

# Table des matières

<b>Dédicaces</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Espaces métriques (généralités)</b>	<b>3</b>
1.1 Notions métriques . . . . .	3
1.1.1 Distance - Espace métrique . . . . .	3
1.1.2 Propriétés élémentaires d'une distance . . . . .	3
1.1.3 Espace ultramétrique . . . . .	4
1.1.4 Exemple de distances . . . . .	4
1.1.5 Norme - Espace normé. . . . .	4
1.1.6 Isométrie. . . . .	6
1.1.7 Transport d'une distance. . . . .	6
1.1.8 Boules et sphères. . . . .	8
1.1.9 Distance d'un point à un ensemble. . . . .	9
1.1.10 Distance de deux ensembles . . . . .	10
1.1.11 Diamètre d'un ensemble. . . . .	10
1.1.12 Ensembles bornés. . . . .	11
1.1.13 Produit fini d'espaces métriques . . . . .	12
1.1.14 Distances équivalentes. . . . .	13
1.1.15 Normes équivalentes. . . . .	13
1.2 Notions topologiques. . . . .	14
1.2.1 Voisinages d'un point . . . . .	14
1.2.2 Ouverts et fermés. . . . .	16

1.2.3	Adhérence. . . . .	18
1.2.4	Partie partout dense. . . . .	20
1.2.5	Intérieur-Extérieur-Frontière. . . . .	20
1.2.6	Sous-espaces métriques . . . . .	21
1.3	Continuité et limites (1 <sup>ère</sup> partie) . . . . .	23
1.3.1	Continuité en un point (notion topologique) . . . . .	23
1.3.2	Continuité sur une partie (notion topologique) . . . . .	24
1.3.3	Continuité uniforme (notion métrique) . . . . .	25
1.3.4	Etude des suites . . . . .	26
1.3.5	Suite de Cauchy-Espaces complets (notions métriques) . . . . .	27
1.4	Théorème du point fixe . . . . .	28
1.4.1	Majoration de l'erreur . . . . .	30
1.4.2	Point fixe dépendant d'un paramètre . . . . .	33
1.5	Continuité et limites (2 <sup>ème</sup> partie) . . . . .	34
1.5.1	Retour sur la continuité . . . . .	34
1.5.2	Séparation par des ouverts . . . . .	35
1.5.3	Homéomorphismes . . . . .	35
1.5.4	Cas des espaces produits . . . . .	37
1.5.5	Limite d'une fonction en un point . . . . .	39
1.5.6	Prolongement par continuité . . . . .	40
1.5.7	Suites extraites-valeurs limites . . . . .	42
1.5.8	Propriété des espaces complets . . . . .	44
1.5.9	Conservation de la complétude . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Convexité, connexité, compacité</b>	<b>49</b>
2.1	Convexité . . . . .	49
2.1.1	Cas d'un espace vectoriel normé . . . . .	53
2.2	Connexité (étude topologique) . . . . .	54
2.2.1	Connexité et continuité . . . . .	56
2.2.2	Produit d'espaces connexes . . . . .	58
2.2.3	Espace localement connexe . . . . .	58
2.2.4	Composantes connexes . . . . .	59
2.3	Connexité (étude métrique) . . . . .	59
2.3.1	Connexité dans $\mathbb{R}$ . . . . .	59
2.3.2	Espaces bien enchainés . . . . .	61

