JEAN-PAUL DELAHAYE

3,14159

Le fascinant nombre π

Belin

En partenariat avec POUR LA SCIENCE

Jean-Paul Delahaye

Le fascinant nombre π

Belin

La première édition de cet ouvrage a été distinguée par le **Prix d'Alembert 1997** pour la diffusion de la connaissance des mathématiques vers un large public, décerné par la Société Mathématique de France, et par le **Prix de la culture scientifique** du ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Technologie en 1999.

ISBN 978-2-410-01446-4
170 bis, boulevard du Montparnasse, 75680 Paris cedex 14

AVANT-PROPOS

« Explorer π*, c'est comme explorer l'Univers... »*
David Chudnovsky

« ... ou plutôt explorer le monde sous-marin, car nous sommes dans la vase et tout semble sans forme. Nous avons besoin d'une lampe, et notre ordinateur est cette lampe. »
Gregory Chudnovsky

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ \ldots$$

Le nombre π est au centre d'un cercle mathématique extraordinaire, mais si grand que personne, sans doute, ne l'explorera entièrement. Ce livre vous en fait parcourir rapidement le tracé avec l'espoir de vous distraire tout en vous montrant comment, après 4000 ans de travail et de découvertes merveilleuses, les mathématiciens arrivent encore à trouver de nouvelles propriétés de π. Malgré les connaissances accumulées, ce nombre étincelant reste mystérieux, et certaines questions élémentaires à son sujet semblent même hors de portée des mathématiques actuelles.

Dans ce cercle autour de π, vous rencontrerez :
– *la géométrie*, car il ne faut jamais oublier que π est né des réflexions des anciens géomètres. Aujourd'hui encore, on peut trouver du plaisir dans les judicieuses constructions à la règle et au compas qui obsédèrent des générations de mathématiciens.
– *l'analyse*, avec son cortège de formules magiques – sommes infinies, produits infinis, fractions continues, racines emboîtées –, certaines propres à faciliter le calcul, d'autres non (comment les distinguer ?), mais qui semblent toutes des perles arrachées miraculeusement à l'océan illimité des mathématiques.
– la belle *algèbre* des nombres irrationnels et transcendants, qui permit de comprendre, après 2 000 ans de vaines et parfois divagantes recherches, que la *quadrature du cercle* n'a pas de solution.
– la toute nouvelle *théorie de la complexité* et celle des *suites aléatoires* ; vous apprendrez que le hasard que l'on croit déceler dans les décimales de la constante d'Archimède ne se laisse pas facilement attraper.
– les machines à calculer, puis les ordinateurs sans lesquels les recherches actuelles sur π, même les plus abstraites, n'avanceraient plus guère ; vous découvrirez que l'obsession, en apparence absurde, qui pousse à calculer le plus grand nombre possible de décimales de π, est utile au progrès général des mathématiques et possède d'importantes retombées pratiques.

Vous rencontrerez aussi quelques fous – tels ceux qui apprennent des milliers de décimales de π – et quelques génies – les mêmes parfois –, et vous subirez le charme des questions philosophiques que font naître les mathématiques et qui se concentrent sur π avec obstination.

Ce cercle autour de π renferme bien d'autres choses encore, que je n'énumérerai pas ici : pour les découvrir, il vous faut l'arpenter !

π pour tous

Les aspects de π étant infiniment variés, ce livre concerne tout le monde : certaines parties s'adressent au non-mathématicien, d'autres demandent un petit effort ou une certaine familiarité avec les mathématiques. Nous avons pensé à trois types de lecteurs :

– Les *curieux* qui ont oublié tout ce qu'ils apprirent à l'école en mathématiques trouveront, au début de chaque chapitre, de quoi répondre à une partie de leurs interrogations.

– Les *curieux* qui gardent quelques souvenirs de leur classe de terminale, et qui aimeraient faire connaissance avec π de manière plus approfondie, liront entièrement le corps des chapitres, ce qui les entraînera jusqu'aux découvertes récentes.

– Quant aux *curieux* qui jugent que les mathématiques enseignées après le lycée ne sont pas trop absconses, ils liront les annexes des chapitres, rassemblées en fin d'ouvrage. Ils verront ainsi comment on établit que π est transcendant, ou pourquoi la probabilité que deux nombres soient premiers entre eux est liée à π. Aucune démonstration n'est délicate, mais π n'est pas docile et son mystère nous fait pénétrer de plain-pied dans l'univers mathématique.

Puisque π est présent dans presque tous les domaines des mathématiques, il était impossible d'être exhaustif. C'est pourquoi nous avons fait des choix : nous avons privilégié ce qui a été découvert ou réalisé sur π depuis 30 ans, et nous avons limité l'espace consacré à son histoire (qui occupe tout de même plusieurs chapitres) ; nous avons insisté plus particulièrement sur les questions liées à la complexité de π : complexité en calcul (algorithmes de multiplication rapides, méthodes à convergence quadratique, quartique, etc.), complexité statistique (normalité de π en base 2, 10 ou autre), place de π dans le classement des nombres selon leur « difficulté » (nombres rationnels, algébriques, transcendants, calculables, aléatoires, etc.). Peut-être réussirons-nous ainsi à convaincre le lecteur que le monde mathématique vit avec plus d'intensité que jamais, et que l'apport des trente dernières années de recherche à la compréhension du mystérieux et inépuisable nombre π vaut bien ceux des siècles précédents.

La nouvelle édition du livre reprend, en le mettant soigneusement à jour, l'essentiel du texte de l'édition de 1997 qui constitue les dix premiers chapitres. Ils ont été complétés par trois chapitres entièrement nouveaux. Le premier rend compte de l'actualité récente dans la course aux décimales, le second évoque et détaille quelques amusements et fantaisies autour de π, et le troisième présente de nouvelles méthodes de calcul du nombre π qui, sans être à l'origine de nouveaux records, méritent cependant l'attention. Merci aux éditions Belin pour le patient travail réalisé à l'occasion de cette nouvelle édition.

Lille, le 30 mars 2018
Jean-Paul Delahaye

CHAPITRE 1

Premières rencontres

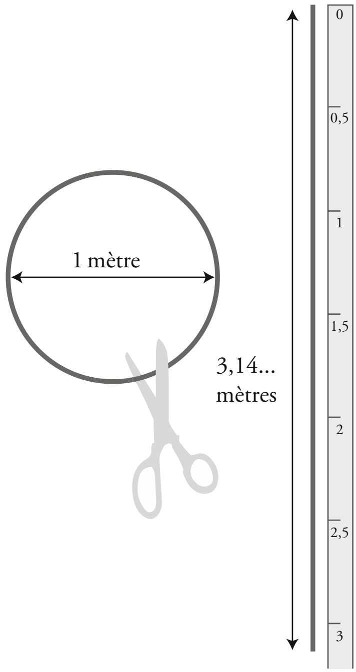
Définir et évaluer π

Pour commencer, le mieux est d'aborder π franchement : nous allons examiner les diverses propositions de définition de π, et les méthodes les plus simples que l'on a imaginées pour l'évaluer. Ce nombre π est-il une constante mathématique ou physique ? Confrontés à cette délicate question, nous distinguerons soigneusement les méthodes de calcul qui dépendent d'une hypothèse physique de celles qui n'en dépendent pas.

Premières rencontres avec π

Comment les hommes de la préhistoire et de l'Antiquité ont-ils rencontré π ?

Sans doute comme nous, au détour d'un problème banal de bricolage, de jardinage ou d'artisanat : par exemple, lorsque nous



1. Quand on déroule un cercle de corde de rayon r, on obtient un segment de droite de longueur $2\pi r$. Dans le cas d'un cercle de une unité de diamètre, la longueur de corde est égale à π.

cherchons à déterminer la longueur de corde nécessaire pour faire le tour d'un gros arbre, ou le coût du ruban qui décorera un chapeau ou un abat-jour, ou le nombre de planches qu'il faut mettre côte à côte pour obtenir une barrique de rayon donné, ou la longueur du revêtement qu'il faut coller à la roue d'une charrette pour la protéger, ou la surface de sol que délimite un cercle tracé au cordeau, ou encore la quantité d'eau que contient un réservoir cylindrique, conique ou sphérique, etc.

