que sais-je ?

LES LOGARITHMES

ANDRÉ DELACHET

le point des connaissances actuelles

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

Les logarithmes et leurs applications

QUE SAIS-JE ?

Les logarithmes et leurs applications

ANDRÉ DELACHET
Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure
Agrégé de Mathématiques
Professeur de Mathématiques Spéciales

Cinquième édition mise à jour
42[e] mille

puf

DU MÊME AUTEUR

(Dans la collection « Que sais-je ? »)

L'analyse mathématique, n° 378.
La géométrie contemporaine, n° 401.
Le calcul vectoriel, n° 418.
Calcul différentiel et intégral, n° 466.
La balistique, n° 470 (en collaboration avec J. TAILLÉ).
La géométrie descriptive et ses applications, n° 521 (en collaboration avec J. MOREAU).
La résistance des matériaux, n° 599.
L'algèbre moderne, n° 661 (en collaboration avec M. QUEYSANNE).
La géométrie analytique, n° 1047.
La géométrie différentielle, n° 1104.
La géométrie projective, n° 1103.
L'algèbre élémentaire, n° 1163.
La géométrie élémentaire, n° 1211.
Le calcul tensoriel, n° 1336.

Dépôt légal. — 1re édition : 1er trimestre 1960
5e édition : 1er trimestre 1977

INTRODUCTION

De nos jours, on ne peut lire un article scientifique sans y rencontrer des expressions telles que « loi exponentielle » ou « loi logarithmique ». Récemment, présenté à un médecin, j'eus le plaisir de l'entendre faire cet aveu : « Je n'ai jamais rien compris aux mathématiques et j'en suis fort gêné, car pour faire de la biologie, je dois apprendre ce qu'est un logarithme népérien ! » Il faisait allusion, je pense, au pH d'une solution acide ou alcaline, à moins que ce ne soit à une loi d'accroissement, avec le temps, du nombre de bactéries que renferme une culture.

Dûs à l'esprit inventif du mathématicien écossais Neper (1), les logarithmes semblent nés du désir des mathématiciens de son époque de trouver quelque invention qui simplifiât les effroyables calculs numériques auxquels ils étaient sans cesse contraints de se livrer pour la résolution des triangles célestes, seule application des mathématiques que l'on connût alors.

En effet, au XVI^e siècle et au début du XVII^e, on construisait des tables de sinus et de tangentes naturelles pour un rayon exprimé par un million, ou même dix millions de parties ; lorsqu'on songe que ces calculs exigeaient de continuelles divisions et multiplications qui devaient impitoyablement s'exécuter au complet, sans faire grâce d'aucun chiffre sur les plus grands nombres, on comprend très bien que tous les vœux des mathématiciens tendissent à se délivrer d'un si lourd fardeau, et que

(1) Neper, ou Napier (Jean), baron de Merchiston, mathématicie écossais (1550-1617).

la nécessité suggérât mille moyens plus ou moins imparfaits de s'y soustraire (1). Mais Neper seul a donné et publié pour cela les logarithmes. Il serait intéressant de montrer que son droit d'inventeur est incontestable en faisant une analyse du principe de ses tables. Nous ne pouvons y songer dans le cadre restreint de cet ouvrage et renvoyons le lecteur désireux de bien connaître l'œuvre de Neper au très intéressant article de M. Biot publié dans l'*Histoire des Mathématiques*, de Sir W. W. Rouse Ball (2).

Nous nous proposons de brosser en quelques chapitres une théorie succincte des fonctions logarithmiques et exponentielles et de donner quelques indications sur la fréquence avec laquelle on les rencontre dans de nombreux phénomènes naturels.

Désirant que cet ouvrage soit accessible à tout étudiant qui pourrait avoir besoin des notions qui y sont traitées, nous ne ferons d'abord appel (dans la Première Partie) qu'à des connaissances que doit avoir tout bachelier qui se destine à une carrière scientifique ou médicale ; dans la Seconde Partie, nous nous efforcerons de montrer combien ces notions rencontrent de nombreuses applications pratiques tant dans les sciences dites exactes (physiques, chimiques) que dans les sciences appliquées (médicales, paramédicales, économiques) et dans la vie même de tous les jours ; enfin, dans la Troisième, et très brève Partie, faisant appel aux connaissances d'éléments d'algèbre moderne (3), nous essayerons d'indiquer ce qu'est devenu actuellement le concept de logarithme.

(1) Jean Képler, lui-même, l'un des fondateurs de l'Astronomie moderne (1571-1630), fit des tentatives dans ce sens.

(2) Traduction française par L. Freund, Librairie scientifique Hermann (1906).

(3) Cf. *L'Algèbre moderne*, collection « Que sais-je ? », n° 661.

