entre les opérateurs  $\partial_i$  appliqués à des fonctions de  $q^i$  et les opérateurs  $\partial_w$  appliqués aux fonctions correspondantes des  $x^w$ , les équivalences

$$(182) \quad \partial_w = \beta_{iw}^i \partial_i, \quad \partial_i = \alpha_i^w \partial_w$$

20. — *Définitions et propriétés relatives au tenseur métrique.* — Le carré de la longueur du vecteur élémentaire dont les composantes sur les axes cartésiens sont  $dx^w$  a pour expression

$$(183) \quad dl^2 = \delta_{uv} dx^u dx^v.$$

(\*) En fait dans  $\alpha_i^w$  et  $\beta_{iw}^i$  l'indice inférieur correspond aux colonnes et ces relations s'écrivent d'abord  $\beta_i \alpha_i = 1$  et  $\alpha_i \beta_i = 1$  puis  $(\alpha \beta)_i = 1$  et  $(\beta \alpha)_i = 1$ .



En utilisant les formules (175) de transformation, on obtient l'expression de  $dl^2$  en fonction des  $dq^i$ , soit

$$(184) \quad dl^2 = g_{ij} dq^i dq^j$$

en posant

$$(185) \quad g_{ij} = \alpha_i^u \alpha_j^v \hat{\delta}_{uv}.$$

On notera la symétrie des grandeurs  $g_{ij}$  sur les deux indices  $i$  et  $j$ .

En comparant (183) et (184), on peut dire qu'avec les axes cartésiens, on avait

$$(186) \quad g_{uv} = \hat{\delta}_{uv}.$$

La formule (185) montre alors que  $g_{uv}$  se transforme comme un tenseur symétrique covariant (voir formule 216). Ces tenseurs  $g_{uv}$  ou  $g_{ij}$  sont appelés les tenseurs métriques.

Si on désigne par  $g$  le déterminant des  $g_{ij}$ , il est facile de voir que l'on a

$$(187) \quad g = \Delta^2 \quad \text{ou} \quad \Delta = \pm \sqrt{g}.$$

En effet le second membre de (185) qui s'écrit aussi  $\sum_u \alpha_i^u \alpha_j^u$  montre que le déterminant des  $g_{ij}$  s'obtient par la multiplication du déterminant  $\alpha_i^u$  par lui-même. Le déterminant  $g$  est donc toujours positif; il n'en est pas de même de  $\Delta$  qui est positif ou négatif suivant que les arêtes coordonnées  $(u, v, w)$  et  $(i, j, k)$  forment des trièdres de même sens ou de sens contraires.

Pour simplifier l'écriture de (184) on définit les composantes covariantes  $dq_i$  avec l'indice  $i$  en bas, par les relations

$$(188) \quad dq_i = g_{ij} dq^j \quad \text{et} \quad dx_u = \hat{\delta}_{uv} dx^v.$$

Les composantes covariantes et contrevariantes sont donc les mêmes en axes cartésiens mais elles sont différentes en axes quelconques. Avec ces définitions on peut écrire simplement

$$(189) \quad dl^2 = dx_w dx^w = dq_i dq^i.$$

Enfin pour inverser la correspondance (188) entre les  $dq_i$  et les  $dq^i$ , on définit le tenseur métrique deux fois contrevariant  $g^{ij}$ , avec les deux indices en haut, en posant

$$(190) \quad g^{ij} = g^{-1} G^{ij} \quad \text{avec} \quad G^{ij} = \text{mineur de } g_{ij}.$$

D'après cette définition (190) et la règle de développement d'un déterminant, on a

$$(191) \quad g^{jk} g_{ik} = \delta_i^j.$$

On peut donc inverser la correspondance (188) sous la forme

$$(192) \quad dq^i = g^{ij} dq_j.$$

En définitive on voit que les  $g_{ij}$  ou les  $g^{ij}$  servent respectivement à faire descendre ou monter les indices des différentielles de coordonnées; c'est pourquoi le premier membre de (191) peut encore s'appeler  $g_i^j$  et correspond aux composantes mixtes du tenseur métrique; (191) s'écrit donc aussi

$$(193) \quad g_i^j = \delta_i^j \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