Ces exemples illustrent la plus merveilleuse propriété de π : il est là tout proche, partout avec son infinie profondeur mathématique. Même si nous n'aimons pas les mathématiques, même si nous cherchons à tout prix à les fuir, π nous rattrapera et elles avec. Nous ne choisissons pas de nous intéresser à π, c'est lui, que nous le voulions ou non, qui vient nous voir. Une fois qu'il s'est présenté, impossible de s'en défaire : π nous obsède et nous entraîne dans le monde fascinant de l'ordre géométrique et abstrait.

Essayons d'en donner une définition. La plus simple, semble-t-il, s'énonce : π est le rapport entre le périmètre $\mathcal{P}$ d'un cercle et son diamètre D (le double du rayon r)*(figure 1)*. Écrivons cette première formule :

$$\pi = \frac{\mathcal{P}}{D} = \frac{\mathcal{P}}{2r}.$$

Les cercles du monde physique et le π *du physicien*

Est-on sûr que le rapport $\mathcal{P}/2r$ reste le même quand la taille du cercle change ? Autrement dit, est-ce que π est défini sans ambiguïté par l'énoncé ci-dessus ?

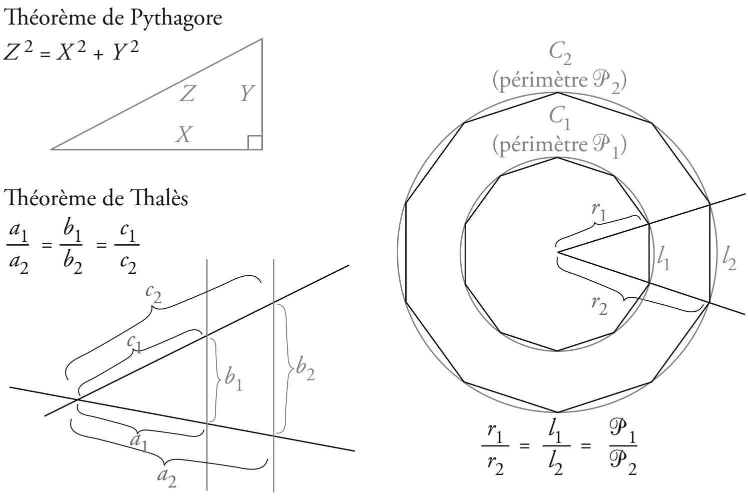
La réponse habituellement donnée est *oui* ; on démontre qu'il en est ainsi dans tout espace où une notion de distance existe et où le théorème de Thalès est vérifié.

Il faut disposer d'une notion de distance pour parler de cercle, puisqu'un cercle est l'ensemble des points se trouvant à une distance constante (nommée rayon) d'un point fixe (nommé centre). Quant au théorème de Thalès, en voici l'énoncé :

Deux droites parallèles découpent sur deux droites concourantes des segments dont les rapports des longueurs sont égaux.

Pour être en mesure de mener des raisonnements géométriques, on suppose que la distance dont on dispose vérifie le théorème de Pythagore *(le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés).*

Démontrer l'invariance du rapport $\mathcal{P}/2r$



Quand on se place dans un espace où la notion de distance vérifie le théorème de Pythagore et celui de Thalès, on démontre l'invariance du rapport $\mathcal{P}/2r$ quand le rayon r du cercle varie.
Supposons deux cercles concentriques C_1 et C_2 où sont inscrits deux polygones réguliers de même nombre de côtés. Par le théorème de Thalès, on montre que le rapport de leurs côtés (et par conséquent celui de leurs périmètres) est égal au rapport des rayons r_1 et r_2. En prenant des polygones aux côtés de plus en plus nombreux, on tend vers les périmètres $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ des deux cercles, et on obtient l'égalité $r_1/r_2 = \mathcal{P}_1/\mathcal{P}_2$.

Sous cette hypothèse, on établit sans peine que $\mathcal{P}/2r$ ne dépend pas du rayon du cercle. En effet, il découle du théorème de Thalès que deux polygones réguliers inscrits dans des cercles concentriques et possédant le même nombre de côtés ont des périmètres proportionnels aux rayons des cercles. En « sautant » des périmètres des polygones aux périmètres des cercles par un passage à la limite (c'est-à-dire en envisageant des polygones avec un nombre de côtés de plus en plus grand), on trouve que les circonférences des deux cercles sont dans le même rapport avec leurs rayons ; autrement dit, $\mathcal{P}/2r$ ne dépend pas du cercle. Nous avons ainsi défini une constante : le « π du périmètre ».

Les espaces mathématiques où ce raisonnement est possible sont nommés *espaces euclidiens.* Il en existe des définitions savantes et compliquées, mais nous n'allons pas nous lancer dans l'axiomatique !

On admet en général que notre espace physique est un espace euclidien, et donc que π est une constante physique, mesurable expérimentalement à partir d'un cercle *quelconque* pour lequel on évalue $\mathcal{P}/2r$.

En réalité, les choses ne sont pas si simples. D'après la théorie de la relativité générale d'Einstein, il n'est pas vrai que notre espace soit parfaitement euclidien. Par conséquent, dans « notre » monde physique, le rapport $\mathcal{P}/2r$ n'est pas indépendant du cercle que l'on considère.

Pour comprendre la raison de cette variation du rapport $\mathcal{P}/2r$ dans les espaces décrits par la relativité générale, il suffit de se ramener à la dimension deux, où les équivalents des espaces courbes qu'envisagent les physiciens relativistes sont les surfaces non planes, par exemple les sphères.

Sur une sphère très grande – pensez à la Terre – , si vous tracez des petits cercles, la quantité $\mathcal{P}/2r$ est constante aux erreurs de mesure près. En revanche, si vous tracez un grand cercle, le centre de votre tracé n'est plus du tout dans le même plan que la circonférence du cercle, et la valeur r que vous mesurez (si vous ne prenez en compte que les points de la sphère) est surévaluée, ce qui conduit à une diminution du rapport $\mathcal{P}/2r$. Plus les cercles que vous considérez sont grands, plus $\mathcal{P}/2r$ est petit. Autre changement par rapport au plan : sur une sphère, il n'y a pas de cercle aussi grand que l'on veut. Le plus grand est l'équateur !

Dans notre espace, qui est l'équivalent tridimensionnel d'une sphère ou même d'une surface plus compliquée, le même phénomène se produit vraisemblablement. Heureusement, pour tous les cercles que nous rencontrons usuellement, les erreurs de mesure sont bien supérieures à cette déviation relativiste, qui échappe pour l'instant à toute évaluation expérimentale réelle.

Un physicien m'a fait remarquer que π reste malgré tout définissable géométriquement dans l'espace de la relativité générale, comme la limite du rapport $\mathcal{P}/2r$ quand r tend vers 0. On pourrait lui rétorquer que, suivant les principes de la mécanique quantique, les très petites longueurs (et donc les très petits cercles) n'ont pas de réalité physique ; par conséquent, il est impossible de définir π dans notre monde physique comme la limite géométrique de $\mathcal{P}/2r$. Dans cette histoire, comme souvent, la relativité jette le trouble et la mécanique quantique interdit de retomber sur ses pieds quand on croit y arriver.

Le « π physique » est d'ailleurs très instable : puisque la courbure de l'espace varie en fonction des masses présentes, le rapport $\mathcal{P}/2r$ du cercle que vous avez dessiné sur votre feuille change quand vous passez la main au-dessus !

Si π était une constante physique, et que l'on cherchait à en améliorer la connaissance uniquement pour faire de la physique, ces difficultés seraient fondamentales et ne pourraient pas être négligées. En fait, π est une constante mathématique, et c'est à sa place dans l'univers mathématique que nous allons nous intéresser.