PREMIÈRE PARTIE

LA FONCTION LOGARITHMIQUE ET CELLES QUI S'Y RATTACHENT

CHAPITRE PREMIER

LES FONCTIONS LOGARITHMIQUE ET EXPONENTIELLE

I. — La fonction logarithmique

1. Définition du logarithme népérien. — Notre but est de rechercher un procédé pour remplacer dans l'ensemble des nombres réels positifs la multiplication par l'addition.

En d'autres termes, nous nous proposons de déterminer une fonction $f(t)$ de la variable réelle t, à valeurs réelles, définie pour les valeurs positives de t (ou, comme on dit encore, une application f de l'ensemble des nombres réels positifs dans l'ensemble des nombres réels) vérifiant, quels que soient les nombres réels positifs x et y :

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad [1]$$

Sans chercher pour l'instant à imposer à cette fonction le minimum de conditions requises pour son existence, supposons-la *dérivable*. Dérivant successivement la relation [1] par rapport à x, puis par rapport à y, et désignant d'une façon générale par

$f'(t)$ le nombre dérivé de f pour la valeur numérique t de la variable, nous obtenons :

$$yf'(xy) = f'(x)$$

et :

$$xf'(xy) = f'(y)$$

Donc, la fonction f doit être telle que :

$$xf'(x) = yf'(y)$$

y étant une valeur numérique indépendante de x, nécessairement : $f'(x) = \dfrac{K}{x}$; K étant une constante par rapport à x.

Si, d'autre part, nous substituons dans [1] les valeurs numériques suivantes des indéterminées x et y : $x = y = 1$, cette relation entraîne : $f(1) = 2f(1)$. Donc : $f(1) = 0$.

Par conséquent, toute fonction dérivable satisfaisant à la relation [1] *coïncide nécessairement avec une fonction définie par le système :*

$$\mathrm{I} \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{K}{x} \\ f(1) = 0 \end{array} \right.$$

Quel que soit le nombre réel constant K, il résulte des propriétés des fonctions continues (1) qu'il existe une fonction et une seule satisfaisant au système [1] et définie pour toutes les valeurs positives du nombre réel x : l'unique primitive de la fonction $\dfrac{K}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$.

Dans le cas particulier où $K = 1$, cette fonction

(1) La fonction $\frac{1}{x}$ est en effet continue pour les valeurs de x n'appartenant pas à un intervalle contenant 0 et donc intégrable (cf. par exemple : *Calcul différentiel et intégral*, « Que sais-je ? », n° 466).

est notée : $y = \text{Log}\, x$ et appelée *logarithme népérien* (ou *hyperbolique*, ou *naturel*) de x.

2. Signification géométrique du logarithme népérien. — Il résulte de la définition élémentaire des primitives que la valeur numérique de la fonction

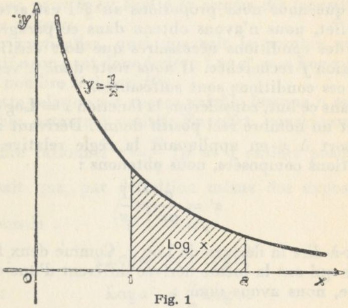

Fig. 1

$y = \text{Log}\, x$ pour une valeur positive $x = a$ de la variable représente (fig. 1) la mesure de l'aire comprise entre l'axe des x, l'hyperbole d'équation $xy = 1$ et les deux parallèles à Oy d'abscisses 1 et a. Cette aire concrétise le sens de variation de la fonction logarithmique $y = \text{Log}\, x$, manifestement *croissante* puisque sa dérivée $\frac{1}{x}$ est *positive*, x étant positif. Par suite, si x est supérieur à 1, Log x est positif et si x est compris entre 0 et 1, Log x est négatif. Cette aire doit donc être comptée positivement dans le premier cas et négativement dans le second.

3. Propriétés du logarithme. — D'après sa définition même, Log x est une fonction *définie*, *continue* et *dérivable* pour les valeurs *positives* de la variable x, qui s'annule pour $x = 1$; sa dérivée est $\frac{1}{x}$.

Nous devons nous demander maintenant si le but que nous nous proposions au § 1 est atteint ; en effet, nous n'avons obtenu dans ce paragraphe que des conditions nécessaires que doit vérifier la fonction f recherchée. Il nous reste donc à vérifier que ces conditions sont suffisantes.