On vérifie sans difficulté que les  $g^{ij}$  s'expriment en fonction des  $\beta_{uv}^i$  par une expression tout à fait analogue à (185), soit

$$(194) \quad g^{ij} = \beta_{uv}^i \beta_{uv}^j \delta^{uv}.$$

Cette formule fait nettement apparaître la symétrie des grandeurs  $g^{ij}$  sur leurs deux indices  $i$  et  $j$ .

On peut dire qu'avec les coordonnées cartésiennes on a  $g^{uv} = \delta^{uv}$  et (194) est alors la formule classique de transformation d'un tenseur deux fois contrevariant.

21. — *Les composantes d'un vecteur  $\vec{A}$  en coordonnées quelconques.* — a) **Composantes contrevariantes et covariantes.** — Si  $A^w$  sont les composantes du vecteur  $\vec{A}$  sur les axes cartésiens, on appelle composantes contrevariantes de ce même vecteur, les trois grandeurs  $a^i$  reliées aux  $A^w$  de la même manière que les  $dq^i$  étaient reliés aux  $dx^w$ , soit

$$(195) \quad A^w = \alpha_t^w a^i \quad \text{ou} \quad a^i = \beta_w^i A^w.$$

De ces expressions (195), on déduit l'expression du carré de la longueur du vecteur qui en axes cartésiens est  $\delta_{uv} A^u A^v$ , soit

$$(196) \quad (\vec{A})^2 = \delta_{uv} A^u A^v = g_{ij} a^i a^j.$$

Les composantes covariantes  $a_i$  sont toujours définies par des expressions analogues à (188), soit

$$(197) \quad a_i = g_{ij} a^j.$$

Cette correspondance (197) entre les  $a^j$  et les  $a_i$  s'inverse toujours sous la forme analogue à (192) où interviennent les  $g^{ij}$  contrevariants

$$(198) \quad a^i = g^{ij} a_j.$$

En multipliant (195) par  $g_{ij}$ , on vérifiera que les composantes covariantes  $a_i$  sont reliées aux composantes cartésiennes  $A_w$  par les expressions

$$(199) \quad A_w = \beta_w^i a_i \quad \text{ou inversement} \quad a_i = \alpha_i^w A_w.$$

En axes cartésiens, les  $g_{uv}$  étant égaux aux symboles de Kronecker, on a  $A_w = A^w$  d'après la relation générale (197) entre les composantes contrevariantes et les composantes covariantes.

Avec les composantes covariantes, le carré de la longueur du vecteur  $\vec{A}$ , en dehors des expressions (196), peut encore s'écrire

$$(200) \quad (\vec{A})^2 = a_i a^i = g^{ij} a_i a_j.$$

b) **Composantes en vraie grandeur sur les arêtes d'intersection ou sur les normales aux trois surfaces coordonnées.** — Si l'on fait  $q^1 = C^{\text{te}}$  dans les équations (171), on a l'équation paramétrique d'une surface. On obtient deux autres surfaces en faisant soit  $q^2 = C^{\text{te}}$  soit  $q^3 = C^{\text{te}}$ .

En un point P de coordonnées  $x^u$  passent trois surfaces coordonnées du type précédent (fig. I-33). Elles se coupent deux à deux suivant 3 arêtes, qui en général ne forment pas un trièdre trirectangle.

Cherchons les cosinus directeurs des tangentes à ces trois arêtes, par rapport au trièdre cartésien  $Ox_1, x_2, x_3$ .