Pour terminer sur cette question, remarquons que, même si l'Univers physique était parfaitement euclidien, et que l'on cherchait à évaluer le périmètre de la partie visible de l'Univers à partir de son rayon avec une précision équivalant à la taille d'un atome d'hydrogène, alors la connaissance de π avec 40 décimales serait largement suffisante. Comme les 40 premières décimales de π sont connues depuis le début du XVIIIe siècle, le travail de calcul de π serait terminé.

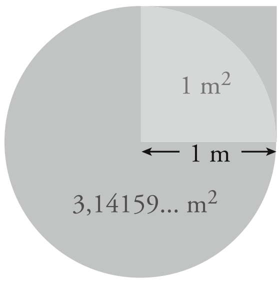
(Notons que, même dans les univers non-euclidiens, π apparaît dans la formule du périmètre : dans la géométrie non-euclidienne du mathématicien russe Nikolaï Lobatchevski, le périmètre d'un cercle est donné par la formule $\mathcal{P} = \pi\, k(e^{r/k} - e^{-r/k})$, où k est une constante qui dépend de l'espace et e la célèbre constante de l'analyse, égale à 2,71828...)

Première définition de π

En résumé, le π dont il est question dans ce livre est celui des mathématiciens, celui des espaces « bien plats », dits *euclidiens* : quelle que soit la taille du cercle considéré dans de tels espaces, le rapport de son périmètre à son diamètre, $\mathcal{P}/2r$, est constant. Le nombre ainsi défini n'est pas une constante *physique*, bien que, pendant des siècles, on se soit trompé sur ce point : avant le XIXe siècle (et la découverte de géométries non euclidiennes par János Bolyai, Bernhard Riemann et Lobatchevski), on ne soupçonnait même pas que l'espace puisse être autrement qu'euclidien. L'hypothèse que l'espace est euclidien, considérée auparavant comme une *évidence absolue*, comme un des fondements mêmes de la raison, s'est révélée discutable, puis fausse (puisque la relativité générale a été confirmée expérimentalement).

Nous connaissons à présent la condition de validité de la première définition de π, la plus naturelle, $\pi = \mathcal{P}/D = \mathcal{P}/2r$;

on déduit de cette formule que π est la longueur en mètres de la circonférence d'un cercle dont le diamètre vaut un mètre.



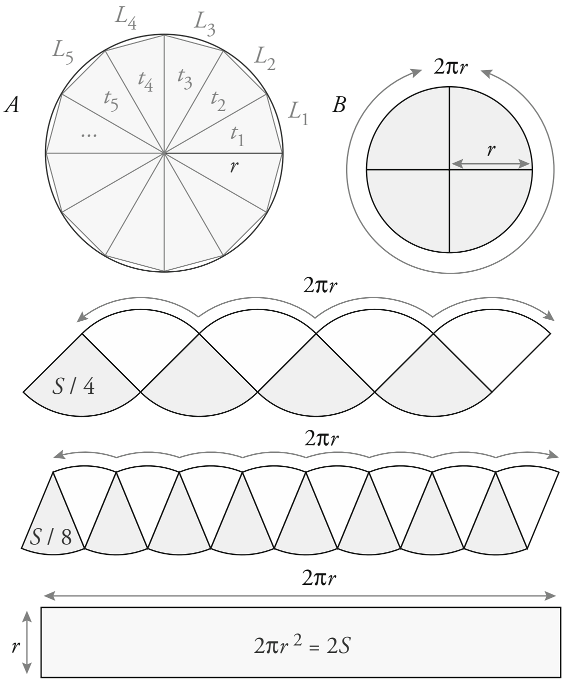
2. La surface d'un disque de un mètre de rayon est exactement π.

Une deuxième définition géométrique de π

Voici une autre définition de ce nombre ubiquiste : π est le rapport de la surface d'un cercle au carré de son rayon, $\pi = S/r^2$. Comme précédemment, on doit supposer l'espace euclidien ; on déduit de cette deuxième formule que π est la surface en mètres carrés d'un cercle de un mètre de rayon.

En lisant le paragraphe précédent, vous avez dû tiquer et vous demander : « c'est bien beau, deux définitions pour un même nombre, mais c'est une de trop ; qu'est-ce qui me prouve que c'est le même nombre π que l'on a ainsi défini ? » Faites attention, car vous avez mis la main dans l'engrenage : vous allez vous lancer dans des raisonnements dont vous ne pourrez plus sortir. Vous étiez prévenu : π est un piège.

Ce premier problème est heureusement facile à résoudre, et la solution en est présentée ci-contre *(figure 3)*. Elle repose sur l'assimilation de secteurs de cercle à des triangles, et sur un passage à la limite. On voit que c'est le même π qui apparaît dans les formules de la circonférence et de l'aire du cercle.



3. De la formule reliant la circonférence d'un cercle à son diamètre, on passe à la formule reliant l'aire d'un cercle à son rayon, où π apparaît de nouveau. On imagine un polygone inscrit dans un cercle *(A)* et possédant un très grand nombre de côtés. Soit $\mathcal{P}$ le périmètre du cercle, valeur approchée par la somme des longueurs des côtés du polygone. La surface du cercle est presque égale à celle du polygone, laquelle est égale à la somme des surfaces des triangles t_i dont les bases sont les côtés L_i du polygone. La surface de chaque étroit triangle t_i, égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur, est peu différente de $rL_i/2$, car la hauteur est assimilable à r. Pour n très grand, la surface du polygone (et celle du cercle) est : $S = (rL_1/2 + rL_2/2 + \ldots + rL_n/2) = r(L_1 + L_2 + \ldots + L_n)/2 = \mathcal{P}r/2$. Comme $\mathcal{P} = 2\pi r$, on trouve $S = \pi r^2$. Le π apparaissant dans la formule de la surface du cercle est bien le même que celui de la formule du périmètre. Cette démonstration géométrique, reposant sur l'idée qu'un polygone ayant un grand nombre de côtés est assimilable à un cercle, peut être rendue parfaitement rigoureuse par les méthodes classiques de passage à la limite de l'analyse. On a également figuré une démonstration purement visuelle du résultat précédent *(B),* où l'on découpe le cercle en secteurs que l'on dispose ensuite en une bande. Cette méthode du réarrangement semble connue depuis l'Antiquité.

Une première définition arithmétique de π

La définition de π à partir de la surface d'un disque permet d'en imaginer une autre, très simple et reposant uniquement sur des calculs avec des nombres entiers. Donnons toutefois de cette méthode purement arithmétique une traduction géométrique.

Dessinons un réseau carré de $(2n + 1) \times (2n + 1)$ points, régulièrement espacés de $1/n$ *(figure 4)*, et comptons ceux de ces points qui sont à une distance du point central inférieure à 1 ; en calculant le rapport de ce nombre au nombre total de points (compris dans un carré de côté 2 centré sur ce même point), on obtient une approximation de π/4 et, en multipliant par 4, une approximation de π.

