G NC

GUIDES
PRATIQUES
BORDAS

20

BACCALAURÉATS 1RE PARTIE

JEAN PARROD

PROBLÊMES DE GÉOMÉTRIE

programme de 1961

BORDAS-ÉDITEUR

COLLECTION DES GUIDES PRATIQUES

sous la direction de H. BORDAS, Agrégé de l'Université

JEAN PARROD

Professeur de Mathématiques au Lycée Paul Lapie
Interrogateur de Mathématiques Spéciales au Lycée St-Louis

PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE A'CC'MM'T

II

GÉOMÉTRIE

Programme de 1961

BORDAS

DU MÊME AUTEUR

DANS LA COLLECTION DES GUIDES PRATIQUES BORDAS

G.P.B.19. PROBLÈMES D'ALGÈBRE
ET DE TRIGONOMÉTRIE
(Baccalauréat Première Partie)

N° d'éditeur 15462200 3.

Printed in France

PRÉFACE

La faveur avec laquelle Professeurs et Étudiants ont accueilli les éditions précédentes de ce « guide » a été pour moi un profond encouragement qui m'a incité à mettre cette nouvelle édition en accord avec les programmes nouveaux et à la moderniser. Dans cette nouvelle conception sont rappelés les principes fondamentaux d'un cours que les élèves ont souvent tendance à oublier, d'autant que l'épreuve relative au cours a été éliminée.

Tout en me conformant aux nouveaux programmes, je n'ai pas toujours adopté l'ordre dans lequel ils sont exposés par les instructions officielles.

Dans un premier chapitre sont rappelés les lieux géométriques et constructions classiques; ensuite sont traités du point de vue strictement géométrique les produits et carrés scalaires. Après les propriétés des quaterne et faisceau harmoniques, quelques notions modernes d'algèbre linéaire permettent l'analogie entre les représentations mathématique et physique. Les conditions analytiques de parallélisme et d'orthogonalité procurent des applications dont le nombre est proportionnel à leur importance; dans le même ordre d'idées sont traitées les équations des différents cercles du plan.

Ajoutons que la géométrie analytique de la parabole et de l'hyperbole équilatère n'est développée et appliquée que pour les candidats aux sessions postérieures à 1962.

Enfin j'ai pensé que le rappel des propriétés du parallélisme et de l'orthogonalité dans l'espace serait d'une utilité incontestable, ainsi d'ailleurs que les principes des géométries projectives dont les instructions officielles ne font qu'une implicite mention, mais qui néanmoins demeurent aux programmes des sections techniques.

De très nombreux exercices et problèmes généralement gradués en difficulté composent ce « guide »; beaucoup sont des problèmes d'examen.

J'espère que cette nouvelle présentation sera accueillie aussi favorablement que les précédentes éditions.

A l'avance je remercie ceux de mes Collègues qui voudront bien me transmettre les observations et critiques suggérées par l'usage de ce manuel.

J. P.

SOMMAIRE

PROGRAMME du 2 mai 1961 (A'CMM')

GÉOMÉTRIE (PLAN ET ESPACE) et NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE

I. — PRODUIT SCALAIRE

Définition du produit scalaire de deux vecteurs; propriétés élémentaires, commutativité.

Produit scalaire d'un vecteur et d'une somme vectorielle; distributivité. Produit scalaire de deux sommes vectorielles. Carré scalaire de la somme ou de la différence de deux vecteurs.

Expression des sommes $MA^2 \pm MB^2$ relatives à trois points M, A, B, faisant intervenir le vecteur défini par le milieu du segment AB et le point M.

II. — GÉOMÉTRIE PLANE

1° Notions sur les polygones réguliers.

Ligne polygonale régulière : définition, cercle circonscrit et cercle inscrit; application aux polygones réguliers. Symétries d'un polygone régulier. Valeur des angles d'un polygone régulier convexe de *n* côtés. Carré, octogone régulier, hexagone régulier, triangle équilatéral.

2° Périmètre du cercle (on admettra l'existence d'une longueur supérieure au périmètre de tout polygone convexe inscrit, et inférieure au périmètre de tout polygone convexe circonscrit). Indications sommaires sur le principe de la méthode des périmètres pour le calcul du nombre π. Longueur d'un arc de cercle. Radian.

3° Aires de polygones plans : rectangle, triangle, parallélogramme, trapèze.

Rapport des aires de deux triangles semblables.

Aire du cercle. Aire du secteur circulaire.

4° Division harmonique de points alignés; relations caractéristiques (révision des notions figurant au programme de seconde).

Faisceau harmonique de droites (concourantes ou parallèles). Polaire d'un point par rapport à deux droites; applications aux constructions élémentaires sur les divisions et faisceaux harmoniques.

Ensemble des points dont le rapport des distances à deux droites est donné.

Segments déterminés sur un côté d'un triangle par les bissectrices de l'angle opposé.

III. — NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE

1° Plan rapporté à un repère orthonormé :
Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs du plan. Distance de deux points. Cosinus de l'angle de deux vecteurs; condition d'orthogonalité de deux vecteurs.

2° Droites définies par une équation cartésienne :
Révision des questions du programme de seconde A', C. M, M' relatives à la représentation analytique de la droite (repère quelconque) : équation; intersection de deux droites, parallélisme : applications aux équations et inéquations du premier degré à deux inconnues; équation d'une droite définie par deux points ou par un point et sa direction.

Cas d'un repère orthonormé : coordonnées d'un vecteur normal à une droite; distance d'un point à une droite; condition d'orthogonalité de deux droites.
(L'étude des représentations paramétriques de droites est-en dehors du programme.)

3° Plan rapporté à un repère orthonormé.
Equation d'un cercle défini par son centre et son rayon, ou par deux points diamétralement opposés. Problème inverse : étude de l'ensemble des points (x, y) définis par l'équation $x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + c = 0$.
Intersection d'une droite et d'un cercle définis par leurs équations, en se bornant, pour l'étude théorique, au cas où l'origine des coordonnées est le centre du cercle.

4° Définition géométrique de la parabole; foyer, directrice, paramètre, axe, sommet.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé : équation d'une parabole dont l'axe est parallèle à l'un des axes de coordonnées. Application à l'étude de la courbe représentative de la fonction $y = ax^2 + bx + c$ (paramètre, foyer, directrice).
Equation de la tangente en un point à une parabole, rapportée à son axe de symétrie et à sa tangente au sommet; propriétés de la sous-tangente au sommet; propriétés de la sous-tangente et de la sous-normale relative à l'axe de symétrie.
L'étude théorique des générations tangentielles de la parabole, l'étude théorique de l'intersection d'une droite et d'une parabole, sont en dehors du programme.

5° Equation de la tangente en un point de la courbe représentative de la fonction $y = \frac{k}{x}$ (axes rectangulaires ou obliques), propriétés simples de cette tangente par rapport aux asymptotes.

IV. — GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

1° Angle d'une droite ou d'un plan. Ligne de plus grande pente d'un plan par rapport à un autre. Aire de la projection orthogonale d'un polynome plan.

2° Définition d'un trièdre, d'un angle polyèdre, d'un polyèdre. Prismes et pyramides; sections par des plans parallèles au plan de base. Volume de parallélépipèdes et des prismes.

3° Surfaces cylindriques et surfaces coniques; translations (resp. homothéties) laissant invariante une surface cylindrique (resp. coniques).
Cas des surfaces à directrice circulaire; sections par des plans parallèles au plan de la directrice; section par un plan parallèle aux génératrices (cylindre) ou passant par le sommet (cône).
Plan tangent.
Volume du cylindre à bases circulaires.
Définition de l'axe d'un cercle. Définition des surfaces cylindriques et coniques de révolution. Formule (sans démonstration) de l'aire latérale d'un cylindre de révolution, d'un cône de révolution, d'un tronc de cône de révolution.

4° Sphère. Symétries. Plan tangent, intersection d'une sphère et d'une droite. Positions relatives d'une sphère et d'un plan; sections planes d'une sphère. Positions relatives de deux sphères; intersection de deux sphères.
Sphères passant par un cercle donné; sphère circonscrite à un tetraèdre.
Formules sans démonstrations, de l'aire de la zone sphérique et de l'aire de la sphère.
L'étude de la rotation comme transformation ponctuelle, l'étude des cônes et des cylindres circonscrits à une sphère, sont en dehors du programme.

5° Ensemble des points dont le rapport des distances à deux points donnés a une valeur donnée.

Ensemble des points dont la somme ou la différence des carrés des distances à deux points donnés a une valeur donnée.

N. B. — En géométrie analytique plane, les paragraphes 4° et 5° ne font pas partie du programme pour la session de 1962.

PREMIÈRE PARTIE

RÉSUMÉ DU COURS

ÉNONCÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

GÉOMÉTRIE PLANE

CHAPITRE PREMIER

RAPPEL DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES ET CONSTRUCTIONS CLASSIQUES

I. — *Lieu des points équidistants de deux droites parallèles D et D'.*

Ce lieu est la parallèle Δ équidistante de D et D'.