2.4	Connexité par arcs . . . . .	62
2.4.1	Propriétés de la connexité par arcs . . . . .	64
2.4.2	Cas des espaces vectoriels normés (sur $\mathbb{R}$ ) . . . . .	65
2.5	Compacité (étude topologique) . . . . .	67
2.5.1	Image d'un compact par une fonction continue . . . . .	69
2.5.2	Produit d'espaces compacts . . . . .	70
2.5.3	Partie relativement compacte . . . . .	70
2.5.4	Espace localement compact . . . . .	71
2.6	Compacité (étude métrique) . . . . .	72
2.6.1	Espaces précompacts . . . . .	73
2.6.2	Compacité et continuité uniforme . . . . .	76
2.7	Compacité (espaces $\mathbb{R}^n$ ) . . . . .	77
2.7.1	Partie compacte de $\mathbb{R}$ . . . . .	77
2.7.2	Parties compactes de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	78
2.7.3	Compacité et convexité . . . . .	79
2.7.4	Compacité et connexité . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Topologie générale</b>	<b>83</b>
3.1	Notions générales . . . . .	83
3.1.1	Espace topologique . . . . .	83
3.1.2	Exemple de topologies . . . . .	84
3.1.3	Systèmes fondamentaux de voisinages . . . . .	85
3.1.4	Ouverts et fermés . . . . .	85
3.1.5	Définition équivalente d'une topologie . . . . .	86
3.1.6	Base d'une topologie . . . . .	87
3.1.7	Adhérence-Intérieur-Extérieur-Frontière. . . . .	87
3.1.8	Comparaison de topologies . . . . .	89
3.1.9	Topologie induite . . . . .	90
3.1.10	Topologie produit . . . . .	91
3.2	Filtres et limites . . . . .	93
3.2.1	Filtre sur un ensemble . . . . .	93
3.3	Ultrafiltres . . . . .	95
3.3.1	Filtre induit . . . . .	95
3.3.2	Filtre image . . . . .	96
3.3.3	Filtre projection . . . . .	96
3.3.4	Filtre produit . . . . .	96

3.3.5	Limite d'un filtre . . . . .	97
3.3.6	Limite dans un espace produit . . . . .	97
3.3.7	Limite d'une fonction suivant un filtre . . . . .	98
3.3.8	Retour sur la continuité . . . . .	98
3.3.9	Retour sur les suites . . . . .	100
3.3.10	Retour sur la complétude . . . . .	101
3.3.11	Retour sur la limite d'une fonction en un point	103
3.3.12	Prolongement par continuité uniforme . . . . .	104
3.4	Compléments sur la connexité et la compacité . . . . .	105
3.4.1	Retour sur la connexité . . . . .	105
3.4.2	Retour sur la compacité . . . . .	107
3.4.3	Retour sur la précompacité. . . . .	109
<b>4</b>	<b>Espaces vectoriels Normés</b>	<b>111</b>
4.1	généralités . . . . .	111
4.1.1	Propriétés élémentaires. . . . .	111
4.1.2	Continuité des applications multilinéaires . . . . .	114
4.1.3	Continuité des applications linéaires . . . . .	115
4.1.4	Isomorphismes d'espaces normés . . . . .	116
4.1.5	Equivalence de normes . . . . .	117
4.2	Etude des sous-espaces . . . . .	117
4.2.1	Somme directe topologique . . . . .	118
4.2.2	Formes linéaires et hyperplans . . . . .	119
4.2.3	Espace de dimension finie . . . . .	120
4.3	Espace d'applications linéaires continues . . . . .	123
4.3.1	Généralisation aux applications multilinéaires.	125
<b>5</b>	<b>Espaces fonctionnels</b>	<b>129</b>
5.1	Différentes topologies de convergence . . . . .	129
5.1.1	Rappel sur la convergence simple . . . . .	129
5.1.2	Rappel sur la convergence uniforme . . . . .	130
5.1.3	Topologie de la convergence simple . . . . .	130
5.1.4	Topologie de la convergence uniforme . . . . .	131
5.1.5	Cas des applications bornées . . . . .	132
5.1.6	Cas des applications continues . . . . .	133
5.1.7	Cas des applications continues bornées . . . . .	134
5.1.8	Note sur la topologie de la convergence compacte	134

---

5.1.9	Exemple d'application du théorème du point fixe	135
5.2	Ensembles équicontinus . . . . .	135
5.3	Approximations de Stone-Weierstrass . . . . .	140
5.3.1	Etude des sous-algèbres de $\mathcal{C}_u(E, \mathbb{R})$ . . . . .	141
5.3.2	Application : Approximation par des polynômes	144
5.3.3	Cas des fonctions à valeurs complexes . . . . .	145
5.3.4	Application : Approximation par des polynômes trigonométriques . . . . .	146
5.4	Problèmes de meilleure approximation . . . . .	148
5.4.1	Position du problème . . . . .	148
5.4.2	Théorème d'existence . . . . .	148
5.4.3	Première caractérisation . . . . .	149
5.4.4	Condition de Haar . . . . .	151
5.4.5	Deuxième caractérisation . . . . .	152
<b>6</b>	<b>Exercices</b>	<b>159</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>195</b>
	<b>Quatrième de couverture</b>	<b>197</b>

