BIBLIOTHÈQUE
D'HISTOIRE
DES SCIENCES

Jean-Louis Gardies

Le raisonnement par l'absurde

puf

Le raisonnement par l'absurde

BIBLIOTHÈQUE D'HISTOIRE DES SCIENCES

Collection dirigée par
Maurice Caveing et Luce Giard

LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

JEAN-LOUIS GARDIES

Presses Universitaires de France

Croyez-vous que ce soit connaître une chose que de savoir seulement ce qu'elle n'est pas ?

LE CHEVALIER DE MÉRÉ

ISBN 2 13 043829 6

Dépôt légal — 1re édition : 1991, septembre

108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris

Avant-propos

Le titre dit assez clairement l'objet de la présente étude. On s'y propose de :

— *dégager une définition unique de ce qu'on appelle* raisonnement par l'absurde, *à l'intérieur de laquelle il soit sans doute éventuellement possible de distinguer différentes espèces, mais dont l'unicité permette de se saisir du problème dans son ensemble ;*
— *donner une analyse précise de la manière dont procède le type de démarche ainsi défini et la confronter à des exemples ;*
— *étudier sa réductibilité ou irréductibilité à d'autres formes de raisonnement qui pourraient en constituer des équivalents ;*
— *répondre ainsi à la question, souvent posée, de savoir s'il y a des cas où l'on ne peut se dispenser d'y recourir ;*
— *s'interroger sur les raisons qui semblent en faire l'instrument privilégié de certaines démonstrations, que ces raisons soient à chercher dans le tempérament intellectuel de l'auteur, dans le courant de pensée auquel celui-ci appartient, ou plutôt dans la nature intime du problème traité, voire celle du domaine de recherches dans lequel le problème lui-même s'inscrit.*

Une telle étude se devait d'être à la fois épistémologique et historique : épistémologique *d'abord, et plus attachée à la structure des modes de raisonnement eux-mêmes qu'aux événements et accidents individuels, dont* *l'intervention peut évidemment toujours venir infléchir le cheminement de leur histoire ;* historique *néanmoins, c'est-à-dire soucieuse d'éclairer ce cheminement par les raisons fondamentales qui, pour une bonne part, le déterminent.*

L'ensemble comporte sept chapitres, dont le premier élabore donc une définition du raisonnement par l'absurde, analyse sa structure, établit sur cette base le principe de sa réversibilité en une forme ostensive, s'en explique sur un exemple élémentaire et tente enfin d'éclairer les raisons pour lesquelles la tradition aristotélicienne n'a pu dépasser le stade d'une simple affirmation de cette réversibilité.

Le deuxième chapitre examine la très ancienne démonstration apagogique de l'incommensurabilité du côté et de la diagonale du carré ; il en propose deux reconstructions différentes, dont il montre chaque fois le retournement possible en une version ostensive ; il esquisse, sur cet exemple, une première analyse des raisons qui peuvent expliquer dans certains cas la prévalence d'une procédure par l'absurde sur son équivalent ostensif.

Le troisième chapitre considère la démonstration, déjà plus complexe, par laquelle la proposition 2 du livre XII des Eléments *inaugure la tradition euclidienne des premières procédures d'intégration ; il montre, ici encore, le possible retournement ostensif du double raisonnement apagogique qui la constitue et analyse le jeu des quantifications, auquel il semble bien que la préférence de l'apagogique sur l'ostensif se trouve essentiellement liée.*

Le quatrième chapitre dégage d'abord l'originalité des démonstrations apagogiques constitutives de la méthode d'exhaustion utilisée par Archimède relativement à celle d'Eudoxe ; il montre leur réversibilité, ainsi que celle des démonstrations apagogiques mises en œuvre par sa méthode de compression ; il retrouve chez Archimède une illustration d'un cas particulier déjà envisagé au premier chapitre ; il considère quelques situations où le Syracusain a préféré, en revanche, procéder ostensivement qu'apagogiquement.

Le cinquième chapitre explique d'abord pourquoi l'usage du raisonnement par l'absurde s'inscrit dans le cadre d'une démarche d'ensemble essentiellement synthétique, et comment, par le fait même, il perd son sens dans un contexte analytique ; il examine les conditions qui ont acheminé la construction eucli-

dienne, après le livre XII, sur cette voie de l'analyse et celles qui ont conduit un peu plus tard Archimède, au livre II du traité De la sphère et du cylindre, *à la même voie, qui débouchera sur la* méthode *cartésienne, où le raisonnement par l'absurde ne pouvait donc avoir sa place.*

Le sixième chapitre est consacré aux procédures proprement logiques, calcul des prédicats *d'abord, puis* calcul modal *; il y montre comment les méthodes de validation sémantique, presque toutes conçues ou du moins concevables comme foncièrement apagogiques, se laissent elles-mêmes retourner en une version ostensive, à laquelle il serait au demeurant assez facile de donner la forme syntaxique d'une déduction opérée à partir d'une axiomatique.*

C'est à la lumière des résultats des chapitres précédents que le dernier chapitre s'interroge sur la manière dont les philosophes ont eux-mêmes jugé le raisonnement par l'absurde, qu'ils l'aient privilégié, comme Platon, ou qu'ils en aient au contraire, à la suite d'Aristote, rabaissé la valeur ; il examine enfin si le rôle effectivement joué par ce type de preuve dans le discours d'un auteur comme Descartes s'accorde à ce que les conceptions épistémologiques de cet auteur laissaient attendre.