D'après (175) le vecteur élémentaire tangent à l'arête  $(q^2, q^3)$  a pour composantes

$$(201) \quad dx^w = \alpha_1^w dq^1 \quad \text{puisque} \quad dq^2 = dq^3 = 0$$

ses cosinus directeurs  $\lambda_1^w$  sont donc  $dx^w / \sqrt{\delta_{uv} dx^u dx^v}$ , soit

$$\lambda_1^w = \frac{\alpha_1^w}{\sqrt{\delta_{uv} \alpha_1^u \alpha_1^v}} = \frac{\alpha_1^w}{\sqrt{g_{11}}}.$$

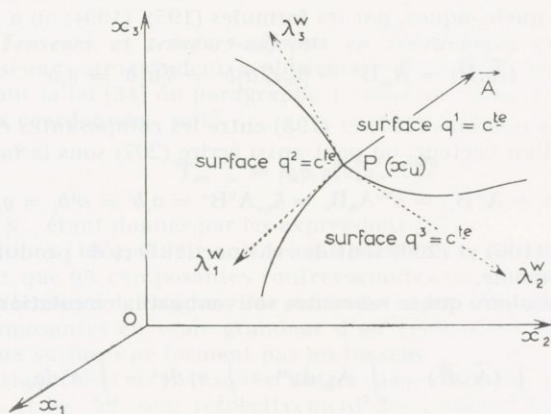


FIG. — I-33.

Pour les autres arêtes, on a des formules analogues, d'où les expressions cherchées

$$(202) \quad \lambda_i^w = \frac{\alpha_i^w}{\sqrt{g_{ii}}}.$$

Déterminons maintenant les trois cosinus directeurs des trois directions normales respectivement aux trois surfaces  $q^i = C^{te}$ . Comme  $\alpha_i^u$  est un vecteur porté par l'arête sur laquelle  $i$  varie, le produit vectoriel  $[\alpha_i^u \alpha_j^v - \alpha_i^v \alpha_j^u]$  est un vecteur normal à la surface  $q^k = C^{te}$ . D'après (176) il en est de même de  $\beta_{iw}^k$ . On a donc pour les cosinus directeurs cherchés  $\pi_{iw}^k$ :

$$(203) \quad \pi_{iw}^k = \frac{\beta_{iw}^k}{\sqrt{\delta^{uv} \beta_{u|v}^k \beta_{v|u}^k}} = \frac{\beta_{iw}^k}{\sqrt{g^{kk}}}.$$

Dans ces conditions, considérons un vecteur  $\vec{A}$  issu d'un point P (fig. I-33). Désignons par  $A_w$  ou  $A^w$  ses composantes sur les axes cartésiens; par  $A^i$  avec un indice en haut ses composantes en vraie grandeur sur les trois arêtes et par  $A_i$  avec un indice en bas, ses composantes suivant les trois normales aux surfaces  $q^k = C^{te}$ . On a évidemment

$$(204) \quad A^w = A^i \lambda_i^w = \frac{A^i \alpha_i^w}{\sqrt{g_{ii}}},$$

$$(205) \quad A_w = A_i \pi_{iw}^i = \frac{A_i \beta_{iw}^i}{\sqrt{g^{ii}}}.$$

En comparant ces expressions (204), (205) ou leurs inverses aux formules (195), (199), on en déduit que les composantes en vraie grandeur  $A^i$



sur les arêtes et  $A_i$  sur les normales aux surfaces, sont reliées respectivement aux composantes contrevariantes et covariantes par les expressions

$$(206) \quad A^i = \sqrt{g_{ii}} a^i, \quad A_i = \sqrt{g^{ii}} a_i \quad (\text{sans somme sur l'indice } i)$$

**22. — Produits de vecteurs en coordonnées quelconques. — Produit scalaire de deux vecteurs.** — Partons de l'expression  $A_w B^w$  du produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , en coordonnées cartésiennes et introduisons les composantes covariantes  $a_i$  ou contrevariantes  $b^i$  de ces mêmes vecteurs en coordonnées quelconques, par les formules (195), (199); on a alors

$$(207) \quad (\vec{A} \cdot \vec{B}) = A_w B^w = \beta_{uv}^j \alpha_i^u a_j b^i = \delta_{ij}^j a_j b^i = a_i b^i$$

En vertu des relations (197) et (198) entre les composantes contrevariantes et covariantes d'un vecteur, on peut aussi écrire (207) sous la forme

$$(208) \quad A_w B^w = A^w B_w = \delta^{uv} A_u B_v = \delta_{uv} A^u B^v = a_i b^i = a^i b_i = g_{ij} a^i b^j = g^{ij} a_i b_j.$$

Les expressions (196) et (200) sont des cas particuliers de produit scalaire d'un vecteur par lui-même.