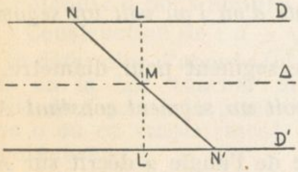

FIG. 1.

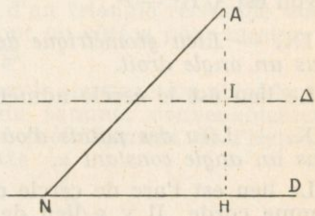

FIG. 2.

II. — *Lieu des milieux des segments joignant un point fixe A à tous les points d'une droite D* (fig. 2).

C'est la droite Δ parallèle à D, menée par le milieu I du segment AH, H étant la projection de A sur D.

III. — *Lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites concourantes est constante.*

Si l désigne la constante, le lieu est la base du triangle isocèle dont les hauteurs égales ont pour longueur commune l, deux côtés du triangle isocèle étant les droites concourantes données.

IV. — *Lieu géométrique des points équidistants des côtés d'un angle.*

Ce lieu est la bissectrice de cet angle. Par extension il en résulte que le lieu des points équidistants de deux droites concourantes est le système formé par les bissectrices rectangulaires des angles que ces droites forment.

V. — *Lieu des points équidistants de deux points fixes A et B.*

Ce lieu est l'axe de symétrie du segment AB.

VI. — *Lieu des points équidistants d'un point fixe O.*

Le lieu est un cercle centré en O.

VII. — *Lieu des centres des cercles passant par deux points fixes A et B ou tangents à une droite fixe D en un point fixe A de cette droite.*

Le lieu est l'axe de symétrie du segment AB ou la perpendiculaire en A à D.

VIII. — *Lieu géométrique du milieu d'une corde de longueur constante* 2 l *dans un cercle donné (O, R).*

Le lieu est le cercle concentrique au cercle donné, dont le rayon est $\sqrt{R^2 - l^2}$.

IX. — *Lieu géométrique des points d'où l'on voit un segment sous un angle droit.*

Le lieu est le cercle admettant le segment pour diamètre.

X. — *Lieu des points d'où l'on voit un segment constant AB sous un angle constant* α.

Le lieu est l'arc de cercle capable de l'angle α décrit sur AB comme corde. Il y a lieu de tenir compte de la symétrie par rapport à AB.

XI. — *Lieu géométrique des points dont le rapport* k *des distances à deux points fixes A et B du plan est constant.*

Ce lieu est le cercle de diamètre CD, C et D étant les points du segment AB divisant AB dans les rapports k et $-k$.

XII. — *Lieu géométrique des points M qui se déduisent de points* m *par homothétie.*

Le lieu est la courbe homothétique du lieu de m.

XIII. — *Lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est constante.*

Ce lieu est un cercle dont le centre est le milieu du segment qui joint les points fixes.

XIV. — *Lieu géométrique des points dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante.*

Le lieu est une droite perpendiculaire au segment qui joint les points fixes. Sa position est déterminée par le deuxième théorème de la médiane.

XV. — *A et B étant deux points fixes, lieu géométrique du point M dont la projection H sur AB est telle que :*

$$\overline{MH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB}.$$

Le lieu est le cercle de diamètre AB.

I. — *Construction des longueurs irrationnelles.*

a) Construction de : $a\sqrt{2}$ (diagonale du carré de côté a).

b) Construction de : $a\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (hauteur du triangle équilatéral de côté a).

c) Construction de : $\sqrt{a^2 + b^2}$.

C'est l'hypoténuse du triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectives a et b.

d) Construction de : $\sqrt{a^2 - b^2}$.

C'est le 2ᵉ côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse a pour mesure a et dont un côté a pour mesure b.

e) Construction de : $a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$.

On détermine d'abord $\sqrt{a^2 - b^2}$ par la construction précédente, puis on la fait tourner autour du sommet convenablement choisi de façon à la placer dans le prolongement de l'hypoténuse a ou en empiètement sur cette hypoténuse.

II. — *Construction de la quatrième proportionnelle.*

C'est la longueur x, quatrième terme de la proportion :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

La figure 3 ci-contre montre que sur les côtés d'un angle arbitraire XOY on porte successivement : sur le premier côté OA $= a$, puis AB $= b$ et sur le 2ᵉ côté OC $= c$. Par B on mène ensuite BD parallèle à AC et l'on a : CD $= x$.

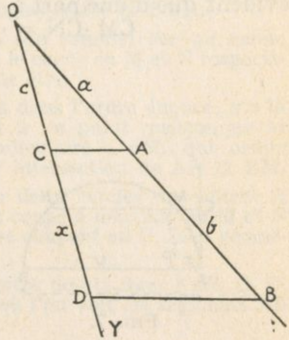

FIG. 3.

III. — *Construction de la moyenne proportionnelle.*

On désigne sous ce nom la longueur x occupant la place des moyens dans une proportion :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \text{d'où :} \quad x^2 = a \cdot b \quad \text{et} \quad x = \sqrt{a \cdot b}.$$

Les figures suivantes en donnent trois constructions différentes; les deux premières (fig. 4 et 5) issues des théorèmes de

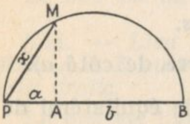

FIG. 4.

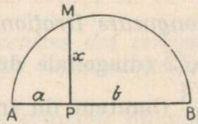

FIG. 5.

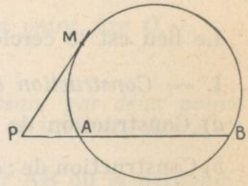

FIG. 6.

Pythagore sont plus fréquemment employées que la troisième dont l'origine est affiliée à la puissance d'un point pour un cercle (fig. 6).

IV. — *Construction de deux longueurs dont on connaît la somme S et le produit P.*

Sur la tangente en A à un demi-cercle de diamètre $AB = S$, on porte :

$AC = \sqrt{P}$ et par C on mène la parallèle CMN à AB; on a alors : $CM = x \cdot CN = y$, car $CM = AP$ et $CN = PB$; or il est évident que d'une part : $CM + CN = S$ et d'autre part :

$$CM \cdot CN = \cdot xy \cdot = CA^2 = P \text{ (fig. 7).}$$

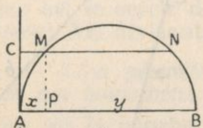

FIG. 7.

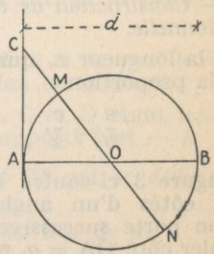

FIG. 8.

V. — *Construction de deux longueurs dont on connaît la différence* d *et le produit P ou la moyenne géométrique* k^2.

Sur la tangente en A à un cercle de diamètre $AB = d$, on porte une longueur $AC = \sqrt{P} = k$ puis on mène le diamètre CMN du point C; on a alors : $CM = y$, $CN = x$ ou inversement, car d'une part : $CN - CM = x - y = AB = d$, et d'autre part :

$$CM \cdot CN = xy = P = k^2 \text{ (fig. 8).}$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Lieu géométrique des milieux des sécantes comprises entre deux droites parallèles.

2 Lieu géométrique des centres des parallélogrammes qui ont une base commune et même hauteur h.

3 Lieu géométrique du quatrième sommet M des parallélogrammes de périmètre constant obtenus en menant par M les parallèles aux côtés d'un angle xOy.

4 Lieu géométrique des points d'intersection des diagonales des trapèzes obtenus en coupant les côtés d'un triangle isocèle ABC parallèlement à sa base.

5 On considère un angle droit xOy et un point A de son plan; les côtés d'un angle droit de sommet A tournant autour de A rencontrent Ox et Oy en M et N respectivement. Lieu géométrique du milieu P de MN.

6 Les extrémités M et N d'un segment de longueur constante l glissent sur deux axes rectangulaires Ox et Oy; lieu géométrique du milieu P du segment MN.

7 A, B, C étant trois points alignés dans cet ordre, $x'x$ la perpendiculaire en C à AB, M un point quelconque de $x'x$, on mène de B la perpendiculaire à AM, qui coupe $x'x$ en N. Lieux géométriques des centres des cercles circonscrits aux triangles AMN et BMN.

8 Un angle α de grandeur constante a son sommet sur un cercle de centre O. Les côtés de l'angle coupent le cercle en M et N respectivement. Lieu géométrique du milieu P de MN.

9 A, B, C étant trois points alignés, situés dans l'ordre énoncé, $x'x$ la perpendiculaire en C à AB, on joint A à un point quelconque M de $x'x$, puis de B on mène BB′ perpendiculaire à AM, qui coupe $x'x$ en N. Lieu géométrique du point P intersection de AN et BM.