Dans ce but, considérons la fonction $z = \text{Log } ax$, a étant un nombre réel positif donné. Dérivant z par rapport à x en appliquant la règle relative aux fonctions composées, nous obtenons :

$$z' = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$

c'est-à-dire la dérivée de Log x. Comme deux fonctions qui ont la même dérivée diffèrent d'une constante, nous avons donc :

$$\text{Log } ax = \text{Log } x + \text{constante}$$

En donnant à x la valeur particulière $x = 1$, nous voyons que la constante est égale à Log a. Donc : $\text{Log } ax = \text{Log } x + \text{Log } a$ [1]
quels que soient les nombres réels positifs a et x. Cette fonction réalise donc bien le but que nous nous étions proposé.

Cette propriété s'étend évidemment par récurrence à un nombre quelconque de facteurs. En effet, supposons que pour $n - 1$ nombres positifs a_1, a_2, ..., a_{n-1} on puisse écrire la relation :

$$\text{Log } a_1 a_2 \ldots a_{n-1} = \text{Log } a_1 + \text{Log } a_2 + \ldots + \text{Log } a_{n-1} \quad [2]$$

quel que soit le n-ième nombre positif a_n on peut écrire : $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = (a_1 a_2 \dots a_{n-1}) a_n$; donc en vertu des relations [1] et [2] :

$$\operatorname{Log} a_1 a_2 \dots a_n = \operatorname{Log} a_1 + \operatorname{Log} a_2 + \dots + \operatorname{Log} a_n$$

Par conséquent : *Le logarithme d'un produit de facteurs positifs est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.*

En particulier, quel que soit le nombre entier positif n, on peut donc écrire : $\operatorname{Log} a^n = n \operatorname{Log} a$ pour tout nombre réel *positif* a.

Cette relation est encore valable lorsque n est un nombre rationnel positif. En effet, considérons le nombre rationnel $r = \frac{p}{q}$ (p et q entiers positifs) ; on sait que, par définition même des exposants rationnels : $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$,

d'où : $$q \operatorname{Log} a^{\frac{p}{q}} = p \operatorname{Log} a,$$

soit : $$\operatorname{Log} a^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \operatorname{Log} a.$$

D'autre part, d'après la définition même d'un quotient : $b \times \frac{a}{b} = a$.

Donc : $\operatorname{Log} b + \operatorname{Log} \frac{a}{b} = \operatorname{Log} a$.

C'est-à-dire : $\operatorname{Log} \frac{a}{b} = \operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b$.

En particulier si r est un nombre rationnel négatif, posons : $r = -r'$; quel que soit le nombre réel a positif, il en résulte : $a^r = \frac{1}{a^{r'}}$ et, par conséquent :

$$\operatorname{Log} a^r = \operatorname{Log} \frac{1}{a^{r'}} = -\operatorname{Log} a^{r'} = -r' \operatorname{Log} a = r \operatorname{Log} a$$

En résumé, la relation : $\operatorname{Log} a^r = r \operatorname{Log} a$ est vérifiée quels que soient le nombre rationnel r positif ou négatif et quel que soit le nombre réel positif a.

REMARQUE : Si le nombre réel a est négatif, il peut arriver que le nombre a^r existe et soit réel positif. Ceci se produit lorsque r est un nombre entier pair (positif ou négatif) ou un nombre rationnel qui peut être représenté par une fraction irréductible p/q à dénominateur impair mais dont le numérateur est pair, de signe quelconque. Dans ces conditions, la démonstration précédente est encore valable à condition de remplacer a par sa valeur absolue $|a|$ et, par conséquent, la relation précédente prend la forme : $\operatorname{Log} a^r = r \operatorname{Log} |a|$.

4. Représentation graphique de la fonction $y = \operatorname{Log} x$. — Nous avons déjà vu que cette fonction est définie et continue pour $x > 0$. Sa dérivée $y' = \dfrac{1}{x}$ étant positive, elle est strictement croissante. Elle s'annule pour $x = 1$. Pour préciser ses variations, il nous reste à déterminer son comportement lorsque x augmente indéfiniment ou tend vers zéro.

Théorème I : **Lorsque $x \to +\infty$, $\operatorname{Log} x \to +\infty$.**

En d'autres termes : quel que soit le nombre A, il existe un nombre B tel que :

$$x > B \quad \text{entraîne} \quad \operatorname{Log} x > A$$

Choisissons un nombre réel a supérieur à 1, de sorte que $\operatorname{Log} a$ soit positif. Dès lors, n étant un nombre entier positif, la relation :

$$\operatorname{Log} a^n > A$$

sera vérifiée si l'entier n est supérieur au nombre réel $\dfrac{A}{\operatorname{Log} a}$ puisque : $\operatorname{Log} a^n = n \operatorname{Log} a$.