En faisant correspondre à chaque point un couple d'entiers, on obtient l'approximation s_n, exprimée sous une forme arithmétique :

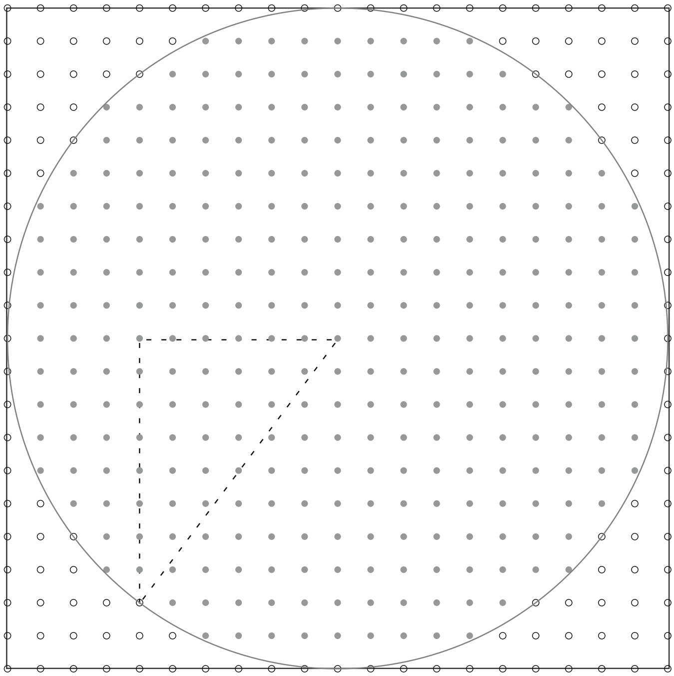
$$s_n = \frac{4}{(2n+1)^2}\left(\text{nombre de couples } (x, y) \text{ tels que } -1 < \frac{x}{n}, \frac{y}{n} < 1 \text{ et } \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2} < 1\right)$$

ce qui peut s'arranger en ne considérant qu'un huitième de cercle :

$$s'_n = \frac{8\,(\text{nombre de couples } (x, y) \text{ tels que } 0 \leq x \leq y \leq n \text{ et } x^2 + y^2 < n^2)}{n^2}$$

Le calcul pour $n = 20$ donne π = 3,16 ; pour $n = 100$, on obtient π = 3,151 et pour $n = 200$, π = 3,146 (on notera dorénavant en gris les décimales inexactes de π).

Les termes de ces suites sont des approximations de la surface du cercle de centre (0, 0) et de rayon 1 dans le plan mathématique. Comme le plan mathématique est euclidien *à coup sûr,* cette définition ne repose sur aucune hypothèse physique tout en étant parfaitement précise et en ne faisant intervenir que des nombres entiers.



4. Méthode de détermination de π ne reposant pas sur une hypothèse physique. Pour un entier n donné, on prend tous les couples d'entiers (x, y) avec x et y compris entre $-n$ et $+n$ (il y en a $(2n + 1)^2$), et l'on dénombre ceux qui vérifient l'inégalité $x^2 + y^2 < n^2$. Le nombre trouvé, divisé par $(2n + 1)^2$ et multiplié par 4, est une valeur approchée par défaut de π. En effet, l'aire du cercle valant πr^2 et celle du carré circonscrit $4r^2$, le rapport des deux aires vaut π/4, et le rapport des nombres de points enfermés par les deux figures tend vers cette valeur quand n augmente. Dans l'exemple ci-dessus, où $n = 10$, le nombre total de points est $21 \times 21 = 441$, et le nombre de points tels que $x^2 + y^2 < 100$ *(en gris)* est égal à 305; d'où l'approximation suivante: $4 \times 305/441 = 2{,}7664$... En pointillés, on a représenté les coordonnées du point (–6, –8) pour lequel $x^2 + y^2 = 100$; ce point, situé sur la circonférence du cercle, n'est pas compté.

Le calcul de s_n ou de s'_n peut être fait à la main ou à l'aide d'un ordinateur, mais pour obtenir une précision de p chiffres décimaux, il faut utiliser $n = 10^p$ et effectuer environ 10^{2p} multiplications entre nombres de p chiffres (le calcul des x^2 et des y^2), sans compter les additions et les comparaisons de nombres.

Cette inflation des calculs interdit que l'on l'utilise s_n ou s'_n pour calculer ne serait-ce que 20 chiffres décimaux de π : même avec le plus puissant des ordinateurs actuels, vous n'iriez pas bien loin.

Toutefois, cette définition est importante : elle montre que, même en restant à un niveau élémentaire, on peut donner une définition de π qui ne repose sur aucune hypothèse physique et qui permet *en principe* un calcul aussi précis qu'on le souhaite.

Encore des définitions géométriques

Les deux premières définitions géométriques de π coïncident ; celles qu'on déduit des formules suivantes s'y ramènent aussi :

- $4\pi r^3/3$ = volume d'une sphère de rayon r, d'où :
  π = 3/4 du volume d'une sphère de rayon 1.
- $4\pi r^2$ = surface d'une sphère de rayon r d'où :
  π = 1/4 de la surface d'une sphère de rayon 1.

De toutes ces définitions, on peut tirer des méthodes expérimentales élémentaires d'évaluation de π qui, en théorie, donneraient π avec autant de précision qu'on le souhaite, mais qui, en pratique, ne permettraient pas de calculer plus d'une dizaine de décimales en raison des erreurs de mesure et de la nature non euclidienne de l'espace.

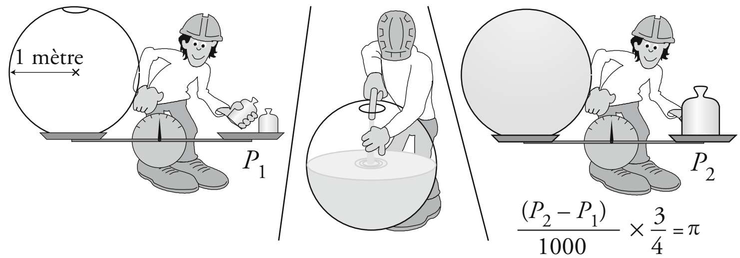
Voici quelques-unes de ces méthodes :

– Mesurer avec une ficelle le périmètre d'un cercle de rayon 1.

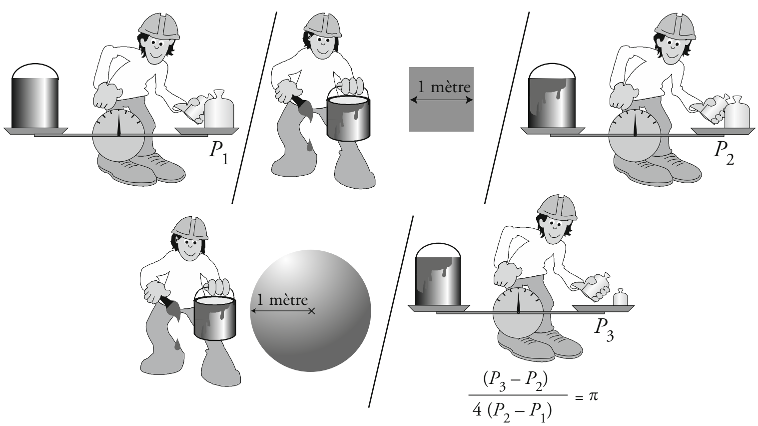
– Compter le nombre de carreaux entièrement inclus dans un cercle tracé sur une feuille à carreaux (on divise le nombre de carreaux trouvés par le carré du nombre de carreaux du rayon). Cela donne une valeur par défaut. En ajoutant les carreaux qui coupent la circonférence, on obtient une valeur par excès. Par exemple, avec un cercle de dix carreaux de rayon, on trouve que : $2{,}96 \leq \pi \leq 3{,}72$.

– Peser l'eau contenue dans un cylindre ou dans une sphère, ou la peinture nécessaire pour peindre la surface d'une sphère.

Méthodes expérimentales



① Mesure de π à l'aide d'une sphère, dont le volume est égal à $4\pi r^3/3$. Le personnage pèse un récipient sphérique d'un mètre de rayon avant et après remplissage, divise la différence de masse (exprimée en kilogrammes) par 1000 (masse d'un mètre cube d'eau), puis multiplie le résultat par 3/4 pour obtenir une valeur expérimentale de π.



② Mesure de π en utilisant le fait que la surface d'une sphère est égale à $4\pi r^2$. Le personnage peint un carré d'un mètre de côté, puis une sphère d'un mètre de rayon, et calcule le rapport des quantités de peinture utilisées.