10 Par l'un des points d'intersection de deux cercles de centres A et B on mène une sécante mobile qui les coupe à nouveau en M et N respectivement; on joint AM et BN qui se coupent en P. Lieu géométrique de P.

11 Sur une même droite on considère quatre points fixes A, B, C, D. Lieu géométrique des points du plan d'où l'on voit les segments AB et CD sous des angles égaux.

12 Un cône de révolution de sommet S a pour base un cercle (O). Soient SA une génératrice fixe et SM une génératrice mobile. Lieu géométrique du centre de gravité du triangle SAM.

13 Soit P un point fixe intérieur à un cercle fixe (O, R); un angle droit de sommet P tourne dans le plan du cercle autour de P; ses côtés coupent le cercle en M et N respectivement. Lieux géométriques du milieu de MN et de la projection de P sur MN.

14 Lieu géométrique des centres des cercles passant par un point donné et orthogonaux à un cercle donné.

15 A l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle ABC on mène une perpendiculaire DFE qui coupe AB en E et AC en F; sur cette perpendiculaire on considère le point M tel que $\overline{DM}^2 = DE \cdot DF$; lieu du point M.

16 Un angle xOy de grandeur constante tourne autour de son sommet O; d'un point fixe A de son plan on mène les perpendiculaires AB et AC à Ox et Oy respectivement. AB coupe Oy en D et AC coupe Ox en E. Lieux géométriques des points B, C, D, E.

17 On considère un cercle fixe (O, R); soit A un point fixe de ce cercle; un point M décrit la tangente en A et de M on mène la deuxième tangente MN au cercle; on demande les lieux géométriques :

1° du centre du cercle circonscrit à AMN;

2° de l'orthocentre du triangle AMN;

3° des centres des cercles inscrit dans AMN et exinscrit dans l'angle AMN.

18 On considère un demi-cercle de diamètre AB et de rayon R; M étant un point quelconque du demi-cercle, on prolonge AM de MD = MB et BM de ME = MA; F étant le quatrième sommet du rectangle de côtés MD et ME, on demande :

1° Les lieux géométriques des points D et E.

2° Prouver que MF reste parallèle à une direction fixe; lieu géométrique de F.

3° DE reste tangente à un cercle fixe.

19 Construire un triangle connaissant A, r, h_a.

20 Construire un triangle connaissant a, A, h_a.

21 Construire un triangle connaissant h_a, m_a, R.

22 Construire un triangle connaissant A, r, R.

CHAPITRE II

LES PRODUITS ET CARRÉS SCALAIRES

Produit scalaire de deux vecteurs.

Nous appelons produit scalaire de deux vecteurs libres $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ le produit de leurs modules V et V' par le cosinus de leur angle; nous représentons ce produit par la notation :

$\vec{V}.\vec{V}'$, que nous énoncerons : $\vec{V}$ scalaire $\vec{V}'$.

Nous avons donc :

$$\vec{V}.\vec{V}' = V.V' \cos(\vec{V},\vec{V}').$$

Ce produit est commutatif, car d'une part le produit V.V' l'est lui-même, et d'autre part :

$$\cos(\vec{V}, \vec{V}') = \cos(\vec{V}', \vec{V}).$$

Nous avons ainsi :

$$\vec{V}.\vec{V}' = \vec{V}'.\vec{V}.$$

Conséquence importante :

$$\text{C.N.S. pour } \vec{V}.\vec{V}' = 0.$$

Ces conditions sont :

$$\text{soit } \vec{V} = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{V}' = 0,$$

$$\text{soit } \cos(\vec{V}.\vec{V}') = 0 \quad \text{ou} \quad (\vec{V}\vec{V}') = \frac{\pi}{2}.$$

Condition d'orthogonalité de 2 vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$: $\vec{V}.\vec{V}' = 0$.

Produit scalaire d'un vecteur $\vec{V}$ et d'une somme vectorielle $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \cdots + \vec{V}_n$; nous l'obtenons en faisant la somme des produits scalaires :

$$\vec{V}.\vec{V}_1, \quad \vec{V}.\vec{V}_2, \cdots \vec{V}.\vec{V}_n;$$

d'où l'égalité :

$$\vec{V}.(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \cdots + \vec{V}_n) = \vec{V}.\vec{V}_1 + \vec{V}.\vec{V}_2 + \cdots + \vec{V}.\vec{V}_n.$$

Nous dirons que le produit scalaire est distributif relativement à la somme géométrique. Cette distributivité s'applique au cas de deux sommes géométriques; l'égalité de droite à gauche traduit l'associativité Nous avons de même :

$$(\vec{V} + \vec{V}')(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \rightleftarrows \vec{V}.\vec{V}_1 + \vec{V}.\vec{V}_2 + \vec{V}'\vec{V}_1 + \vec{V}'.\vec{V}_2.$$

Nous exprimons dans ce cas que le produit scalaire est distributif relativement aux sommes vectorielles.

Remarque : Dans chacune des règles envisagées nous pouvons remplacer chaque vecteur par son produit par un scalaire λ, à condition d'admettre que le produit $\lambda\vec{V}$ est un vecteur dont le module est $|\lambda|$ V et dont le sens est celui de $\vec{V}$ si λ est positif, le sens de $-\vec{V}$ si λ est négatif.

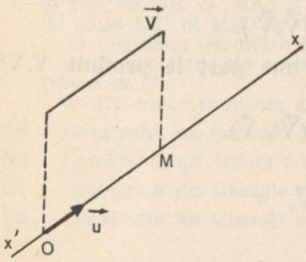

Fig. 9.

Conséquence : Soit $x'Ox$ un axe orienté par un vecteur unitaire $\vec{u}$, et soit $\vec{V}$ un vecteur parallèle à cet axe (fig. 9); si x est l'abscisse du point M de l'axe, extrémité du vecteur lié $\overrightarrow{OM}$ équipollent à $\vec{V}$, x représente la mesure algébrique du vecteur $\vec{V}$; x est donc un scalaire, et nous pouvons écrire (fig. 9) :

$$\vec{V} = x \cdot \vec{u}$$

ce qui entraîne que M est l'homothétique de l'extrémité de $\vec{u}$ dans l'homothétie (O, x).

Carré scalaire d'un vecteur : c'est $\vec{V}.\vec{V}$; Les deux vecteurs sont confondus, donc leur angle est nul et par suite le carré se réduit au carré du module; d'où :

$$(\vec{V})^2 = V^2.$$

Carré d'une somme et d'une différence de deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$.

$$(\vec{V} + \vec{V}')^2 = \vec{V}^2 + \vec{V}'^2 + 2\,\vec{V}.\vec{V}'.$$

$$(\vec{V} - \vec{V}')^2 = \vec{V}^2 + \vec{V}'^2 - 2\,\vec{V}.\vec{V}'.$$

Application aux expressions $\overline{MA}^2 \pm \overline{MB}^2$.

Si O est le milieu de AB et M un point extérieur à la droite AB, nous avons (fig. 10) :

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM} \quad (1)$$
$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM}$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MB} \quad (2)$$

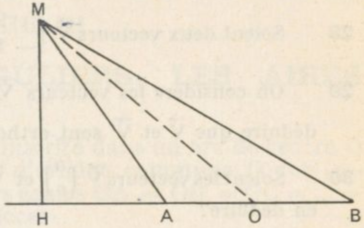

FIG. 10.

Élevons (1) et (2) au carré scalairement et ajoutons, puis ensuite retranchons membre à membre. Nous obtenons les deux relations :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\,\overline{AO}^2 + 2\,\overline{OM}^2$$
$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 4\,\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM} = 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$$
$$= 2\,\overline{AB} \cdot \overline{OH}.$$

Ce sont les deux théorèmes de la médiane qui engendrent les 2 lieux géométriques rappelés sous les n^os XIII et XIV au chapitre I.

EXERCICES ET PROBLÈMES

23 A, B, C, D étant quatre points distincts de l'espace,

1°) On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$

2° En déduire que si les couples de droites (AB, CD) et (AC, DB) sont formés de droites orthogonales, il en est de même du couple (AD, BC).

24 Prouver que les hauteurs d'un triangle ABC concourent en un point H à l'aide de la relation :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0.$$

25 Montrer que les axes des côtés d'un triangle ABC sont concourants; on établira une relation entre les vecteurs côtés du triangle DEF joignant les milieux des côtés de ABC et les hauteurs dudit triangle DEF.

26 On considère un cercle (O, R) et un point P intérieur, dont la distance à O est $OP = d$ ($d < R$). Par P on mène deux cordes rectangulaires AA′ et BB′; montrer que lorsque ces droites tournent autour de P, la somme des carrés scalaires des vecteurs : $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PA'}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PB'}$ est constante.

27 Dans l'exercice précédent, avec les mêmes éléments, prouver que la somme des carrés scalaires des côtés du quadrilatère ABA'B' est constante dans les conditions indiquées.