# Introduction

Le tome II : **Introduction à la Topologie Générale**, de l'ouvrage intitulé **Cours d'Algèbre et Topologie générales à l'usage de licences de Mathématiques et d'Informatiques** met en places les éléments essentiels à toute utilisation théorique ou pratique des notions de base de topologie.

De ce point de vue il s'adresse tout aussi bien à ceux qui se destinent aux utilisations purement mathématiques qu'aux utilisateurs des mathématiques : mathématiciens, physiciens, informaticiens. C'est pour ainsi dire, un cours standard de topologie du niveau licence ou Master I.

Le cours est construit fondamentalement à partir des notes de cours d'étudiant de l'auteur, enrichies de son expérience de formateur des formateurs, qui désire ainsi transmettre à des générations d'étudiants, l'un des enseignements universitaires qui ont marqué sa formation universitaire par leur naturel, leur simplicité et élégance de présentation, leur construction cohérente.

Lorsque les programmes et les emplois de temps, hélas très variables, l'y ont permis, l'auteur a exposé ce cours (1977-2005) en 3<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> années de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé, Université de Yaoundé I, Cameroun. Le souhait de l'auteur aurait été d'y voir ce cours intégralement et de façon permanente exposé en vue d'un solide bagage du futur professeur ou du futur utilisateur des mathématiques. Mais malheureusement !

L'ouvrage comporte cinq (5) chapitres proprement dits et un sixième (6<sup>e</sup>) constitué par un choix très diversifié d'exercices rubrique par rubrique.

Les deux (2) premiers chapitres présentent la topologie des espaces métriques : cela a l'avantage de mettre à disposition tous les exemples disponibles des cours de 1<sup>e</sup> et 2<sup>e</sup> années des universités.

Le chapitre trois (3) reprend ces mêmes notions dans le cadre plus général des espaces topologiques généraux.

Les deux (2) derniers chapitres constituent une introduction aux espaces fonctionnels classiques et à leurs utilisations, à titre d'exemple à la théorie de l'approximation.

Ce n'est pas sans inconscience que l'auteur a pris le risque de s'aventurer sur les traces de ses maîtres, illustres, dont il se sent pleinement redevable.

Moyennant quoi il a espoir que ce cours, malgré les imperfections immanentes à des notes de cours d'un étudiant, aura pleinement atteint son objectif en rendant service à des générations d'étudiants de nos jeunes Universités auxquels l'auteur le destine.

# Chapitre 1

## Espaces métriques (généralités)

### 1.1 Notions métriques

#### 1.1.1 Distance - Espace métrique

Une distance sur un ensemble  $E$ , non vide est toute application  $d$  de  $E^2$  dans  $\mathbb{R}$ , vérifiant les quatres axiomes :

D.1  $d(x, y) \geq 0$ ;

D.2  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;

D.3  $d(x, y) = d(y, x)$ ;

D.4  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (inégalité triangulaire).

Un espace métrique est un ensemble  $E$  muni d'une distance  $d$ , cette structure sera souvent notée  $(E, d)$ . Plusieurs distances peuvent être définies sur un même ensemble. On en verra des exemples.

#### 1.1.2 Propriétés élémentaires d'une distance

1. L'axiome D.4 se généralise par récurrence :

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

2. On a :  $d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|$



En effet :

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ donc } d(x, y) \geq d(x, z) - d(y, z)$$

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \text{ donc } d(x, y) \geq d(y, z) - d(x, z).$$

### 1.1.3 Espace ultramétrique

Si l'axiome D.4 est remplacé par l'axiome plus fort :

$$D'.4 \quad d(x, y) \leq \max [d(x, z), d(z, y)].$$

(E, d) est alors appelé un espace ultramétrique.