Un produit scalaire qui se rencontre souvent est la circulation d'un vecteur; on a

$$(209) \quad \int_c (\vec{A} \cdot d\vec{l}) = \int_c A_w dx^w = \int_c a_i dq^i = \int_c a^i dq_i.$$

Le cosinus de l'angle  $\theta_{ij}$  que forment les deux arêtes le long desquelles  $i$  et  $j$  varient respectivement est le produit scalaire des deux vecteurs  $\lambda_i^u$  et  $\lambda_j^v$  soit

$$(210) \quad \cos \theta_{ij} = \delta_{uv} \lambda_i^u \lambda_j^v = \frac{\delta_{uv} \alpha_i^u \alpha_j^v}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}}.$$

Les systèmes de coordonnées orthogonales sont donc caractérisés par

$$(211) \quad g_{ij} = 0 \quad \text{quand} \quad i \neq j.$$

**b) Produit mixte de trois vecteurs.** — Le cas le plus intéressant est le produit mixte de trois vecteurs élémentaires dont les composantes sur les axes cartésiens s'écrivent  $dx_{(1)}^u, dx_{(2)}^u, dx_{(3)}^u$ . Il définit le volume du parallélépipède élémentaire formé sur ces trois vecteurs, soit

$$(212) \quad dv = \begin{vmatrix} dx_{(1)}^1 & dx_{(1)}^2 & dx_{(1)}^3 \\ dx_{(2)}^1 & dx_{(2)}^2 & dx_{(2)}^3 \\ dx_{(3)}^1 & dx_{(3)}^2 & dx_{(3)}^3 \end{vmatrix} = |dx_{(j)}^u|.$$

D'après (175), avec les coordonnées  $q^i$ , cette expression prend la forme

$$(213) \quad dv = |dx_{(j)}^u| = |\alpha_i^u \cdot dq_{(j)}^i| = |\alpha_i^u| |dq_{(j)}^i| = \Delta \cdot |dq_{(j)}^i|.$$

En fait on prend les valeurs absolues des deux déterminants pour avoir un élément de volume toujours positif (d'une manière plus précise on considère l'invariant adjoint à ce tenseur antisymétrique du troisième ordre; voir plus loin la formule (228).

Dans le système des coordonnées  $q^i$ , on choisit un parallélépipède élémentaire dont les côtés sont les arêtes coordonnées; le déterminant  $dq_{(j)}^i$  se

réduit donc à sa diagonale principale et (213) s'écrit

$$(214) \quad dv = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3,$$

car on peut supprimer l'indice inférieur des  $dq_{(j)}^i$  qui est maintenant inutile.

Dans le système des coordonnées  $x^w$ , on choisit un parallélépipède élémentaire dont les côtés sont parallèles aux axes, d'où

$$(215) \quad dv = dx^1 dx^2 dx^3, \quad \text{puisque } g = 1.$$

23. — *Tenseurs et tenseurs-adjoints en coordonnées quelconques.* — On appelle tenseur toute grandeur à plusieurs indices (haut et bas) qui se transforme suivant la loi (34) du paragraphe 4, dans un changement quelconque du système des coordonnées, soit

$$(216) \quad \bar{T}_{uv\dots w}^{..ij..} = \beta_k^i \rho_l^j \alpha_u^p \alpha_v^q \alpha_w^r T_{pq\dots r}^{..kl..}$$

les  $\alpha_i^w$  ou  $\beta_w^i$  étant donnés par les expressions (174).