28 Soient deux vecteurs $\vec{V}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}'\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{V}.\vec{V}'$.

29 On considère les vecteurs $\vec{V}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}'\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{V}.\vec{V}'$. En déduire que $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont orthogonaux.

30 Soient les vecteurs $\vec{V}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et $\vec{V}'\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$. Former $\vec{V}.\vec{V}'$. Que peut-on en déduire?

31 On coupe un trièdre trirectangle par un plan de section; montrer que la projection du sommet sur le plan de section est l'orthocentre du triangle de section.

32 G étant le centre de gravité d'un triangle ABC,

1° Montrer que la somme $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ est nulle.

2° Vérifier la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

33 Dans un tétraèdre ABCD il existe la relation ;

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

34 Soient O et G le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC et son centre de gravité. Montrer que l'on a :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG}.$$

CHAPITRE III

LES POLYGONES RÉGULIERS. LES AIRES

Une ligne polygonale régulière inscrite dans un arc de centre O est formée par des demi-droites d'origine commune O sur lesquelles nous portons des longueurs égales OA = OB = OC = ... = OL, les demi-droites formant successivement avec la précédente des angles égaux (fig. 11) à $\frac{2\pi}{n}$ si n est le nombre des côtés du polygone. Les triangles isocèles OAB, OBC, ..., OKL sont tous égaux; leur hauteur commune IO est désignée sous le nom d'apothème de la ligne brisée régulière.

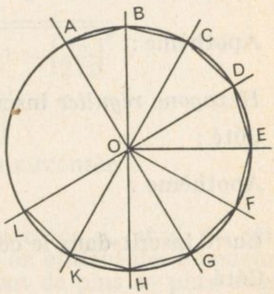

FIG. 11.

Une telle ligne est dite convexe lorsque tous ses points sont situés d'un même côté de l'un quelconque de ses côtés.

Un polygone régulier convexe est tel que l'extrémité de la ligne polygonale convexe coïncide avec son origine.

REMARQUES : I. Si le polygone convexe a n côtés, nous pouvons joindre les sommets de p en p; si p est premier avec n, nous obtenons un polygone croisé.

II. n rotations successives autour de O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ transforment le polygone régulier en lui-même; en conséquence les côtés et les angles d'un polygone régulier sont respectivement égaux.

Cercle circonscrit. Cercle inscrit.

Le cercle sur lequel sont situés les sommets du polygone régulier est dit circonscrit à ce polygone.

D'autre part le cercle de même centre, dont le rayon est l'apothème est tangent à tous les côtés; il est dit inscrit dans le polygone.

Eléments de symétrie : Est centre de symétrie le centre commun des cercles inscrit et circonscrit. Sont axes de symétrie les rayons des sommets et les axes des côtés. Toutefois si le nombre des côtés est impair, le centre est un centre d'ordre n. C'est le cas du triangle équilatéral inscrit pour lequel le centre du cercle circonscrit est un centre d'ordre 3.

Somme des angles intérieurs d'un polygone convexe : $(n - 2)$ angles plats.

Somme des angles extérieurs d'un polygone convexe : 2 angles plats.

Triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon R.

Côté : $c = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Apothème : $a = \dfrac{R}{2}$.

Hexagone régulier inscrit dans le cercle (O, R) :

Côté : $c = R$,

Apothème : $a = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Carré inscrit dans le cercle (O, R) :

Côté : $c = R\sqrt{2}$.

Apothème : $a = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Octogone régulier inscrit dansle cercle (O, R) :

Côté : $c = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Apothème : $a = \dfrac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Octogone régulier étoilé inscrit dansle cercle (O, R) :

Côté : $c = R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Apothème : $a = \dfrac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Pentagone régulier convexe inscrit dans le cercle (O, R) :

Côté : $c = \dfrac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

Apothème : $a = \dfrac{R}{4}(\sqrt{5} + 1)$.

Décagone régulier convexe inscrit dans le cercle (O, R) :

Côté : $c = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1).$

Apothème : $a = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$

Polygone régulier convexe de n *et* 2 n *côtés* inscrit dans le cercle (O, R) :

Côtés c_n et c_n liés aux apothèmes car :

$$a_n = \frac{1}{2}c_{2n} \quad \text{et} \quad a_{2n} = \frac{1}{2}c_n$$

$$c_{2n} = R\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{c_n}{2R}\right)^2}}$$

$$\frac{c'_n}{c_n} = \left[1 - \left(\frac{c_n}{2R}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

c'_n étant le côté du polygone de n côtés circonscrit.

Rectification du cercle:

En calculant à l'aide de la formule des côtés c_{2n} et c'_n du côté du polygone circonscrit au cercle (O, R) on obtient des longueurs de polygones convexes qui se rapprochent de plus en plus, aussi bien celles des polygones convexes inscrits que celles des polygones convexes circonscrits; la limite commune de ces deux suites est telle que si L est la longueur du cercle (O, R), L s'appelle le périmètre ou la longueur du cercle. On dit que l'on a rectifié le cercle.

La limite du rapport $\frac{L}{2R}$ du périmètre au diamètre est le nombre $\pi = 3{,}14159263...$

Nous pouvons d'ailleurs en déduire : $L = 2\pi R$ et remarquer par ailleurs que $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098$. (Les trois journées de 1830 ont renversé 89).

Longueur d'un arc du cercle (O, R) :

Un arc de longueur égale à R = 1 radian.
Ainsi la longueur du cercle (O, R) est 2π radians.
Longueur d'un arc de α radians : $l = \alpha \cdot R$.

Si α est exprimé en degrés : $l = \frac{2\pi R\alpha^o}{360}$.

Si α est exprimé en grades : $l = \frac{2\pi R\alpha^\gamma}{400}$.

Segment de cercle $S = \frac{1}{2}R^2(\omega - \sin\omega)$.

Aires : $S = pr$.

Rectangle de dimensions (a, b) : $S = ab$.

Triangle de base a et de hauteur h : $S = \frac{1}{2} ah$.

Parallélogramme de base a, de hauteur h : $S = ah$.

Trapèze de bases B et b, de hauteur h : $S = h \cdot \frac{B + b}{2}$.

Triangle équilatéral de côté a : $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Carré de côté a : $S = a^2$.

Aire du polygone régulier convexe d'apothème a, de périmètre p : $S = \frac{1}{2} pa$.

Aire du cercle (O, R) : $S = \pi R^2$.

Aire d'un secteur circulaire du cercle (O, R) :
- Angle d'ouverture en radians : $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$.
- α en degrés : $S = \frac{\pi R^2 \alpha^o}{360}$. $S = \frac{1}{2} R^2 \omega$
- α en grades : $S = \frac{\pi R^2 \alpha^\gamma}{400}$.

Rapport des aires de deux triangles semblables ou de deux polygones semblables (rapport k de similitude) :

$$\frac{S}{S'} = k^2.$$

Couronne. $S = \pi(R^2 - r^2)$

EXERCICES ET PROBLÈMES

35 Soit un carré de côté a, de centre O; les cercles centrés en A, B, C, D et passant par O déterminent un octogone régulier convexe.
1° Que peut-on dire de ce polygone?
2° Calculer ses côtés en fonction de a.

36 On considère un segment AB de longueur l et le point M partageant AB en moyenne et extrême raison; en posant $\overline{AM} = x$, montrer que x est racine d'une équation du 2e degré que l'on formera.

37 Soit un triangle rectangle en A et dont les côtés de l'angle droit sont dans le rapport de 1 à 2 (2 CA = AB). Le cercle (C, CA) coupe l'hypoténuse BC en D; le cercle (B, BD) coupe AB en M; montrer que M partage AB en moyenne et extrême raison.

38 Soit un triangle rectangle ABC; sur l'hypoténuse BC on construit le demi-cercle passant par A, et sur les côtés AB et AC les demi-cercles extérieurs au triangle. Montrer que la somme des aires des deux lunules ainsi formées (lunules d'Hippocrate) est égale à l'aire du triangle ABC.

39 Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle proportionnels aux nombres 4 et 5 et dont l'aire est 490 dm².

40 Soit un demi-cercle de diamètre AB, C un point situé entre A et B; on décrit les demi-cercles situés du même côté que celui tracé, de diamètres respectifs AC et BC; montrer que l'aire limitée par ces trois demi-cercles est équivalente à celle du cercle dont le diamètre est la portion CD de la tangente commune limitée au demi-cercle donné.

41 Dans un cercle de centre O, on trace deux diamètres rectangulaires AA′ et BB′ et, du point B comme centre, avec BA comme rayon on trace l'arc ACA′, C étant sur BB′. Montrer que l'aire du croissant ACA′B′ est égale à celle du triangle AA′B.

42 Montrer que l'aire d'un quadrilatère convexe est le demi-produit d'une diagonale par la projection de l'autre sur une droite perpendiculaire à la première.

