Table des matières

Introduction

Localisation des travaux

Le point de départ des travaux dont voici la présentation est ma Thèse d'état ès sciences Mathématiques, presentée le 22 Octobre 1982, Université Claude Bernard Lyon I (France). La thèse s'institule : *Base d'une mathématique* Θ *-valente chrysippienne.*

Le travail ainsi presenté constitue une tentative de mise en place d'une mathématique à caractère multivalent et trouvant ses fondements dans une logique multivalente, non classique si la valence dépasse deux (2) . Une telle préocupation n'est certe pas chose nouvelle puisqu'elle a déjà été celle des logiques dites faibles ainsi que celle des logiques multivalentes avec négation faible ou même multivalentes sans négation.

En effet, au début du $20^{ième}$ siècle, un certain nombre de mathématiciens ont remis en cause la logique classique :

1. soit en refusant le principe du tiers exclu ($A \vee \rceil A$ est une thèse), ce qui a donné naissance à la logique intuitionniste (Brouwer, Heyting,...), et plus généralement aux logiques faibles.
2. soit en refusant le caractère bivalent, ce qui a donné naissance :
   (a) aux logiques modales (Lewis,...)
   (b) aux logiques mulitivalentes (Lukasiewicz, Post, Moisil,...).

Les logiques faibles sont des logiques sans négation ou avec négation faible et l'ensemble des thèses ainsi obtenu est un sous-ensemble strict de l'ensemble des thèses du calcul classique.

Comme logiques faibles on peut citer à titre d'exemple et de façon schématique

$$\begin{tikzcd} & \boxed{\text{La logique positive}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \boxed{\text{La logique minimale}} \arrow[dr] & & \boxed{\text{La logique avec semi-négation}} \arrow[dl] \\ & \boxed{\text{La logique intuitionniste}} \arrow[d] & \\ & \boxed{\text{La logique classique}} & \end{tikzcd}$$

Les logiques à plusieurs valeurs sont apparues, comme l'affirmait quelque part un éminent homme de sciences.

Dans les années 20 (ce qui n'est pas tout à fait exact) : à l'heure où la logique cherchait encore sa place dans le monde scientifique ; à ce jour elles sont tombées en désuétude et il est au plus raisonnable de n'utiliser les logiques multivalentes que pour des applications bien précises.
En fait, l'idée d'une logique à plusieurs valeurs de vérité, c'est-à-dire avec des valeurs de vérité intermédiaires entre le vrai (1) et le faux (0) est très ancienne, elle remonte à Aristote (IV^e siècle avant J.C.) qui construit un début de syllogistique avec quatre modalités de vérité : le nécessaire, le contingent, le possible et l'impossible. Aristote a eu cette idée à propos des évènements futurs : quelle valeur de vérité peut-on attribuer à une proposition telle que "demain il y aura une bataille navale" ? On peut, à la rigueur, lui associer une "probabilité" de vérité ou de fausseté. Cette position suscite de nombreuses discussions, philosophiques et assez stériles, au Moyen-âge : l'omniscience divine peut-elle ignorer les valeurs de vérité des évènements futurs ?

La première tentative sérieuse d'une logique multivalente est due à Lukasiewicz qui, en 1920, présente un système logique non formalisé (c'est-à-dire sous forme sémantique) à trois valeurs de vérité : le vrai, le possible et le faux. A partir de là, il retrouve les modalités d'Aristote. Jusqu'en 1930, Lukasiewicz construit des systèmes semblables pour un nombre quelconque et même pour une chaîne infinie dénombrable de valeurs de vérité intermédiaires entre le vrai et le faux (1 et 0). La première formalisation (ou syntaxe) de la logique trivalente de Lukasiewicz est due à Wajsberg en 1951. A partir de là, on assiste à l'éclosion d'un très grand nombre de travaux sur les logiques multivalentes et leur algrébrisation. Il convient de citer notamment l'Ecole Roumaine avec Gr. C. Moisil et L'Ecole Argentine avec A. Monteiro. Il est à noter que les logiques multivalentes ne vérifient pas non plus le principe du tiers-exclu, ce qui amena à comparer la logique intuitionniste aux logiques multivalentes. En 1936, Jaskowski démontra que le calcul propositionnel intuitionniste était équivalent à une logique à une infinité dénombrable de valeurs de vérité [13].

En somme, on peut retenir que pour tous les travaux ainsi cités, par logique multivalente (Θ) on doit comprendre logique dont toutes les valeurs de vérité se trouvent dans une chaîne I Θ-valente fermée 0,1 finie ou non. Cette idée fondamentale commune à toute les logiques multivalentes ainsi citées n'est justement pas celle des travaux qui suivent pour lesquels une *logique modale multivalente* (Θ *-valente*) *chrysippienne est une logique certe à plusieurs valeurs de vérité entre 0 et 1 (dans 2^Θ) mais dans cette logique un énoncé admet plusieurs modalités de vérité (Θ_*-façons) donc plusieurs modalités (Θ_*-façons) de fausseté. Une valeur de vérité, intermédiaire entre le 0 et le 1 est cependant non nécessairement dans la chaîne Θ-valente* I*, mais plutôt un élément de sa completion chrysippienne 2^Θ qui bien entendu contient la chaîne Θ-valente* I*. 2^Θ n'est plus une chaîne, mais en tant qu'anneau booléen n'a rien à envier à l'anneau booléen* $\{0,1\}$*, puisqu'à tous égards* $\{0,1\}$ *tout comme la chaîne Θ-valente* I *sont moins riches de 2^Θ*. Le problème que pose *Base d'une Mathématique Θ-valente Chrysippienne* reste donc entier : il y est plutôt question d'utiliser une logique chrysippienne multivalente pour construire une mathématique intrinsèque : une mathématique de même valence, et chrysippienne comme la mathématique classique. Cette préoccupation constituant du reste bel et bien un exemple d'application précise. A ce jour, sauf meilleure information il n'existe aucun résultat, ne serait-ce que sur une théorie des ensembles fondée sur une telle logique. De toute évidence on pourrait à juste titre signaler les recherches sur les "sous-ensembles flous", dues à un mathématicien Américain Zaddeh en 1963. Ses recherches peuvent présenter quelques analogies réelles avec mes préoccupations. Toutefois, les ensembles flous de Zaddeh sont loin, bien loin d'avoir à leur acquit des résultats compatibles avec les attentes que je fonde sur une mathématique Θ-valente chrysippienne : *la logiques floue étant même déjà essentiellement non chrysippienne.*