Les définitions plus abstraites

Les mathématiciens modernes sont peu sensibles aux charmes de la géométrie : aujourd'hui, rares sont les livres où π est défini géométriquement comme je viens de le faire. On préfère définir π à partir de notions d'analyse. On trouve par exemple la définition suivante de π à la page 217 du livre *Analyse* de J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse (éditions Dunod, Paris, 1988) :

> « Définition v.4.1. On appelle **pi** et on note π le double de l'unique racine ϖ de l'équation $\cos x = 0$ comprise entre 0 et 2. »

La fonction cos*(x)*, quant à elle, a été définie à la page 210 de l'ouvrage précité par la formule :

$$\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$$

où z est un nombre complexe et i le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. Bien entendu, cette formule présuppose connue la fonction exponentielle complexe. Celle-ci a été définie page 209 par la formule :

$$\exp(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\,!}$$

définition qui, à son tour, s'appuie sur celles des nombres complexes et des séries convergentes données antérieurement dans le manuel : pour comprendre la définition de π, vous ne devez pas avoir manqué les leçons précédentes !

Nicolas Bourbaki, le célèbre mathématicien éternel (c'est en fait un groupe de mathématiciens qui se renouvelle régulièrement), cultive parfois l'art de rendre compliqué ce qui est simple. En FVR III.4§1 (Bourbaki ne numérote pas les pages de son traité, voir *figure 5*), il définit π comme le nombre réel qui apparaît dans la formule $2\pi e(x)$ de la dérivée de la

FVR III.4 FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES § 1

3. Dérivées des fonctions circulaires; nombre π

On a défini, en Topologie générale (TG, VIII, p. 8) l'homomorphisme continu $x \mapsto \mathbf{e}(x)$ du groupe additif $\mathbf{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ des nombres complexes de valeur absolue 1; c'est une fonction périodique de période principale 1, et on a $\mathbf{e}(\frac{1}{4}) = i$. On sait (*loc. cit.*) que tout homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{U}$ est de la forme $x \mapsto \mathbf{e}(x/a)$, et qu'on pose $\cos_a x = \mathscr{R}(\mathbf{e}(x/a))$, $\sin_a x = \mathscr{I}(\mathbf{e}(x/a))$ (*fonctions trigonométriques*, ou *fonctions circulaires*, de base a); ces dernières fonctions sont des applications continues de $\mathbf{R}$ dans $[-1, +1]$, admettant a pour période principale. On a $\sin_a(x + a/4) = \cos_a x$, $\cos_a(x + a/4) = -\sin_a x$, et la fonction $\sin_a x$ est croissante dans l'intervalle $[-a/4, a/4]$.

Proposition 3. — *La fonction* $\mathbf{e}(x)$ *admet en tout point de* $\mathbf{R}$ *une dérivée égale à* $2\pi i\mathbf{e}(x)$, *où* π *est une constante* > 0.

En effet, le th. 1 de III, p. 1, appliqué au cas où E est le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, donne la relation $\mathbf{e}'(x) = \mathbf{e}'(0)\mathbf{e}(x)$; en outre, comme $\mathbf{e}(x)$ a une norme euclidienne constante, $\mathbf{e}'(x)$ est orthogonal à $\mathbf{e}(x)$ (**I**, p. 15, *Exemple* 3); on a donc $\mathbf{e}'(0) = \alpha i$, avec α réel. Comme $\sin_1 x$ est croissante dans $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, sa dérivée pour $x = 0$ est $\geqslant 0$, donc $\alpha \geqslant 0$, et comme $\mathbf{e}(x)$ n'est pas constante, $\alpha > 0$; il est d'usage de désigner le nombre α ainsi défini par la notation 2π.

5. **Page du traité de N. Bourbaki où le nombre π est défini**, au détour d'un exposé d'analyse, comme une constante apparaissant dans la dérivée de la fonction exponentielle.

fonction *e(x),* qui est l'homomorphisme continu du groupe additif **R** sur le groupe multiplicatif **U** des nombres complexes de valeur absolue 1, dont l'existence et l'unicité ont été établies précédemment.

Ce type de définitions par l'analyse est aujourd'hui assez bien accepté, car une définition par la circonférence du cercle obligerait un mathématicien voulant satisfaire aux critères de rigueur actuels, d'une part à développer la notion d'espace euclidien, et d'autre part à présenter le calcul intégral (indispensable pour parler de la longueur d'un arc). En outre, la définition par l'analyse facilite l'étude de la trigonométrie et permet finalement de retrouver la définition par la circonférence. Au bout du compte, un mathématicien contemporain est naturellement amené à adopter cette démarche en apparence compliquée.

En 1934, les mathématiciens n'avaient pas encore renoncé aux définitions géométriques de π, et le mathématicien Edmund Landau déclencha une grave polémique en donnant, dans un manuel de mathématiques publié à Göttingen, une définition de π analogue à celle qui est énoncée sur la page précédente, c'est-à-dire fondée elle aussi sur les racines de l'équation $\cos x = 0$. Cette polémique, dans le climat politique raciste de l'époque, conduisit à la révocation de Landau de sa chaire à l'Université de Göttingen.

La définition de π *par radicaux ou la quadrature du cercle*

Le problème de la quadrature du cercle, dont nous reparlerons en détail aux chapitres 2, 3 et 9, a obsédé les mathématiciens pendant des siècles. On peut voir ce problème comme la recherche d'une définition simple de π qui éviterait les complications auxquelles les mathématiciens se soumettent aujourd'hui.

En effet, l'objectif de la quadrature du cercle (construire un carré de même aire qu'un cercle donné en utilisant uniquement une règle et un compas) revient à définir π à partir des nombres entiers et de l'opération de calcul d'une racine carrée, c'est-à-dire à rechercher pour π une expression du type :

$$\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}1415\mathbf{33}$$

Si une telle définition *par radicaux* était possible, les manuels actuels de mathématiques avancées n'auraient pas à faire ces terribles contorsions qui coûtèrent son poste à Landau. De même qu'il fut difficile aux hommes d'accepter que $\sqrt{2}$ ne soit pas le quotient de deux nombres entiers, il fallut attendre l'année 1882 pour que les mathématiciens admettent que π n'est pas définissable par radicaux *(voir le chapitre 9)*.

Mesures expérimentales de π

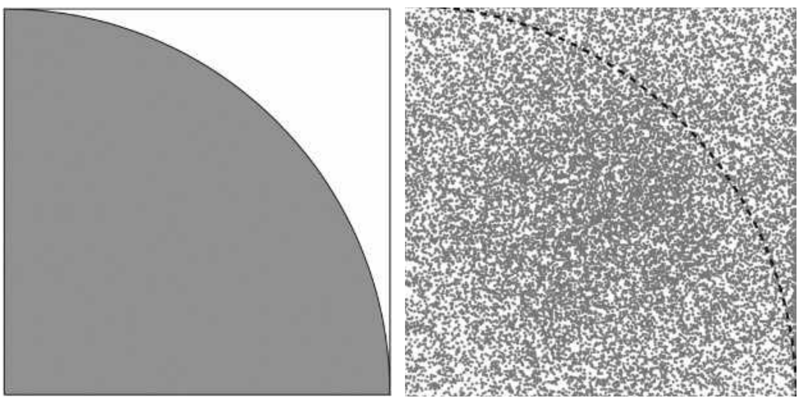
En exploitant les propriétés de π, on conçoit des méthodes expérimentales probabilistes pour le mesurer. La plus simple (qui suppose que l'espace est euclidien) utilise des fléchettes.

On trace un cercle inscrit exactement dans un carré et on lance des fléchettes de très loin sur la cible ainsi constituée. Parmi celles qui touchent la cible, il y en a une proportion de $\pi/4$ qui sont dans le cercle. En lançant un très grand nombre de fléchettes, on obtient une approximation de $\pi/4$, et donc de π.