43 Calculer les côté et apothème des décagones réguliers convexe et étoilé.

44 Calcul des côté et apothème des pentagones réguliers convexe et étoilé.

45 On considère un cercle de centre O et de rayon r. Par son centre passe une droite D. Dans ce cercle on trace une corde AB perpendiculaire à la droite D; a étant la longueur de cette corde, on pose $x = \frac{a}{2r}$. On considère également un triangle isocèle A′O′B′ (A′O′ = B′O′) circonscrit au cercle et tel que $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$.

1° Exprimer la longueur du segment OO′ en fonction de r et de x.

2° Exprimer les longueurs des côtés du triangle A′O′B′ en fonction de r et de x.

3° Désignons par S l'aire du rectangle construit sur A′B′ comme base et dont la hauteur est égale à celle du triangle AOB relative à AB; désignons par S_1 et S_2 rsepectivement les aires des triangles AOB et A′O′B′. Exprimer la relation qui existe entre S, S_1 et S_2.

4° Exprimer le rapport $\frac{S_1 \times r^2}{S_2 \times a^2}$ en fonction de x, et étudier sa variation.

CHAPITRE IV

QUATERNE HARMONIQUE. CONSTRUCTIONS. APPLICATION AUX PROPRIÉTÉS DES BISSECTRICES DES ANGLES D'UN TRIANGLE

Point M partageant un segment AB dans un rapport algébrique λ :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \lambda.$$

Forme symétrique pour M partageant le vecteur A_1A_2 dans le rapport $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$:

$$\frac{\overrightarrow{MA_1}}{\overrightarrow{MA_2}} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

ou encore :

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} = 0.$$

Lorsque deux points C et D du support d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ divisent ce vecteur dans des rapports algébriques opposés, nous dirons qu'ils divisent $\overrightarrow{AB}$ harmoniquement, ou encore que le quaterne (A, B; C, D) est harmonique, ce que traduit la relation :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = 0 \text{ (fig. 12).}$$

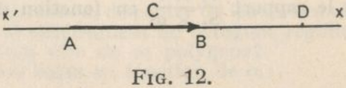

FIG. 12.

REMARQUE IMPORTANTE : Lorsqu'un quaterne (A, B; C, D) est harmonique, l'étude du point qui divise un vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans un rapport algébrique donné montre que l'un des points C ou D est entre A et B, l'autre étant extérieur au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Construction du point M tel que $\lambda_1\overrightarrow{MA_1} + \lambda_2\overrightarrow{MA_2} = 0$.

Par A_1 et A_2 menons deux parallèles arbitraires $x'x$ et $y'y$. Sur $x'x$ portons :

$$\overrightarrow{A_1M_1} = \lambda_2$$

et $y'y$:

$$\overrightarrow{A_2M_2} = -\lambda_1$$

puis joignons M_1M_2 qui coupe A_1A_2 en M. Nous avons :

$$\frac{\overrightarrow{MA_1}}{\overrightarrow{MA_2}} = \frac{\overrightarrow{A_1M_1}}{\overrightarrow{A_2M_2}} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

M est bien le point cherché (fig. 13).

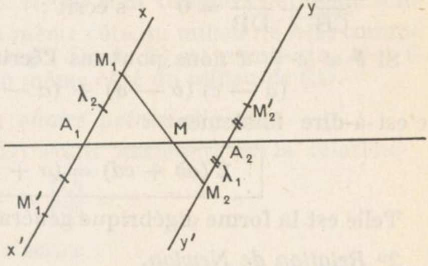

FIG. 13.

Construction du conjugué d'un point donné.

Lorsque le quaterne (A, B ; C, D) est harmonique, C et D divisent le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans des rapports algébriques opposés ; nous nous proposons, connaissant l'un de ces deux points, de construire l'autre. A cet effet, utilisant la construction précédente, nous remarquons qu'il suffit de changer le signe du rapport $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, ce qui revient soit à considérer le symétrique M'_1 de M_1 pour A_1, soit celui M'_2 pour A_2 puis de joindre M'_1 M_2 ou M_1 M'_2 qui coupent A_1A_2 au conjugué N de M pour A_1A_2. La construction de la figure 14 ci-contre est réalisée avec les notations du quaterne (A, B; C, D). Remarquons que cette construction est valable quel que soit le point donné C ou D.

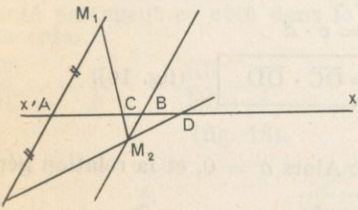

FIG. 14.

Différentes formes algébriques du quaterne harmonique.

1° Relation algébrique, l'origine O des abscisses étant quelconque sur le support du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (fig. 15).

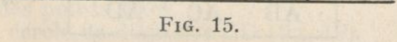

FIG. 15.

Soient a, b, c, d les abscisses respectives des points A, B, C, D ; la relation

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = 0 \quad \text{s'écrit :} \quad \frac{a-c}{b-c} + \frac{a-d}{b-d} = 0,$$

Si $b \neq c \neq d$ nous pouvons l'écrire :

$$(a-c)(b-d) + (a-d)(b-c) = 0$$

c'est-à-dire finalement :

$$\boxed{2(ab + cd) = (a+b)(c+d)}\ .$$

Telle est la forme algébrique générale du quaterne harmonique.

2° *Relation de Newton.*

L'origine des abscisses est le milieu de $\overrightarrow{AB}$.

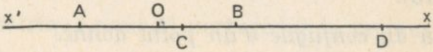

FIG. 16.

Alors $b = -a$ et $a + b = 0$.
La relation générale devient :

$$a^2 = c \cdot d$$

ou : $\boxed{\overline{OA}^2 = \overline{OC} \cdot \overline{OD}}$ (fig. 16).

3° *Relation de Descartes.*

L'origine des abscisses est A. Alors $a = 0$, et la relation générale devient :

$$2\,cd = bd + bc$$

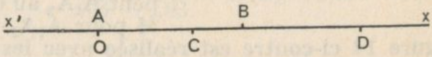

FIG. 17.

ou, si aucun des nombres b, c, d est nul,

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

soit : $\boxed{\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}}$ (fig. 17).

REMARQUE IMPORTANTE : La relation de Newton montre que O étant le milieu de $\overrightarrow{AB}$, les nombres $\overline{OC}$ et $\overline{OD}$ sont toujours de même signe; les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont toujours de même sens et par suite C et D sont d'un même côté du milieu de $\overrightarrow{AB}$; comme la réciprocité (A, B; C, D) = (C, D; A, B) est manifeste, A et B sont également toujours d'un même côté du milieu de CD.

Rapport anharmonique de quatre points alignés.

Le quaterne (A, B; C, D) étant harmonique, la relation

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = 0$$

est vérifiée; elle peut aussi s'écrire :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -1.$$

Le quotient du premier membre s'appelle rapport anharmonique du quaterne (A, B; C, D).

Si ce quaterne est harmonique, ce rapport est égal à — 1.

Propriété des bissectrices d'un triangle.

Les pieds des bissectrices d'un angle d'un triangle sur le côté opposé partagent ce côté dans le rapport en module des côtés adjacents.

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{c}{b}, \qquad \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{c}{b}$$

(fig. 18).

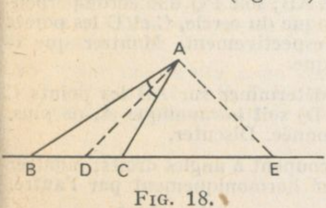

FIG. 18.

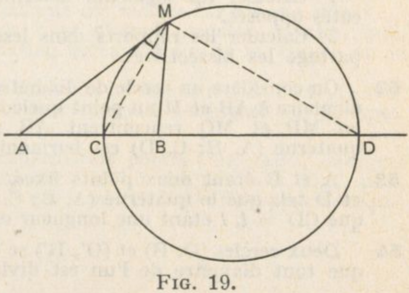

FIG. 19.

CONSÉQUENCE : Le quaterne (B, C; D, E) est harmonique.

Lieu géométrique des points dont le rapport |k| *des distances à deux points fixes A et B est constant.*

C et D étant les points de AB qui divisent AB dans les rapports k et $-k$ sont des points fixes.

Le lieu est le cercle de diamètre CD (fig. 19).

EXERCICES ET PROBLÈMES

46 On considère un cercle de diamètre AB et sur AB un point D extérieur au cercle, d'où l'on mène une tangente DT, T étant le point de contact; C étant la projection sur AB du point T, montrer que le quaterne (A, B; C, D) est harmonique.

47 Soit un triangle ABC. On mène la bissectrice intérieure de l'angle A; elle coupe BC en D. Les points B et C se projettent en H et K sur AD respectivement. Montrer que le quaterne (A, D; K, H) est harmonique.