Le projet : *Base d'une mathématique* Θ *-valente chrysippienne* est donc à vrai dire très ambitieux ; il relève même, et c'est la cas de le dire, de l'utopie scientifique pure. Mais quel homme de sciences véritable, quel mathématicien même de génie, peut se prévaloir de prévoir ce que sera le science, la science mathématique des années qui viennent si celle-ci tient à rester la science de son temps ?
A moins de conjecturer qu'il n'y a de chrysippien que bivalent.

Le point de départ de mes travaux, qui reste celui du 22 Octobre 1982, est l'utilisation (comme base de départ) d'une structure riche à la fois de l'héritage chrysippien, donc booléen, mais également de l'héritage Θ-valent au sens de l'académicien Roumain : Gr. C. Moisil comme modèle algébrique d'une telle logique.

On obtient ainsi la structure d'anneau chrysippien Θ-valent $ach\Theta$ $(\mathrm{A}, \Omega_\alpha)$. La définition, la construction, l'étude détaillée de l'achΘ est l'objet de la thèse de 1982. Cependant la thèse s'achève sans avoir pu élaborer une théorie, même incomplète, d'une mathématique Θ-valente chrysippienne. Ceci du reste n'en était pas l'objet. Il y était question de poser les bases logiques d'une éventuelle mathématique Θ-valente chrysippienne. En somme un travail de défrichage.

Passé ce stade, il semble conséquent de procéder ensuite à l'évaluation de ce que l'achΘ pourrait apporter d'enrichissant à l'anneau booléen et par voie de logique, à la logique classique booléenne. On a alors tôt fait de se rendre compte qu'une étude plus élaborée de l'achΘ soulève bien des problèmes qui sont loin d'être, comme on le dirait volontier, de simples exercices somme toute scolaires.

Il serait hors de question de prétendre en proposer une liste exhaustive. Le professeur Georgescu de l'Université de Bucarest, (Roumanie), disciple de Moisil, en énonce les cinq suivants dès 1982

1. Etude des objets injectifs, des enveloppes injectives dans la catégorie des achΘ. Par exemples les achΘ injectifs sont les chΘ complétions complètes.
2. Les achΘ monadiques et polyadiques.
3. Un calcul des prédicats ayant comme modèle algébrique les achΘ polyadiques.
4. La théorie des modèles pour les achΘ. Pour Θ fini, la théorie élémentaire des achΘ est-elle décidable, oui ou non ? Existe-t-il un modèle complétion de cette théorie ?
5. Produit tensoriel et somme directe d'achΘ.

Problèmes tous ouverts à ce jour, sauf meilleur avis. La liste reste non exhaustive puisque je pourrais également citer une préoccupation capitale et pas très scolaire : étude de la dualité pour les achΘ à la manière dont s'effectue l'étude des espaces booléens. Etude que je crois à ce jour avoir mené à ses termes : chapitre 8. Quant à ceux qui, à raison ou à tort, estiment que "les logiques multivalentes ne doivent à ce jour se contenter que d'une utilisation en vue d'applications précises", cette attitude semble relever de démarches anti-cartésiennes, il est pertinent que pour le mathématicien, il est hors de question de prouver, ni même d'approuver l'existence, oui ou non, de logiques multivalentes et chrysippiennes.
Elles existent ne serait-ce que sous hypothèse absurde.
Toutefois, ce dont les mathématiciens ont une réelle responsabilité scientifique et historique est qu'ils se doivent d'exploiter leur savoir faire pour doter d'une formulation appropriée aux besoins éventuels, ces logiques de l'hypothèse absurde.

Rien de tout celà ne semble acquis à ce jour. A moins de tenir pour acquis qu'*il n'y a de science que bivalente.*

En revanche, utiliser les logiques multivalentes (et c'est ici un avis communément partagé) encore si peu connues, je dirais même encore si peu précises, à des applications précises, non seulement relèverait de manipulations anti-scientifiques mais bien plus serait révélateur d'une volonté délibérée d'imprimer une orientation à risques à l'évolution naturelle de la science qui.

Les présents travaux que j'intitule : *Logique et Algèbre des structures Mathématiques modales* Θ*-valentes chrysippiennes* constituent ce qui me paraît être une mathématique modale Θ-valente chrysippienne.
Les divers chapitres constituent selon moi diverses étapes préalables à la mise sur pied de cette mathématique.

Les onze (11) chapitres que comporte ce travail se terminent sur une note qui nous interpelle tous à une collaboration sans parti pris à une œuvre qui ne peut être que l'œuvre de tous sans la moindre exclusive.