Si nous choisissons un entier fixe p supérieur à ce dernier nombre (ce qui est toujours possible puisque la suite des nombres entiers est illimitée) la fonction $\operatorname{Log} x$ étant croissante, il nous suffira de choisir :

$$x > a^p \quad \text{pour que} \quad \operatorname{Log} x > \operatorname{Log} a^p > A$$

Théorème II : **Lorsque $x \to 0$ par valeurs positives, $\operatorname{Log} x \to -\infty$.**

Posons $x = \frac{1}{X}$. Lorsque $x \to 0$ par valeurs positives, $X \to +\infty$.

Or : $\operatorname{Log}\frac{1}{X} = -\operatorname{Log} X$. Donc, ce théorème résulte du précédent.

Nous pouvons maintenant dessiner la courbe représentative de la fonction $y = \operatorname{Log} x$ (fig. 2). Son tracé peut être précisé par la remarque suivante : la pente de la tangente au point d'abscisse x est $\frac{1}{x}$; elle décroît donc constamment et tend vers zéro lorsque x augmente indéfiniment.

En particulier, la tangente au point d'abscisse $x = 1$ a pour pente 1. En d'autres termes les deux infiniments petits $\operatorname{Log}(1 + t)$ et t sont équivalents :

$$\operatorname{Log}(1 + t) \sim t \quad \text{lorsque} \quad t \to 0 \quad (1)$$

II. — La fonction exponentielle

5. Définition et propriétés de la fonction exponentielle. — Lorsque la variable y croît de 0 à $+\infty$, la fonction $x = \operatorname{Log} y$ est définie, continue et croissante de $-\infty$ à $+\infty$. Elle admet donc une *fonc-*

(1) Rappelons qu'on dit que deux fonctions sont équivalentes lorsque la variable tend vers une certaine limite, si le rapport de ces fonctions tend vers 1 dans ces conditions.

Que sais-je ?

COLLECTION ENCYCLOPÉDIQUE

fondée par Paul Angoulvent

Derniers titres parus

1640 **L'emploi et ses problèmes** (M. Pochard)
1641 **La filiation et l'adoption** (M.-L. Rassat)
1642 **Les institutions françaises** (P. Pactet)
1643 **Les hyperfréquences et leurs applications** (A.-J. Berteaud)
1644 **L'An Mil** (D. Le Blevec)
1645 **Les sciences de l'éducation** (G. Mialaret)
1646 **Le Saint-Empire** (J.-Fr. Noël)
1647 **Le basket-ball** (G. Bosc et R. Thomas)
1648 **Géographie des langues** (R. Breton)
1649 **Les Celtes** (V. Kruta)
1650 **Economie de la R.D.A.** (H. Smotkine)
1651 **La littérature néo-africaine** (A. Nordmann-Seiler)
1652 **L'étymologie anglaise** (P. Bacquet)
1653 **Le droit pénal des affaires** (J.-M. Robert)
1654 **La chimie minérale** (J. Besson)
1655 **La formation continue** (P. Besnard et B. Liétard)
1656 **Les jeux de mots** (P. Guiraud)
1657 **L'algèbre vectorielle** (G. Casanova)
1658 **Le maoïsme** (Fr. Marmor)
1659 **Les avocats** (G. Boyer-Chammard)
1660 **Les mots américains** (G. J. Forgue)
1661 **L'anxiété et l'angoisse** (A. Le Gall)
1662 **La photomacrographie** (G. Betton)
1663 **La Mongolie** (J. Legrand)
1664 **Les animaux préhistoriques** (H. et G. Termier)
1665 **Les maladies de la circulation sanguine** (Ch. Bourde)
1666 **Le Mexique** (M. Humbert)
1667 **La médecine nucléaire** (P. Blanquet et D. Blanc)
1668 **Les Basques** (J. Allières)
1669 **L'enfant psychosomatique** (L. Kreisler)
1670 **La dévaluation** (P.-H. Breton et A.-D. Schor)
1671 **Le raisonnement** (P. Oléron)
1672 **Le marketing** (A. Dayan)
1673 **Les complexes** (R. Mucchielli)
1674 **Ceylan « Sri Lanka »** (E. Meyer)
1675 **La vie chinoise** (M. Jan)
1676 **Les matériaux nucléaires** (J. Guéron)
1677 **Les contrats** (J. Hauser)
1678 **La sociologie de la publicité** (G. Lagneau)
1679 **Les accumulateurs électriques** (J. Hladik)
1680 **Les marchés publics en France** (J. Dupoux et B. Grosgeorge)
1681 **La littérature autrichienne** (J. Gyory)
1682 **La protection civile** (A.-P. Broc)
1683 **Les fascismes** (H. Michel)
1684 **La Mauritanie** (C. Toupet et J.-R. Pitte)
1685 **Développement et tirage noir et blanc** (G. Betton)