Variante : on fait tomber au hasard des grains de sable sur un carré de côté r; si les grains le recouvrent uniformément, la proportion de grains tombés dans le quart de disque de rayon r donne une valeur approchée de $\pi/4$ *(figure 6)*. Si par exemple on lâche 1 000 grains de sable et qu'il y en a 780 qui tombent dans le quart de disque, cela donne l'approximation $\pi = 4\,3\,780/1\,000 = 3{,}12$. En pratique, cette méthode souffre d'un grave défaut : elle suppose que l'on sache disposer des grains de sable uniformément sur le carré. Or en les lançant vers le centre, par exemple, les grains de sable auront une distribution plus dense vers le centre et plus éparse sur les bords. Le calcul sera faussé !

Il existe cependant des méthodes statistiques permettant de corriger cette non-uniformité. L'une d'elles consiste à compter le nombre de grains en affectant à chaque grain P un coefficient inversement proportionnel au nombre de grains situés dans un petit cercle autour de P. Les grains situés dans une zone dense sont ainsi comptés moins, ce qui corrige la non-uniformité.

Vincent Dumoulin et Félix Thouin, de l'université de Montréal, plutôt que de jeter des grains de sable, ont tiré au fusil sur une cible distante de 20 mètres. Les expérimentateurs ont ainsi créé 30 857 trous dans la cible. Le calcul, avec correction de la non-uniformité, a donné $\pi = 3{,}131$, ce qui correspond à une erreur de 0,3 %.



6. Une méthode « balistique » de calcul de π. *À gauche.* Soit un carré de côté r. La superficie du carré est r^2, celle du quart de disque (en gris) est $\pi r^2/4$, donc le rapport est $\pi/4$. *À droite.* Résultat d'une séance de tir au fusil. La proportion de points gris dans le quart de disque donne une valeur approchée de $\pi/4$. Si la répartition n'est pas uniforme, il faut corriger le calcul.

Les méthodes de Monte-Carlo

La méthode des fléchettes s'adapte sous la forme d'un programme utilisant des tirages au sort faits par l'ordinateur.

Le principe du programme est le suivant : au moyen de la fonction *random* du langage de programmation, l'ordinateur choisit au hasard deux nombres x et y compris entre les entiers $-m$ et $+m$ (pour un m assez grand, par exemple 1 000 000). Il cherche ensuite si $(x/m)^2 + (y/m)^2$ est inférieur ou égal à 1, c'est-à-dire si le point de coordonnées (x, y) est dans un cercle de rayon m. Il répète ces opérations un grand nombre de fois. La proportion de couples d'entiers satisfaisant l'inégalité s'approche progressivement de $\pi/4$, ce qui donne une mesure de π.

Cette méthode présente plusieurs défauts :

– même en effectuant un très grand nombre de calculs, la proportion ne converge pas vraiment vers π, mais vers une valeur approchée de π (pour qu'elle converge vraiment vers π, il faudrait augmenter peu à peu le nombre m).

– elle s'appuie sur la fonction *random* du langage de programmation ; or celle-ci ne n'est jamais une vraie fonction aléatoire *(voir le chapitre 10).*

– elle converge très lentement.

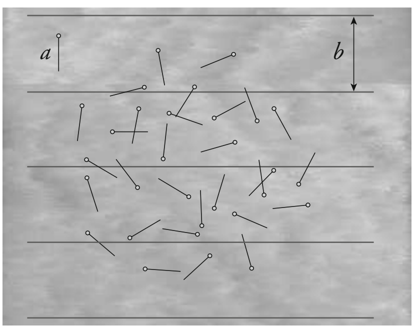
La même méthode avec des dés pour faire les tirages au hasard et en prenant soin d'augmenter m ne reposerait ni sur l'hypothèse que notre espace est euclidien, ni sur l'hypothèse (toujours fausse) que le générateur aléatoire de l'ordinateur est bon. Elle exigerait cependant que les dés soient parfaits et que le mélange des dés avant les lancers soit également parfait.

Toutes ces méthodes, même après qu'on les a rendues indépendantes des générateurs aléatoires ou de l'hypothèse que l'espace est euclidien, conservent un grave défaut : elles convergent encore plus lentement que la définition arithmétique de π donnée précédemment. On ne saurait les recommander !

Les aiguilles de Buffon : π sur le parquet

Le naturaliste français Georges Louis Leclerc, compte de Buffon (1707-1788), est l'auteur d'un traité en quinze volumes, intitulé *Histoire naturelle générale et particulière* ; il fut un mémorable intendant du Jardin du Roi, ancêtre du Jardin des Plantes, mais il est aussi célèbre pour ses aiguilles.

Buffon montra que la probabilité qu'une aiguille de longueur L, lancée sur un parquet dont les lattes ont une largeur L, coupe le bord d'une latte est $2/\pi$ (la démonstration est fournie en annexe p. 315). Dans le cas général, pour une aiguille de longueur a et des lattes de largeur b, la probabilité est $2a/b\pi$ *(figure 7).*



7. **La méthode de Buffon pour évaluer π.** Si l'on lance des aiguilles de longueur a sur un parquet dont les lattes ont une largeur b, la probabilité qu'une aiguille coupe le bord d'une latte est égale à $2a/b\pi$.

Le résultat se généralise avec des aiguilles tordues, pourvu que la longueur de l'aiguille reste la même. Dans ce cas, une aiguille peut couper plusieurs fois un même bord, et il faut tenir compte de cette possibilité pour énoncer le résultat qui devient : le nombre moyen d'intersections par aiguille lancée tend vers $2a/b\pi$.

La méthode de Buffon dépend de l'hypothèse que l'espace physique est euclidien et malheureusement, comme avec les méthodes de Monte-Carlo, l'efficacité est très mauvaise. On a calculé que pour obtenir une précision de 1/1 000 avec une probabilité de 95 pour cent, il faudrait lancer 900 000 aiguilles environ.

Des expériences ont prétendument été réalisées pour mesurer π par la méthode de Buffon :

– en 1850, Wolf lance 5 000 aiguilles avec un rapport a/b = 0,8 et trouve 2 532 intersections ; il en déduit l'approximation π = 3,1596.

– en 1855, Smith d'Aberdeen lance 3 204 aiguilles avec un rapport a/b = 0,6 et trouve 1 218,5 intersections (les demi-intersections correspondent aux cas ambigus) ; il en déduit l'approximation π = 3,1553.

– en 1860, Augustus De Morgan lance 600 aiguilles avec un rapport a/b = 1 et trouve 382,5 intersections ; il en déduit l'approximation π = 3,137.

– en 1864, le capitaine Fox lance 1 030 aiguilles avec un rapport a/b = 0,75 et trouve 489 intersections ; il en déduit l'approximation π = 3,1595.

– en 1901, Lozzerini lance 3 408 aiguilles avec un rapport a/b = 0,83 et trouve 1808 intersections ; il en déduit l'approximation π = 3,1415929.

– enfin, en 1925, Reina lance 2 520 aiguilles avec un rapport a/b = 0,5419 et trouve 859 intersections ; il en déduit l'approximation π = 3,1795.