48 On considère un quaterne harmonique (A, B; C, D); par les quatre points A, B, C, D on mène des parallèles qui coupent une droite Δ non parallèle à la base du quaterne en des points A′, B′, C′, D′, respectivement; montrer que le quaterne (A′, B′; C′, D′) est harmonique.

49 Etant donnés deux segments AA′ et BB′ tous deux perpendiculaires à la droite AB, quel est le lieu géométrique des points de leur plan d'où l'on peut voir AA′ et BB′ sous des angles égaux?

50 On considère un triangle ABC de côtés a, b, c; les bissectrices de l'angle A coupent BC aux points D et E respectivement. Calculer les valeurs algébriques des vecteurs d'origine D ou E et d'extrémités B ou C, en supposant BC orienté.

51 Un triangle ABC a pour côtés :

$$a = 3^m \qquad b = 5^m \qquad c = 7^m$$

1° Calculer les segments déterminés par les bissectrices sur les côtés opposés.

2° Calculer les rapports dans lesquels le centre du cercle inscrit partage les bissectrices.

52 On considère un cercle de diamètre AB; soit PQ une corde perpendiculaire à AB et M un point quelconque du cercle, C et D les points où MP et MQ rencontrent AB respectivement. Montrer que le quaterne (A, B; C, D) est harmonique.

53 A et B étant deux points fixes, déterminer sur AB les points C et D tels que le quaterne (A, B; C, D) soit harmonique et, de plus, que CD $= l$, l étant une longueur donnée. Discuter.

54 Deux cercles (O, R) et (O′, R′) se coupent à angles droits; montrer que tout diamètre de l'un est divisé harmoniquement par l'autre.

55 Sur une droite Δ sont situés deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$, extérieurs l'un à l'autre; est-il possible de déterminer sur Δ des points C et D tels que les quaternes (A, B; C, D) et (A′B′; C, D) soient harmoniques tous deux?

56 Construire un triangle ABC connaissant a, h_a et $\dfrac{b}{c} = k$.

57 On considère un pentagone régulier convexe ABCDE; l'axe de symétrie OA coupe BE et CD aux points P et Q respectivement; montrer que le quaterne (A, O; P, Q) est harmonique.

58 Soit un triangle isocèle ABC (AB = AC); le cercle tangent en B à AB et en C à AC coupe la hauteur AH en D et E. Montrer que le quaterne (A, H; D, E) est harmonique.

59 Construire un triangle ABC connaissant les longueurs de la bissectrice intérieure de l'angle A et des deux segments déterminés par cette bissectrice sur le côté BC.

60 Construire un cercle passant par deux points donnés et orthogonal à un cercle donné.

61 On considère un trapèze inscrit dans un cercle (Γ) et circonscrit à un cercle (γ). Ce trapèze ABCD, de bases AB et CD, est isocèle. Soient O et I les centres de (Γ) et (γ), M le point de contact de BC et (γ), OK la perpendiculaire menée de O à BC, MQ la perpendiculaire menée de M à OI et P son intersection avec OK, T le point de rencontre de BC et OI.

1° Démontrer que le cercle de diamètre BC est tangent en I à OI, et que la puissance de T par rapport à (Γ) est IT^2.

2° Démontrer que les points B, C, M, T, forment un quaterne harmonique, que $IK^2 = OK \cdot IM$ et que l'angle OBP est droit.

62 Soient AB et AC deux cordes d'un cercle. Démontrer que les droites AB et AC divisent harmoniquement le diamètre perpendiculaire à BC.

63 Soit l'équation du second degré en x :

$$f(x) = x^2 - 2(m-1)x + m - 1 = 0.$$

1° Déterminer m de manière que cette équation ait deux racines et que ces racines soient de signes contraires.

2° Déterminer m de manière que cette équation ait deux racines égales. Pour chaque valeur de m trouvée, calculer les racines; marquer les points A et B figuratifs de ces racines sur un axe $x'Ox$.

3° Quand les deux racines x' et x'' sont inégales, montrer qu'il existe entre x' et x'' une relation indépendante de m. Quelle est la nature de cette relation.

4° On marque sur le même axe $x'Ox$ les points C et D d'abscisses x' et x''. Montrer que ces points sont toujours conjugués harmoniques par rapport à A et B.

64 Sur une droite Δ on considère trois points fixes ABC, dans cet ordre; soient P, Q, R les conjugués de l'un des points A, B, C, pour les deux autres; montrer que le quaterne (Q, R; A, P) est harmonique.

CHAPITRE V

FAISCEAUX HARMONIQUES. POLAIRE D'UN POINT POUR DEUX DROITES CONCOURANTES OU PARALLÈLES

Un faisceau de droites est un ensemble de droites situées dans un même plan et passant par un même point appelé sommet du faisceau. Les droites de cet ensemble sont les rayons du faisceau.

Faisceau harmonique : C'est le faisceau de quatre droites qui joint les points d'un quaterne harmonique à un point du plan non situé sur le support du quaterne, ou encore à un point à l'infini non appartenant au support du quaterne. Les rayons passant par deux points conjugués sont appelés rayons conjugués (fig. 20).

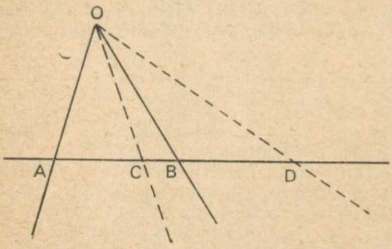

Fig. 20.

Un faisceau harmonique se note : (OA, OB ; OC, OD) ou (O ; AB, CD).

Propriété fondamentale des faisceaux harmoniques.

Toute sécante parallèle ou non au support du quaterne de base détermine avec les rayons du faisceau des points formant un nouveau quaterne harmonique.

Propriété particulière aux faisceaux harmoniques de droites concourantes.

Toute parallèle à l'un des rayons du faisceau est coupée en parties égales par les trois autres et réciproquement (fig. 21). CE = EF.

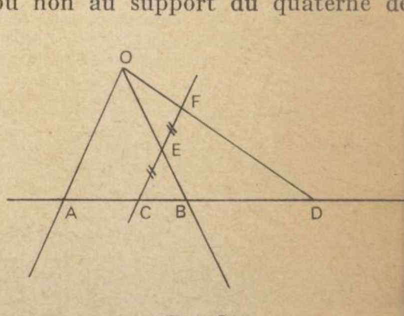

Fig. 21.

Condition d'harmonicité.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un faisceau de quatre droites soit harmonique est que toute parallèle à l'un des rayons coupe les trois autres en trois points dont l'un est le milieu du segment déterminé par les deux autres.

Construction du rayon conjugué d'un rayon donné.

Si xOy est un angle et Oz un rayon issu de O, le rayon Ot conjugué de Oz, formant avec Ox Oy et Oz un faisceau harmonique s'obtient simplement en menant par un point M de Oz les parallèles MP et MQ à Oy et Ox; la direction PQ est celle du rayon Ot conjugué de Oz (fig. 22).

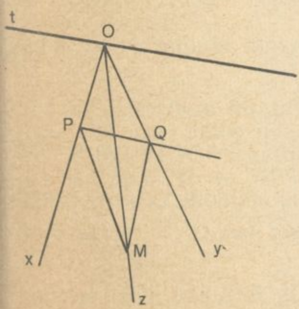

FIG. 22.

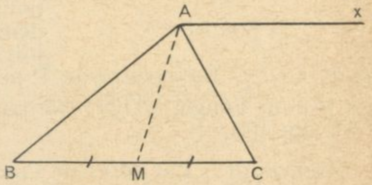

FIG. 23.

Faisceaux harmoniques particuliers.

1° De la construction du rayon Ot conjugué de Oz du paragraphe précédent on remarque que OM est médiane du triangle OPQ; donc :

Dans tout triangle ABC le rayon parallèle à la base BC mené par A est conjugué de la médiane issue de A (fig. 23).

2° Pour qu'un faisceau harmonique ait deux rayons rectangulaires, il faut et il suffit que ces rayons soient bissectrices des angles formés par les deux autres.

3° Deux droites concourantes et leurs bissectrices forment un faisceau harmonique.

Polaire d'un point pour deux droites.

1° *Droites concourantes :* $x\widehat{O}y$ étant un angle fixe et P un point de son plan sur chaque sécante passant par P et coupant les côtés de l'angle en M et N respectivement, P a un conjugué Q tel que le quaterne (P, Q; MN) soit harmonique; le lieu de Q est le rayon

OQ conjugué de OP pour l'angle xOy. Ce rayon s'appelle la polaire de P pour l'angle $x\widehat{O}y$ (fig. 24).

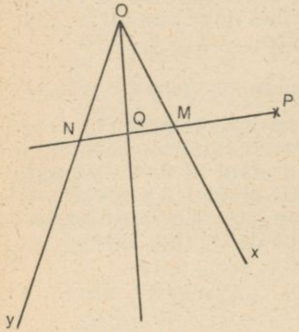

Fig. 24.

