Table des matières

Introduction

Le tome II : **Introduction à la Topologie Générale**, de l'ouvrage intitulé **Cours d'Algèbre et Topologie générales à l'usage de licences de Mathématiques et d'Informatiques** met en places les éléments essentiels à toute utilisation théorique ou pratique des notions de base de topologie.

De ce point de vue il s'adresse tout aussi bien à ceux qui se destinent aux utilisations purement mathématiques qu'aux utilisateurs des mathématiques : mathématiciens, physiciens, informaticiens. C'est pour ainsi dire, un cours standard de topologie du niveau licence ou Master I.

Le cours est construit fondamentalement à partir des notes de cours d'étudiant de l'auteur, enrichies de son expérience de formateur des formateurs, qui désire ainsi transmettre à des générations d'étudiants, l'un des enseignements universitaires qui ont marqué sa formation universitaire par leur naturel, leur simplicité et élégance de présentation, leur construction cohérente.

Lorsque les programmes et les emplois de temps, hélas très variables, l'y ont permis, l'auteur a exposé ce cours (1977-2005) en 3^e et 5^e années de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé, Université de Yaoundé I, Cameroun. Le souhait de l'auteur aurait été d'y voir ce cours intégralement et de façon permanente exposé en vue d'un solide bagage du futur professeur ou du futur utilisateur des mathématiques. Mais malheureusement !
L'ouvrage comporte cinq (5) chapitres proprement dits et un sixième (6^e) constitué par un choix très diversifié d'exercices rubrique par rubrique.

Les deux (2) premiers chapitres présentent la topologie des espaces métriques : cela a l'avantage de mettre à disposition tous les exemples disponibles des cours de 1^e et 2^e années des universités.

Le chapitre trois (3) reprend ces mêmes notions dans le cadre plus général des espaces topologiques généraux.
Les deux (2) derniers chapitres constituent une introduction aux espaces fonctionnels classiques et à leurs utilisations, à titre d'exemple à la théorie de l'approximation.

Ce n'est pas sans inconscience que l'auteur a pris le risque de s'aventurer sur les traces de ses maîtres, illustres, dont il se sent pleinement redevable.

Moyennant quoi il a espoir que ce cours, malgré les imperfections immanentes à des notes de cours d'un étudiant, aura pleinement atteint son objectif en rendant service à des générations d'étudiants de nos jeunes Universités auxquels l'auteur le destine.

Chapitre 1

Espaces métriques (généralités)

1.1 Notions métriques

1.1.1 Distance - Espace métrique

Une distance sur un ensemble E , non vide est toute application d de E^2 dans $\mathbb{R}$, vérifiant les quatres axiomes :

D.1 $d(x,y) \geq 0;$

D.2 $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y;$

D.3 $d(x,y) = d(y,x);$

D.4 $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire).

Un espace métrique est un ensemble E muni d'une distance d, cette structure sera souvent notée (E, d). Plusieurs distances peuvent être définies sur un même ensemble. On en verra des exemples.

1.1.2 Propriétés élémentaires d'une distance

1. L'axiome D.4 se généralise par récurence :
   $d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \ldots + d(x_{n-1},x_n)$
2. On a : $d(x,y) \geq |d(x,z) - d(y,z)|$

En effet :
$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ donc $d(x,y) \geq d(x,z) - d(y,z)$
$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$ donc $d(x,y) \geq d(y,z) - d(x,z)$.

1.1.3 Espace ultramétrique

Si l'axiome D.4 est remplacé par l'axiome plus fort :
D$'$.4 $\quad d(x,y) \leq \max\left[d(x,z), d(z,y)\right]$.
(E, d) est alors appelé un espace ultramétrique.

1.1.4 Exemple de distances

1. Distance discrète.

   Tout ensemble E peut être muni de la distance , appelée distance discrète définie par : $\begin{cases} d(x,y) = 1 & \text{si } x \neq y \\ d(x,y) = 0 & \text{si } x = y \end{cases}$

   E est alors dit un espace métrique discret (en fait il est ultramétrique).

2. L'espace $\mathbb{R}^n$ peut être muni de diverses distances bien connues : si $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$

   a. distance euclidienne : $d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

   b. distance : $d(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

   c. distance : $d(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

   Dans $\mathbb{R}$, ces trois distances se confondent à : $d(x,y) = |x - y|$.

1.1.5 Norme - Espace normé.

Il s'agit ici d'une structure beaucoup plus riche, à la fois algébrique et métrique.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, une norme sur E est toute application n de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les quatre axiomes :

N.1 $\; n(x) \geq 0$;

N.2 $n(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

N.3 $n(\lambda x) = |\lambda| \, n(x)$ $\quad$ ($|\lambda|$: valeur absolue ou module) ;

N.4 $n(x+y) \leq n(x) + n(y)$ $\quad$ (inégalité triangulaire).

Un espace normé est un espace vectoriel muni d'une norme.
Lorsqu'une norme est bien déterminée sans ambiguité, on note généralement $||x||$ au lieu de $n(x)$.
Tout espace normé est un espace métrique en le munissant de la distance "associée à la norme" : $d(x,y) = ||x-y||$.

1.1.5.1 Exemples de normes

Dans $\mathbb{R}^n$, avec la structure vectoriel usuelle, si $x = (x_1, \cdots, x_n)$

a. norme euclidienne : $||x|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$;

b. norme : $||x|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$;

c. norme : $||x|| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Dans $\mathbb{R}$: $||x|| = |x|$.
Ces normes engendrent respectivement les distances citées précédemment en exemples.

1.1.5.2 Propriétés élémentaires d'une norme.

1. $||-x|| = ||x||$;
2. $||x-y|| = |||x|| - ||y|||$;
3. $||x|| = d(x,0)$;
4. $d(x+z, y+z) = d(x,y)$;
5. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x,y)$ pour la distance associée à la norme ;
6. Si $\mathrm{E} \neq \{0\}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, il existe au moins un vecteur x tel que $||x|| = \alpha$.

En effet : fixons $y \in \mathrm{E}$ avec $y \neq 0$, donc $||y|| \neq 0$, en posant $x = \frac{\alpha}{||y||} y$, on a bien $||x|| = \alpha$.
Ceci montre qu'une norme n'est jamais bormé, ce n'est pas le cas pour

une distance (par exemple discrete). Il en resulte qu'une distance sur un espace vectoriel n'est pas nécessairement associée à une norme. Tout ce qui sera défini ou démontré dans les espaces métriques sera à fortiori valable dans les espaces normés, mais les espaces normés possèdent beaucoup plus de propriétés qui seront étudiées plus en détail dans un chapitre ultérieur.

1.1.6 Isométrie.

Soient deux espaces métriques $(\mathrm{E}, d), (\mathrm{E}', d')$.
Une application f de E dans E' est dite une isométrie si, quels que soient $x, y : d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$.
Il en résulte que f est nécessairement injective. Si en outre, f est surjectve (donc bijective), on parlera d'isométrie de E sur E'. Dans ce cas, f^{-1} est une isométrie de E' sur E, on dira que les espaces E et E' sont isométriques.

Cas particulier :
Si E et E' sont des espaces normés, toute application linéaire f vérifiant :
$||f(x)|| = ||x||$ est une isométrie :
$d'(f(x), f(y)) = ||f(x) - f(y)|| = ||f(x - y)|| = ||x - y|| = d(x, y)$.