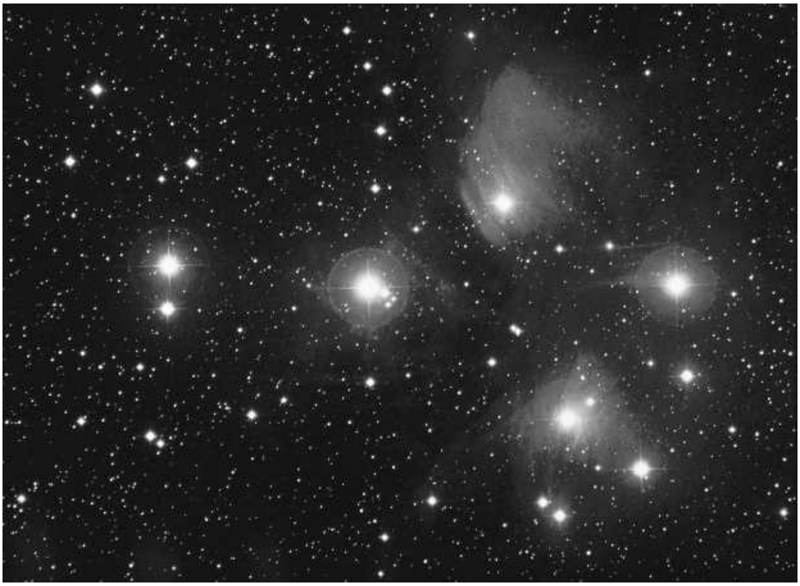
Pour railler ceux qui prétendent déterminer π avec ce type d'expériences, et qui arrangent parfois leurs résultats (le résultat de Lozzerini est trop beau pour être vrai), N. Gridgeman proposa d'utiliser des aiguilles de taille adaptée. En prenant par exemple a = 78,5398 centimètres et b = 1 mètre, la probabilité donnée par la formule de Buffon est $2 \times 0{,}785398/\pi$: en lançant seulement deux aiguilles, si l'une coupe le bord d'une lame et pas l'autre, on obtient un score de 1/2, d'où l'on tire l'approximation de $\pi = 4 \times 0{,}785398 = 3{,}141592$, ce qui n'est pas mal !

Évaluer π en regardant le ciel

Restons avec les probabilités, que nous allons appliquer cette fois à des objets mathématiques plutôt que physiques pour mesurer π : en effet, la probabilité que deux nombres entiers *choisis au hasard* soient premiers entre eux (c'est-à-dire n'aient pas de facteurs premiers communs, comme $12 = 2 \times 2 \times 3$ et $55 = 5 \times 11$) est égale à $6/\pi^2$. Ce résultat est dû au mathématicien Ernesto Cesàro (1859-1906), qui l'a démontré en 1881 *(voir l'appendice à la fin du livre, page 351).*

Comme le choix d'un nombre entier au hasard n'a pas de sens si l'on ne fixe pas de limite aux entiers envisagés, une formulation plus précise du résultat précédent est nécessaire. La voici : la probabilité p_n que deux nombres entiers inférieurs à n tirés au hasard n'aient pas de facteurs communs est un nombre qui tend vers $6/\pi^2$ quand n tend vers l'infini.

Il y a quelques années, Robert Matthews, de l'Université d'Aston, en Grande-Bretagne, a utilisé des tables de relevés astronomiques et a noté les coordonnées des 100 étoiles les plus brillantes *(figure 8).* Il en a déduit des paires d'entiers (qu'il a considérées comme si elles avaient été engendrées au hasard), puis a compté les paires de nombres entiers n'ayant aucun facteur commun. Il en a tiré une approximation de π égale à 3,1**2772**, ce qui est exact à 0,5 pour cent près. Les étoiles connaissent donc π !



8. π se dissimule dans ce champ d'étoiles, dont la distribution est aléatoire : si l'on fait correspondre à chaque étoile un couple d'entiers (obtenus à partir de ses coordonnées – hauteur et déclinaison – sur la voûte céleste), la probabilité que ces deux nombres soient premiers entre eux (sans diviseurs communs) est égale à $6/\pi^2$.

En appliquant la même méthode (qui s'appuie sur un résultat d'arithmétique ne présupposant pas que l'espace est euclidien), on pourrait associer arbitrairement par deux les numéros gagnants de la Loterie nationale pour calculer une approximation de π qui deviendrait plus précise année après année. De même, la taille des conjoints au sein des couples, mesurée en dixièmes de millimètres, serait la base d'une valeur « matrimoniale » de π. Toutefois, les théorèmes de convergence de la théorie des probabilités indiquent qu'avec de telles méthodes, on ne pourrait guère obtenir en pratique plus de cinq décimales exactes de π.

Pour aller encore un peu plus loin dans l'absurde, envisageons une méthode « autoréférente » de calcul de π. Elle consisterait à découper les décimales connues du nombre π en paquets de huit décimales (par exemple), chaque paquet étant lu comme un nombre entier entre 0 et 99 999 999. En prenant ces nombres par deux et en comptant les paires d'entiers sans facteurs communs, on obtiendrait une évaluation probabiliste de π à partir d'une évaluation exacte de π ! En reprenant le calcul à chaque fois que de nouvelles décimales de π sont calculées et en choisissant des tranches de plus en plus longues, on calculerait ainsi de proche en proche le « π caché dans π » (espérons qu'ils sont égaux !).

Après avoir eu cette idée peu sérieuse, j'ai découvert sur Internet qu'un dénommé Jiang Chuan l'avait déjà envisagée et appliquée, ce qui, avec 1 250 000 décimales de π découpées en tranches de six chiffres, l'avait conduit à l'évaluation π = 3,14**6634**.

L'électricité, les pendules, etc.

D'autres méthodes utilisant l'électricité ou la mesure de la période d'un pendule sont envisageables. Il serait intéressant de distinguer celles qui nécessitent que l'espace physique soit euclidien de celles qui ne dépendent pas de cette hypothèse. Toutefois, avec toutes ces méthodes, même en s'y prenant très soigneusement, il ne faut guère espérer plus de cinq décimales exactes, dix au grand maximum. L'histoire de la connaissance de π n'est pas celle d'expériences de mesure physique de ce genre ; c'est une histoire de mathématiciens, rejoints récemment par les informaticiens.

Deux autres définitions élémentaires de π

Le fait que π soit transcendant *(voir le chapitre 9)* implique qu'aucune définition *finie* de π ne peut être donnée en termes d'opérations arithmétiques élémentaires (somme, différence, produit, quotient et extraction de racines). Pour atteindre π, il faut nécessairement combiner une infinité d'opérations (ou faire un passage à la limite, ce qui revient au même). Malgré cette contrainte, certaines définitions sont plus élémentaires que d'autres, soit parce qu'elles sont directement reliées aux définitions géométriques de π, soit parce qu'elles conduisent à des approximations de π n'incluant que des opérations très élémentaires.

La définition arithmétique de la page 16,

$$s'_n = \frac{8(\text{nombre de couples } (x, y) \text{ tels que } 0 \leq x \leq n \text{ et } x^2 + y^2 < n^2)}{n^2}$$

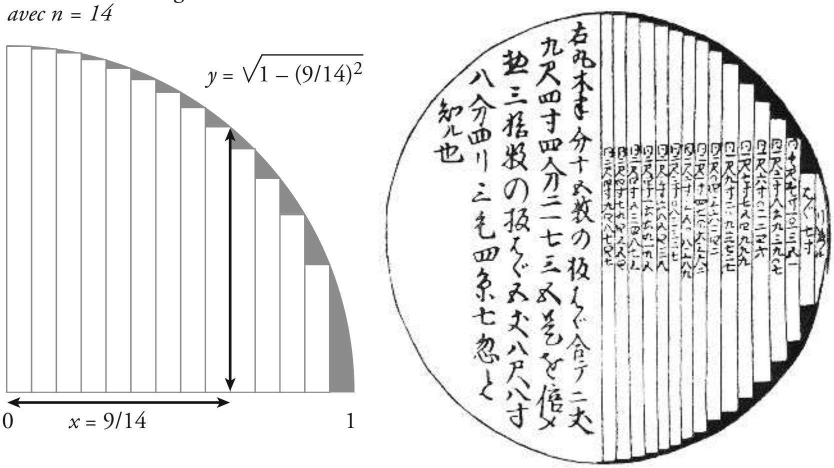
est à la fois évidente (à cause de son interprétation géométrique) et élémentaire. On peut l'améliorer de deux façons : en la rendant plus efficace, ou en ayant recours à moins d'opérations encore.

(a) π approché par des rectangles.