Les relations (195), (199) sont des cas particuliers de cette expression (216) et montrent que les composantes contrevariantes ou covariantes d'un vecteur forment des tenseurs de rang un. Par contre les expressions (204), (205) montrent que les composantes en vraie grandeur d'un vecteur sur les arêtes ou sur les normales aux surfaces ne forment pas un tenseur.

Les relations (185) et (194) sont d'autres cas particuliers de (216) et montrent que les  $g_{ij}$  et les  $g^{ij}$  sont respectivement des tenseurs covariant et contrevariant de rang deux.

Beaucoup de lois physiques expriment l'égalité entre deux tenseurs de même variance. On peut même faire passer les deux tenseurs dans le premier membre de l'égalité et la loi est du type

$$(217) \quad T_{pq\dots r}^{..kl..} = 0.$$

Dans ces conditions, on voit que si l'on effectue un changement de coordonnées chaque nouvelle composante  $\bar{T}_{..ij..}$  est, d'après (216) une combinaison linéaire des composantes de  $T_{..ij..}$ ; la loi (217) prend donc la forme

$$(218) \quad \bar{T}_{uv\dots w}^{..ij..} = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle conserve la même forme que (217). C'est en cela que consiste l'invariance des lois physiques de forme tensorielle vis-à-vis de tout changement du système des coordonnées.

Pour définir les tenseurs adjoints en coordonnées quelconques, il faut d'abord trouver un indicateur de dualité  $\gamma_{[ijk]}$  qui soit un tenseur covariant complètement antisymétrique sur ses trois indices et le tenseur contrevariant correspondant. Pour cela on pose

$$(219) \quad \gamma_{[ijk]} = g^{\frac{1}{2}} \epsilon_{[ijk]},$$

en convenant que dans tous les systèmes on prendra

$$(220) \quad \epsilon_{[ijk]} = \epsilon^{[ijk]} = \pm 1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} + \text{ si } (ijk) \text{ permutation paire de } (123), \\ - \text{ si } (ijk) \text{ permutation impaire de } (123). \end{cases}$$

Il est facile de voir que (219) se transforme bien comme un tenseur dans un



changement d'axes; en effet le déterminant fonctionnel  $\Delta$  se transforme suivant la loi

$$(221) \quad \bar{\Delta} = |\alpha_i^w| \cdot \Delta$$

et l'on a l'identité

$$(222) \quad \varepsilon_{[uvw]} \alpha_i^u \alpha_j^v \alpha_k^w = \varepsilon_{[ijk]} |\alpha_l^m|.$$

Comme

$$(223) \quad \sqrt{\bar{g}} = \pm \bar{\Delta}, \quad \sqrt{g} = \pm \Delta,$$

l'expression (221) s'écrit

$$(224) \quad \bar{\tau}_{[ijk]} = \alpha_i^u \alpha_j^v \alpha_k^w \tau_{[uvw]},$$

ce qui est bien la formule de transformation d'un tenseur de rang trois.

De (219) on déduit les composantes contrevariantes par les formules habituelles, ce qui donne

$$(225) \quad \tau_i^{[ijk]} = g^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{[ijk]}.$$

Considérons maintenant un tenseur  $T^{[ijk]}$  ou  $T_{[ijk]}$  de rang trois, complètement antisymétrique sur ses trois indices. On peut lui faire correspondre un tenseur adjoint qui est un invariant  $T$  par les relations

$$(226) \quad T = \frac{1}{6} \tau_i^{[ijk]} T_{[ijk]} = \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{[ijk]} T_{[ijk]},$$

$$(227) \quad T = \frac{1}{6} \tau_{[ijk]} T^{[ijk]} = \frac{1}{6} \sqrt{g} \varepsilon_{[ijk]} T^{[ijk]}.$$

En fait, ces relations (226), (227) reviennent à écrire

$$(228) \quad T^{[ijk]} = \pm \frac{T}{\sqrt{g}}, \quad T_{[ijk]} = \pm \sqrt{g} T.$$

L'élément de volume (213) est en fait l'invariant adjoint du tenseur antisymétrique  $|dq_{[j]}^i|$ .