Inversement toute droite telle que OQ est la polaire d'un point P qui s'appelle le pôle de cette droite. Toute polaire étant rayon conjugué du rayon OP, à trois points alignés correspondent des polaires concourantes et réciproquement.

Si un point A est situé sur une droite D, la polaire de A passe par le pôle de D.

Construction simple de la polaire d'un point.

$x\widehat{O}y$ étant un angle fixe et P un point de son plan, par P traçons deux sécantes PMN et PM′N′ puis joignons MN′ et M′N qui se coupent en O′. La polaire de P pour xOy coïncide avec la polaire de P pour l'angle $M\widehat{O'}N$; elle passe donc par O′; c'est la droite OO′ (fig. 25).

Remarque : Les côtés de l'angle $x\widehat{O}y$ forment avec les deux sécantes PMN et PM′N′ un quadrilatère complet dont les trois diagonales sont OP, M′N ET MN′; or le quaterne (N′, M; O′, R) est harmonique; donc toute diagonale d'un quadilatère complet est divisée harmoniquement par les deux autres.

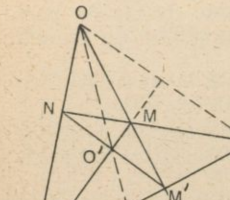

Fig. 25.

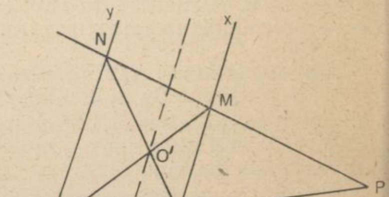

Fig. 26.

2° *Droites parallèles :* $x'x$ et $y'y$ étant deux parallèles et P un point du plan non situé sur l'une d'elles, nous appelons encore polaire de P pour ces parallèles $x'x$ et $y'y$ la parallèle à leur direction commune rayon conjugué de la parallèle passant par P.

La construction pratique est analogue à celle des droites concourantes (fig. 26).

Lieu des points dont le rapport des distances à deux droites fixes concourantes ou paralèlles est constant.

$$\frac{MH}{MK} = \frac{M'H'}{M'K'} = k.$$

Le lieu se compose de deux rayons conjugués pour l'angle des deux droites. Elles forment avec $x'x$ et $y'y$ un faisceau harmonique (fig. 27).

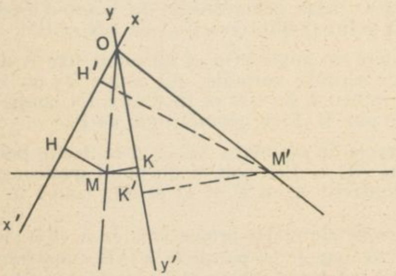

Fig. 27.

Si $x'x$ et $y'y$ sont parallèles, le lieu est constitué par les deux parallèles à leur direction commune formant avec les deux droites $x'x$ et $y'y$ un faisceau harmonique à rayons parallèles.

EXERCICES ET PROBLÈMES

65 On donne trois points fixes ABC alignés et un cercle variable passant par A et B; la droite joignant le milieu I de l'un des arcs AB au point C recoupe le cercle en M. Lieu géométrique de M.

66 On considère deux faisceaux harmoniques (OA, OB; OC, OD) et (O'A', O'B'; O'C', O'D') dont les rayons OA et O'A' sont confondus; soient β, γ et δ les points d'intersection respectifs des rayons OB et O'B', OC et O'C', OD et O'D'; montrer que $\beta\gamma\delta$ sont alignés.

67 Soient un triangle ABC et la médiane AM. On considère le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et le point J tel que $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA}$.

1° Montrer que le faisceau (C; AB, IJ) est harmonique.

2° AM et CI se coupent en O. Montrer que :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = 0 \quad \text{et que :} \quad \overrightarrow{IO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IC}.$$

68 On donne un triangle ABC, ses hauteurs $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, et son orthocentre H. $A\alpha$ et $\beta\gamma$ se coupent en I.

1° Montrer que les hauteurs du triangle ABC sont bissectrices du triangle $\alpha\beta\gamma$.

2° Démontrer que le faisceau (β; AH, $I\alpha$) est harmonique.

3° Démontrer la relation :

$$\frac{2}{\overline{AH}} = \frac{1}{\overline{AI}} + \frac{1}{\overline{A\alpha}}.$$

69 On considère un angle $x\widehat{O}y$ et sur Oy deux points fixes A et B; sur Ox on envisage deux points M et N qui varient en restant symétriques pour O. Lieu géométrique du point d'intersection P de AM et BN et du point Q d'intersection de AN et BM.

70 On considère un angle $x\widehat{O}y$ et un point fixe A de son plan; par A on mène une sécante variable, qui coupe Ox en M et Oy en N; on joint N au milieu I de OA et la droite IN coupe en P la parallèle à OA menée par M. Lieu géométrique de P.

71 Soit un cercle de diamètre AB et Δ la droite perpendiculaire en C à AB tel que AB = BC; soit M un point quelconque du cercle; MA et MB rencontrent Δ en P et Q et AQ coupe le cercle à nouveau en N.

1° Lieu géométrique des projections de A et B sur MN.

2° On mène par P la parallèle à AB; montrer que le quaterne (R, B; M, Q) est harmonique si R est l'intersection de la parallèle à AB menée par P avec BM.

3° Par Q on mène la parallèle à AB qui coupe BP en S. Montrer que le faisceau (Q; BS, NP) est harmonique.

72 Soient un triangle ABC, la bissectrice intérieure $A\alpha$, le centre I du cercle inscrit, le centre J du cercle exinscrit dans l'angle A.

1° Montrer que (A, α; I, J) est un quaterne harmonique.

2° En déduire (en projetant sur la hauteur AH) la relation :

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{2}{h}.$$

73 Soient MAB un triangle, O le milieu de AB, (Γ) le cercle circonscrit qui recoupe OM en Q et la parallèle à AB menée par Q en P; soit de plus ω l'intersection de AB et de la tangente en M à (Γ).

Montrer que MP et MQ ont les mêmes bissectrices que MA et MB, et que AB est bissectrice de $M\widehat{O}P$.

Prouver que le pôle de AB pour (Γ) est sur MP.

74 On donne 3 points alignés ABC (AB = BC). On trace le cercle de diamètre AB, la perpendiculaire (Δ) en C à AB. Un point H décrit le cercle. Les droites AH et BH rencontrent (Δ) en P et Q. Les perpendiculaires Px et Qy à (Δ) sont rencontrées respectivement en M par QB et N par PB.

1° Démontrer que : (M, B, H, Q) = — 1.

2° Montrer que M, A, N sont alignés.

3° Montrer que QA et PN se coupent en K sur le cercle.
4° Montrer que KH passe par un point fixe.
5° Montrer que KM passe par un point fixe.

75 On considère un point A et une droite (D); on désigne par (D') la parallèle à (D) menée par A, par (Δ) la parallèle à (D) et (D') équidistante de ces deux droites et par $2a$ la distance de (D) à (D'). A tout point M du plan on fait correspondre le point M' de AM conjugué harmonique de M par rapport à A et au point d'intersection de AM et (D).

Montrer que lorsque M décrit une droite (δ), M' décrit une droite (δ') qu'on appellera homologue de (δ). Montrer qu'en général (δ) et (δ') coupent (D') en deux points symétriques par rapport à A. Cas de (δ) parallèle à (D).

76 Soient deux droites Δ et Δ' telles que $(\Delta, \Delta') = 60°$. Lieu des points M dont le rapport des distances aux deux droites égale $\frac{1}{2}$.

CHAPITRE VI

LA DROITE EN REPÈRE QUELCONQUE DANS LE PLAN AFFINE R^2

Plan R^2. C'est l'ensemble de tous les couples $(x; y)$ de deux nombres réels; le couple $(x; y)$ est un point. L'image de $(x; y)$ est un point M géométrique dans le plan affine R^2 rapporté à des axes quelconques.

Les droites du plan R^2 sont des ensembles de points $(x; y)$ qui satisfont à des lois de composition.

Si $\overline{\omega m}$ est l'abscisse d'un point d'un axe $t'\omega t$ de vecteur unitaire $\vec{u}$, d'origine ω et si $\overline{\omega m} = t$, à l'ensemble des points m correspond l'ensemble des valeurs de t. Définissons une application f de l'axe $t'\omega t$ dans le plan R^2 traduite par les relations :

$$\begin{cases} x = \alpha t + \beta \\ y = \alpha' t + \beta' \end{cases}$$

α et α' n'étant pas nuls tous deux, nous avons :

$$\left| \begin{array}{lll} \forall\, t \in r & \Rightarrow & \exists\, m \in R \\ \forall\, m \in R & \Rightarrow & \exists\, M\,(x; y) \in R^2. \end{array} \right.$$

L'ensemble des deux relations précédentes constitue une représentation paramétrique d'une droite; elles sont de la forme :

$$\begin{cases} x = f\,(t), \\ y = g\,(t). \end{cases}$$

Equation implicite d'une droite : On l'obtient en éliminant t entre les deux relations précédentes.

1° Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha' \neq 0$, on a pour l'équation :

$$\alpha' x - \alpha y + \alpha\beta' - \beta\alpha' = 0$$

équation de la forme $ux + vy + w = 0$.

2° Si $\alpha = 0$ $x = \beta$ est l'équation de la droite.
3° Si $\alpha' = 0$ $y = \beta'$ est l'équation de la droite.

Si $v \neq 0$ l'équation $ux + vy + w = 0$ peut s'écrire

$$y = -\frac{u}{v}x - \frac{w}{v}$$

de forme $y = ax + b$

a est *le coefficient angulaire* de la droite,

b est *l'ordonnée à l'origine.*

Droite définie par deux points A_1 $(x_1; y_1)$ et A_2 $(x_2; y_2)$.

Coefficient angulaire : $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Intersection de deux droites :

$$\begin{aligned} &(D) \quad ux + vy + w = 0 \\ &(D') \quad u'x + v'y + w' = 0 \end{aligned}$$

1° $\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \neq 0$ (D) et (D′) se coupent en M $(x; y)$ x et y étant déterminés par les formules de Cramer :

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} w & v \\ w' & v' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}} \qquad y = -\frac{\begin{vmatrix} u & w \\ u' & w' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}}$$

2° $\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = 0$ $\begin{cases} \dfrac{u}{u'} = \dfrac{v}{v'} \neq \dfrac{w}{w'} \Rightarrow D \cap D' = \varnothing & \text{(0 point commun)} \\ \dfrac{u}{u'} = \dfrac{v}{v'} = \dfrac{w}{w'} \Rightarrow D = D' & \text{(infinité de points communs).} \end{cases}$

Parallélisme de deux droites.

au sens strict si $D \cap D' = \varnothing$.

au sens large si $\begin{cases} D = D' \text{ ou si } D \cap D' = \varnothing \\ \text{c'est-à-dire } a = a'. \end{cases}$

Droite définie par un point A (x_0, y_0) et son coefficient a.

Toute droite d'équation $y = a'x + b'$ est parallèle à D si $a' = a$ d'où $y = ax + b'$ et par suite, si elle passe par A : $y_0 = ax_0 + b'$. Cette droite est donc unique; son équation est alors :

$$\boxed{y - y_0 = a(x - x_0)}$$

Par un point A il passe une droite (D′) et une seule parallèle à une droite (D).

Un plan qui possède la propriété précédente d'existence et d'unicité est un espace euclidien.

Graphe d'une droite dans le plan affine R^2

Généralement on figure dans le plan deux axes $x'Ox$ et $y'Oy$ de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ces axes sont les images des droites $y = 0$ et $x = 0$. Soit un point $(x; y)$; son image M s'obtient en marquant sur $x'x$ le point P tel que $OP = x$ et sur $y'y$ le point P tel que $OP = y$ (fig. 28).

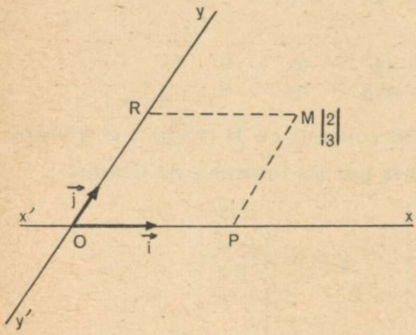

Fig. 28.

Les parallèles menées par P à $y'y$ et par R à $x'x$ se coupent en M, point qui est l'image du point $(x; y)$.

L'image d'une droite est la droite qui joint les images de deux points $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$. Cette droite est le graphe de l'équation de la droite. On peut vérifier que le graphe contient tous les points de la doite, de sorte qu'une équation de droite admet un graphe unique dans le plan affine R^2.

Coefficients directeurs d'une droite. Pente.

Ce sont les composantes scalaires a et b d'un vecteur $\vec{V}$ parallèle à la droite, ce qui revient à considérer le point A extrémité du vecteur $\overrightarrow{OA}$ lié, dont a et b sont les composantes scalaires.

a et b sont les coefficients directeurs de la droite λa et λb sont aussi coefficients directeurs si $\lambda \neq 0$. En particulier si $a = 1$ les coefficients s'appellent cosinus directeurs et $\overrightarrow{OA}$ est le vecteur directeur de la droite (fig. 29).

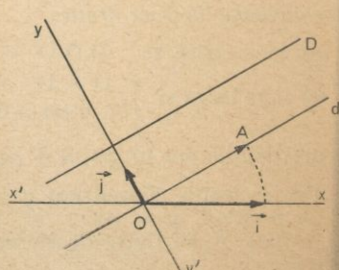

Fig. 29.

Lorsque l'équation de la droite est $y = ax + b$, le point A $(1, a)$ définit la droite d passant en O et de coefficient angulaire a. En système orthonormé a sera appelée pente de la droite

EXERCICES ET PROBLÈMES

77 Quel est le coefficient angulaire de la droite définie par les points

$$A\ (2;\ -1) \quad \text{et} \quad B\ (3;\ 2)?$$

78 Même problème avec :

$$A\left(\frac{4}{3};\ 1\right) \text{ et } B\left(\frac{2}{3};\ -\frac{1}{2}\right).$$

79 Même problème avec :

$$A\ (\sqrt{2} + 1\ ;\ 0) \text{ et } B\ (\sqrt{2} - 1\ ;\ 2).$$

80 Les droites

$$\begin{array}{ll} (D) & ux + vy + w = 0 \\ (D') & 5\,ux + 5\,vy + 5\,w = 0 \end{array}$$

sont-elles parallèles?

81 Soit le point A (3; — 2) et la droite (D) $y = x + 3$. Déterminer la droite (D′) passant par A et parallèle à (D).

82 On donne la droite : (D) $y = -x\sqrt{3} + 2$ et le point A $\left(2\ ;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
Déterminer la parallèle à (D) menée par A.

83 On considère les points : A (2; 3) et B (— 1; — 2); par le point C (1; 2) on mène la parallèle à AB; quelle est l'équation de cette parallèle?

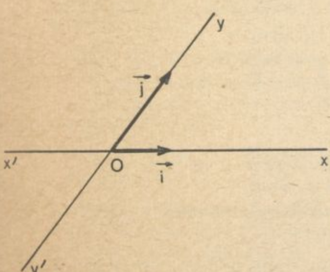

Fig. 30.

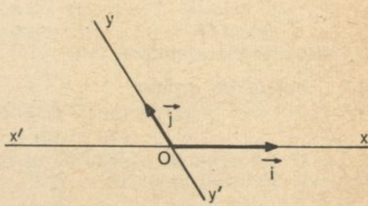

Fig. 31.

84 Sur une figure analogue à la figure 30 ci-contre marquer les points : A $\left(2\ ;\ \frac{3}{2}\right)$, B (— 1; 2), C (— 3; — 1). Tracer les droites AB, BC, CA; quels sont les coefficients angulaires de ces trois droites?

85 Même problème relatif à la figure 31.

86 Même problème sur la figure 32.

87 On donne les points : A $\left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$ et B $\left(-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$. Tracer la droite AB sur la figure 30. Equation de cette droite.

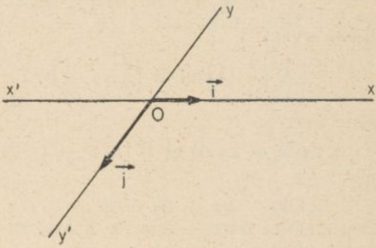

FIG. 32.

88 Sur la figure 32 tracer les droites

$$(D) \quad y = \frac{x}{3} - 1$$
$$(D') \quad x - 3y - 2 = 0.$$

Quelle remarque peut-on faire?

89 1° Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - y + 6 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0. \end{cases}$$

2° Dans le plan affine R^2 tracer les droites

$$(D) \quad 2x - y + 6 = 0$$
$$(D') \quad x + 2y - 7 = 0.$$

Etudier l'ensemble $D \cap D'$.

90 Soient les droites :

$$(D) \quad (m+1)x + (m-1)y = m$$
$$(D') \quad mx + (m+1)y = m - 1.$$

1° Pour quelle valeur de m ces droites sont-elles parallèles?
2° Peut-on avoir $D = D'$?

91 On fait d'un axe $t'\omega t$ l'application dans le plan R^2 à l'aide des relations :

$$x = 3t + 2$$
$$y = -2t + 1.$$

Quelle est l'image de $t'\omega t$?

92 L'équation : $2(m-2)y - mx + m + 3 = 0$ représente une famille de droites.
1° Montrer que toutes ces droites passent par un point fixe.
2° Quelle est la droite qui passe par l'origine?
3° Déterminer la droite de coefficient angulaire -1.