### 1.1.4 Exemple de distances

1. Distance discrète.

Tout ensemble E peut être muni de la distance, appelée distance

$$\text{discrète définie par : } \begin{cases} d(x, y) = 1 & \text{si } x \neq y \\ d(x, y) = 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

E est alors dit un espace métrique discret (en fait il est ultramétrique).

2. L'espace  $\mathbb{R}^n$  peut être muni de diverses distances bien connues :  
si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$

a. distance euclidienne :  $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

b. distance :  $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

c. distance :  $d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ .

Dans  $\mathbb{R}$ , ces trois distances se confondent à :  $d(x, y) = |x - y|$ .

### 1.1.5 Norme - Espace normé.

Il s'agit ici d'une structure beaucoup plus riche, à la fois algébrique et métrique.

Soit E un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou sur  $\mathbb{C}$ , une norme sur E est toute application  $n$  de E dans  $\mathbb{R}^+$  vérifiant les quatre axiomes :

N.1  $n(x) \geq 0$ ;

$$\text{N.2 } n(x) = 0 \iff x = 0;$$

$$\text{N.3 } n(\lambda x) = |\lambda| n(x) \quad (|\lambda| : \text{valeur absolue ou module});$$

$$\text{N.4 } n(x + y) \leq n(x) + n(y) \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

Un espace normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

Lorsqu'une norme est bien déterminée sans ambiguïté, on note généralement  $\|x\|$  au lieu de  $n(x)$ .

Tout espace normé est un espace métrique en le munissant de la distance "associée à la norme" :  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

### 1.1.5.1 Exemples de normes

Dans  $\mathbb{R}^n$ , avec la structure vectoriel usuelle, si  $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\text{a. norme euclidienne : } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2};$$

$$\text{b. norme : } \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|;$$

$$\text{c. norme : } \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Dans  $\mathbb{R}$  :  $\|x\| = |x|$ .

Ces normes engendrent respectivement les distances citées précédemment en exemples.

### 1.1.5.2 Propriétés élémentaires d'une norme.

$$1. \|-x\| = \|x\|;$$

$$2. \|x - y\| = \left| \|x\| - \|y\| \right|;$$

$$3. \|x\| = d(x, 0);$$

$$4. d(x + z, y + z) = d(x, y);$$

$$5. d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \text{ pour la distance associée à la norme};$$

$$6. \text{ Si } E \neq \{0\}, \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}^+, \text{ il existe au moins un vecteur } x \text{ tel que } \|x\| = \alpha.$$

En effet : fixons  $y \in E$  avec  $y \neq 0$ , donc  $\|y\| \neq 0$ , en posant  $x = \frac{\alpha}{\|y\|} y$ , on a bien  $\|x\| = \alpha$ .

Ceci montre qu'une norme n'est jamais bornée, ce n'est pas le cas pour

une distance (par exemple discrete ). Il en résulte qu'une distance sur un espace vectoriel n'est pas nécessairement associée à une norme. Tout ce qui sera défini ou démontré dans les espaces métriques sera à fortiori valable dans les espaces normés, mais les espaces normés possèdent beaucoup plus de propriétés qui seront étudiées plus en détail dans un chapitre ultérieur.

### 1.1.6 Isométrie.

Soient deux espaces métriques  $(E, d), (E', d')$ .

Une application  $f$  de  $E$  dans  $E'$  est dite une isométrie si, quels que soient  $x, y$  :  $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ .

Il en résulte que  $f$  est nécessairement injective. Si en outre,  $f$  est surjective (donc bijective), on parlera d'isométrie de  $E$  sur  $E'$ . Dans ce cas,  $f^{-1}$  est une isométrie de  $E'$  sur  $E$ , on dira que les espaces  $E$  et  $E'$  sont isométriques.

#### Cas particulier :

Si  $E$  et  $E'$  sont des espaces normés, toute application linéaire  $f$  vérifiant :

$\|f(x)\| = \|x\|$  est une isométrie :

$$d'(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y).$$