A un tenseur antisymétrique de rang deux  $T^{[ij]}$  ou  $T_{[ij]}$  on peut faire correspondre un vecteur adjoint  $T_k$  ou  $T^k$  par les relations

$$(229) \quad T_i = \frac{1}{2} \tau_{[ijk]} T^{[jk]} = \frac{\sqrt{g}}{2} \varepsilon_{[ijk]} T^{[jk]},$$

$$(230) \quad T^i = \frac{1}{2} \tau^{[ijk]} T_{[jk]} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \varepsilon^{[ijk]} T_{[jk]}$$

ou inversement on peut faire correspondre un tenseur antisymétrique à un vecteur par les expressions

$$(231) \quad T_{[ij]} = \tau_{[ijk]} T^k, \quad T^{[ij]} = \tau_i^{[ijk]} T_k,$$

ce qui revient à écrire plus simplement

$$(232) \quad T^{ij} = \frac{T_k}{\sqrt{g}}, \quad T_{[ij]} = \sqrt{g} T^k,$$

$i, j, k$ , étant une permutation circulaire de 1, 2, 3.



L'introduction de ces tenseurs adjoints simplifie parfois les formules; par exemple on a

$$(233) \quad \frac{1}{2} A_{[ij]} B^{[ij]} = A_k B^k,$$

$$(234) \quad \frac{1}{2} A_i B_{[jkl]} C^{[ijk]} = (A_i B^i) \cdot C.$$

24. — *Transformation des expressions contenant les dérivées partielles.* — D'après (182) les symboles de dérivation partielle se transforment comme les composantes d'un vecteur covariant. En fait quand on a un produit de facteurs symboliques où les  $\partial_u$  alternent avec des composantes de vecteurs, il ne se transforme pas, en général, comme un tenseur; ceci parce que les symboles de dérivation partielle ne commutent pas avec les  $\alpha_i^u$  ou les  $\beta_w^i$ .

a) **Gradient d'un scalaire.** — Si  $\Phi(x^u)$  est une fonction des trois variables  $x^u$  elle devient une fonction  $\Psi\{x^u(q^1, q^2, q^3)\} = \Psi(q^i)$  après le changement de coordonnées (171). On a

$$(235) \quad \partial_i \Psi = \alpha_i^u \partial_u \Phi \quad \text{ou inversement} \quad \partial_w \Phi = \beta_w^i \partial_i \Psi.$$

Les grandeurs  $\partial_u \Phi$  se transforment donc comme les composantes d'un vecteur covariant. On peut donc dire que  $\partial_i \Psi$  est la composante covariante du gradient en coordonnées quelconques, soit

$$(236) \quad (\overrightarrow{\text{grad}} \Psi)_i = \partial_i \Psi.$$

La composante contrevariante s'en déduit de la manière habituelle

$$(237) \quad (\overrightarrow{\text{grad}} \Psi)^i = g^{ij} \partial_j \Psi.$$

Enfin, d'après (206) les composantes en vraie grandeur sur les axes ou sur les normales ont respectivement pour expression

$$(238) \quad (\overrightarrow{\text{grad}} \Psi)^{(i)} = \sqrt{g_{ii}} g^{ij} \partial_j \Psi, \quad (\overrightarrow{\text{grad}} \Psi)_{(i)} = \sqrt{g^{ii}} \partial_i \Psi$$

sans somme sur l'indice  $i$ . Nous plaçons les indices des composantes en vraie grandeur entre parenthèses pour rappeler que ce ne sont pas des indices indiquant la variance tensorielle.

Si l'on a, en coordonnées cartésiennes, une relation du type

$$(239) \quad \partial_w \Phi = A_w,$$

après le changement de coordonnées, elle devient

$$(240) \quad \partial_i \Psi = a_i,$$

en désignant par  $a_i$  la composante covariante du vecteur  $\vec{A}$  dans le nouveau système d'axes.