On trouve une formule plus efficace du point de vue de la convergence en s'appuyant de nouveau sur la définition par la surface $S = \pi r^2$, qu'on évalue cette fois en utilisant le fait que l'arc de cercle a pour équation $y = \sqrt{(1 - x^2)}$, et en approchant la surface sous l'arc à l'aide de petits rectangles placés à l'intérieur *(figure 9)* :

$$\pi = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{n} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2} \right) + \ldots + \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n}\right)^2}$$

$$\pi = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{n^2} (\sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \ldots + \sqrt{n^2 - n^2})$$



9. π comme limite de surfaces. Cette méthode des rectangles était déjà connue au Japon au XVII^e siècle. On approche la surface du quart de cercle, $\pi/4$, à l'aide de n rectangles de surface $1/n \times \sqrt{(1 - (a/n)^2)}$, avec $1 \leq a \leq n$.

Cette formule demande moins d'opérations : pour obtenir une précision de p chiffres décimaux, il faut utiliser $n = 10^p$ et donc faire environ 10^p élévations au carré, soustractions et extractions de racines carrées, suivies d'une multiplication par 4 et d'une division. C'est mieux que la formule des s'_n mais, là encore, on ne peut guère aller très loin dans le calcul de π.

Au chapitre 4, qui traite de l'histoire de l'analyse, on trouvera d'autres formules de limite donnant π, souvent plus simples à calculer et plus efficaces, mais moins évidentes.

(b) π par des additions, une seule multiplication et une seule division.

Le calcul de s'_n n'utilise que des élévations au carré, des additions, un décompte, une multiplication par 8 et une division. Il est possible de faire encore mieux du point de vue de la simplicité des opérations mises en œuvre pour calculer π.

En n'utilisant que des additions, une multiplication et une division, on obtient en effet des approximations de π aussi bonnes que l'on veut. Voici, sans preuve, cette méthode proposée par G. Kreweras en 1980.

On définit les coefficients $e(n, m)$, $m \leq n$, par un tableau triangulaire en indiquant que $e(0, 0) = 1$ et que $e(n, m)$, le coefficient de la ligne n dans la colonne m, vaut la somme des m derniers coefficients de la ligne précédente :

$e(0, 0) = 1$ et pour $n \geq 1$, $n \geq m$:

$e(n,m) = e(n-1, n-1) + e(n-1, n-2) + \ldots + e(n-1, n-m)$

Remplir ce tableau ne demande que des additions *(figure 10)*. Les nombres $e(n, n)$ sur la diagonale sont appelés

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	2	2						
4	0	2	4	5	5					
5	0	5	10	14	16	16				
6	0	16	32	46	56	61	61			
7	0	61	122	178	224	256	272	272		
8	0	272	544	800	1024	1202	1324	1385	1385	
9	0	1385	2770	4094	5296	6320	7120	7664	7936	7936

10. Les nombres contenus dans ce tableau offrent un moyen de calculer π. On remplit le tableau ligne à ligne en ne faisant que des additions : le coefficient de la ligne n dans la colonne m vaut la somme des m derniers coefficients de la ligne $n-1$. Par exemple, $e(5, 4) = 16$. Le double du rapport de deux éléments consécutifs de la diagonale du tableau (les nombres d'Euler), multiplié par le numéro de la ligne du deuxième élément, constitue une approximation de π. Par exemple, en considérant les lignes 8 et 9, on a $2 \times 9 \times 1385 / 7936 = 3{,}1413$.

nombres d'Euler (attention : d'autres définitions des nombres d'Euler sont parfois utilisées).

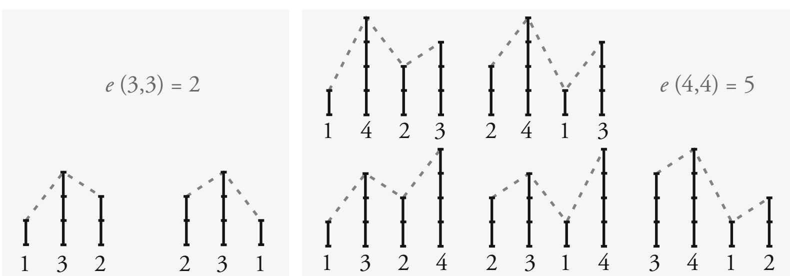
On démontre que :

$$\pi = \lim_{x \to \infty} \frac{2n \times e(n-1, n-1)}{e(n, n)}$$

Le tableau précédent donne les approximations suivantes de π, en descendant la diagonale :

2 4 3 3,2 3,125 3,147 3,1397 3,1422 3,1413

Il y a d'autres façons de définir les coefficients *e(n, n)*. On montre par exemple que *e(n, n)* est le nombre de façons de classer les *n* nombres entiers de 1 à *n* en « zigzag », c'est-à-dire de sorte que le deuxième soit plus grand que le premier, le troisième plus petit que le deuxième, etc. On a ainsi $e(3, 3) = 2$, car il n'y a que deux façons de classer 1, 2 et 3 en « zigzag » : 132 et 231 *(figure 11)*.



11. On peut calculer π par de simples dénombrements. Soit deux séries consécutives d'entiers (1, 2, ..., n–1) et (1, 2, ..., n). Les nombres d'Euler $e(n-1, n-1)$ et $e(n, n)$ correspondent au nombre de façons de classer les termes de ces séries en « zigzag ». Lorsque n tend vers l'infini, le rapport $2n \times e(n-1, n-1) / e(n, n)$ tend vers π. Ici, il y a deux façons de classer la série 123 en zigzag, et cinq façons de classer la série 1234. En multipliant ce rapport 2/5 par 4 (la taille de la deuxième série) puis par 2, on obtient une approximation de π, 16/5 = 3,2.

CHAPITRE 2

Curieux et curiosités

Intrigues et amusements autour de π

Le nombre π *fascine tout le monde, mais certains d'entre nous le sont à un point tel qu'on doit alors parler de « fétichisme de* π *», ou même de «* π*-manie » (ne faut-il pas en être atteint pour passer plusieurs mois de sa vie à écrire un livre sur* π *?). Les obsédés de* π*, ceux qui lui attribuent une importance presque mystique, sont en réalité assez nombreux, et le monde qu'ils ont construit autour de* π*, s'il n'est pas toujours très sérieux, se visite avec plaisir : il y a ceux qui apprennent* π *par cœur ; il y a ceux qui veulent lire dans* π *et qui en scrutent les décimales ; il y a bien sûr tous ceux qui, depuis plus de 2 000 ans, recherchent et prétendent avoir trouvé la solution du problème de la quadrature du cercle ; enfin il y a ceux qui, tout simplement, s'amusent avec* π*.*

Apprendre π

Tout le monde connaît π = 3,14, certains connaissent π = 3,14159 ou même π = 3,1415926 (c'était mon cas avant d'entreprendre ce livre). Le « π = 3,1416 » que l'on prononce « trois quatorze cent seize » est à éviter absolument, car il conduit à l'erreur π = 3,141**16**. Peut-on aller plus loin ? Nous verrons dans la suite que π n'est pas un nombre rationnel (quotient de deux entiers) ; par conséquent, ce n'est pas non plus un nombre décimal (quotient d'un entier par une puissance de dix), et l'écriture de π en base 10 ne s'arrête jamais : π possède une infinité de décimales.

Certaines personnes, sans qu'on sache pourquoi, mémorisent sans difficulté les nombres et les numéros de téléphone. Il est tentant pour eux d'apprendre quelques dizaines, quelques centaines, voire quelques milliers de décimales de π.

Le record de mémorisation des décimales de π est de 70 030. Il est détenu depuis le 21 octobre 1995 par un étudiant indien, Suresh Kumar Sharma. Réciter ces décimales lui a demandé plus de 17 heures !

Des informations récentes sur ces records de mémorisation sont données au chapitre 12.

Moyens mnémotechniques

Toutes sortes de techniques (souvent fondées sur des associations phonétiques) sont à la disposition de ceux qui veulent connaître par cœur les décimales de π. La méthode la plus utilisée consiste à apprendre un texte dont les mots ont pour nombre de lettres les chiffres qu'il faut mémoriser. De tels textes existent

TABLE DES MATIÈRES