La différentielle totale de la fonction  $\Phi$  est un invariant et garde la même forme dans tous les systèmes de coordonnées, soit

$$(241) \quad d\Phi = \partial_u \Phi \cdot dx^u = \beta_u^i \alpha_j^u \partial_i \Psi \cdot dq^j = \partial_i \Psi \cdot dq^i.$$

b) **Divergence d'un vecteur.** — En coordonnées cartésiennes  $x^w$  on a  $\text{div } \vec{A} = \partial_w A^w$ . Cherchons ce que devient cette expression quand on passe des

|                                                                                                                                                     |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4. Correspondance entre le champ $E^w$ d'un système de charges électriques et l'induction $B^{uv}$ du système associé de courants magnétiques ..... | 479 |
| 5. Forme lagrangienne des équations de l'électrostatique .....                                                                                      | 480 |
| 6. Forme hamiltonienne des équations de l'électrostatique .....                                                                                     | 481 |
| 7. Les équations de l'électrostatique s'obtiennent en annulant la variation d'une intégrale .....                                                   | 482 |
| LES DISTRIBUTIONS MATHÉMATIQUES .....                                                                                                               | 483 |
| 1. Définitions .....                                                                                                                                | 483 |
| 2. Les distributions $\delta$ .....                                                                                                                 | 484 |
| 3. Distributions définies par une fonction et ses dérivées .....                                                                                    | 484 |
| 4. Les fonctions généralisées .....                                                                                                                 | 485 |
| 5. Distributions définies par des valeurs principales de Cauchy .....                                                                               | 486 |
| DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE, AU VOISINAGE D'UN POINT DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION FONDAMENTALE DE L'ÉLECTROSTATIQUE .....                                 | 487 |
| 1. Solutions de l'équation sans second membre .....                                                                                                 | 488 |
| 2. Cas où $f$ n'est pas nul .....                                                                                                                   | 491 |
| 3. Développement en série d'une solution régulière dans le vide ( $f = 0$ ) .....                                                                   | 493 |
| 4. Voisinage de la courbe qui limite une distribution de charges sur une surface conique, cylindrique, ou plane .....                               | 494 |
| 5. Distributions volumiques : point $M_0$ sur l'arête de base d'un cylindre de révolution .....                                                     | 496 |
| EXERCICES .....                                                                                                                                     | 500 |
| BIBLIOGRAPHIE .....                                                                                                                                 | 501 |
| INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES .....                                                                                                               | 503 |

MASSON et C<sup>ie</sup>, Éditeurs,  
120, Bd St-Germain, Paris (VI<sup>e</sup>),  
Dépôt légal : 4<sup>e</sup> trimestre 1964.

Imprimé en France  
*Marca registrada*

IMPRIMERIE DURAND,  
Luisant-Chartres (Eure-et-Loir)  
(7-1964)



Participant d'une démarche de transmission de fictions ou de savoirs rendus difficiles d'accès par le temps, cette édition numérique redonne vie à une œuvre existant jusqu'alors uniquement sur un support imprimé, conformément à la loi n° 2012-287 du 1<sup>er</sup> mars 2012 relative à l'exploitation des Livres Indisponibles du XX<sup>e</sup> siècle.

Cette édition numérique a été réalisée à partir d'un support physique parfois ancien conservé au sein des collections de la Bibliothèque nationale de France, notamment au titre du dépôt légal. Elle peut donc reproduire, au-delà du texte lui-même, des éléments propres à l'exemplaire qui a servi à la numérisation.

Cette édition numérique a été fabriquée par la société FeniXX au format PDF.

La couverture reproduit celle du livre original conservé au sein des collections de la Bibliothèque nationale de France, notamment au titre du dépôt légal.

\*

La société FeniXX diffuse cette édition numérique en vertu d'une licence confiée par la Sofia – Société Française des Intérêts des Auteurs de l'Écrit – dans le cadre de la loi n° 2012-287 du 1<sup>er</sup> mars 2012.

Avec le soutien du