I

Qu'appelle-t-on raisonnement par l'absurde ?

On désignera ici comme *raisonnement par l'absurde*, ou *raisonnement par l'impossible*, ou *raisonnement apagogique* ou *raisonnement indirect*, sous sa forme la plus générale, le raisonnement qui, pour établir, à l'intérieur d'une théorie donnée, une certaine thèse θ, démontre que la négation de cette thèse entraîne, au terme d'un certain nombre d'inférences, soit deux conséquences, α et *non*-α, contradictoires l'une de l'autre, soit deux conséquences, α et β, dont on connaît simplement l'incompatibilité logique. Ces deux caractérisations sont manifestement équivalentes, puisque, d'une part, deux conséquences contradictoires sont incompatibles l'une avec l'autre et que, d'autre part, qualifier deux conséquences, α et β, d'*incompatibles* revient à dire que β implique *non*-α, en sorte que α et *non*-α deviennent elles-mêmes des conséquences du raisonnement.

On peut considérer comme des cas particuliers de cette forme générale :

1) le cas où l'on se contente de montrer que la négation de la thèse θ implique une conséquence α connue comme fausse; car si α est connue comme fausse, *non*-α est connue comme vraie et l'on a bien les deux propositions contradictoires α et *non*-α; qu'il s'agisse ici d'un simple cas particulier de la forme générale précédemment définie se remarque à ce qu'il est possible qu'un raisonnement

apagogique aboutisse aux deux conséquences α et *non*-α sans que nous soyons pour autant en état de reconnaître laquelle des deux est fausse;

2) le cas où l'on se contente de montrer que *non*-θ implique θ; puisque, dans ces conditions, *non*-θ s'impliquant d'abord elle-même, l'expression θ occupe simplement la place de α dans la contradiction caractéristique « α et *non*-α ».

Ces deux cas particuliers correspondent à peu près aux deux types de raisonnement apagogique que Bolzano se croyait tenu de distinguer[1]. L'important pour la suite de notre propos est de voir qu'ils se laissent en fait ramener au même genre. Remarquons qu'il arrive à Aristote de donner le premier cas comme caractéristique du raisonnement par l'absurde :

> La démonstration conduisant à l'impossible, écrit-il dans les *Seconds analytiques*[2], procède comme suit : soit à démontrer que A n'appartient pas à B; supposons qu'il lui appartienne, sachant en outre que B appartient à C; il en résulte que A appartient à C; mais admettons qu'il soit connu et accordé que c'est impossible; il n'est donc pas possible que A appartienne à B.

Ajoutons que le second cas, où l'on démontre que *non*-θ implique θ, est celui sur lequel G. Vailati attirait spécialement l'attention dans son article de 1904 intitulé « Sur une classe remarquable de raisonnements par réduction à l'absurde »[3].

Aristote mentionne abondamment dans ses écrits le *raisonnement* (συλλογισμός) ou la *démonstration* (δεῖξις ou ἀπόδειξις) *qui conduit à l'impossible* (εἰς τὸ ἀδύνατον ἄγων, ou, plus brièvement, εἰς τὸ ἀδύνατον)

1. Cf. Karel Berka, Zur Auffassung des apagogischen Beweises bei B. Bolzano, in *Acta Historiae rerum naturalium necnon technicarum*, Special Issue 16, Institute of Czechoslovak and General History CSAS, Prague, 1981, p. 30-31.

2. 87 *a* 7-10. (Pour la présente citation, comme pour celles qui suivront, que nous n'indiquions pas le traducteur signifie que nous donnons notre propre traduction.) Nous pouvons ici faire abstraction de la manière, évidemment propre à Aristote, de caractériser la proposition comme appartenance (ὑπάρχειν) d'un terme à un autre.

3. *Revue de Métaphysique et de Morale*, septembre 1904, p. 799-809.

ou encore *par l'impossible* (διά τοῦ ἀδυνάτου), qu'il oppose au raisonnement *ostensif* (δεικτικός); il emploie aussi dans le même sens l'expression de *réduction à l'impossible* (εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπαγωγή) ou simplement, quand le contexte est clair, de *réduction* (ἀπαγωγή), ce qui amènera les modernes à parler, comme Leibniz, de « démonstrations apagogiques, c'est-à-dire qui réduisent à l'absurdité »[4]. Les scolastiques opposeront de même au *syllogismus* (ils diront aussi *demonstratio* et *argumentatio*) *directus sive ostensivus* le *syllogismus indirectus sive deductivus*; ils parleront de *reductio* ou *deductio ad absurdum*, de *syllogismus*, *ductio*, *deductio* ou *argumentatio ad impossibile*, ou *per impossibile*, ou *per incommodum*, ou encore *ducens ad impossibile* ou *ad incommodum*.

Certains proposeront de distinguer[5] de la *preuve par l'absurde*, qui part de la négation d'une proposition pour démontrer cette proposition, la *réduction à l'absurde*, conçue comme partant de la proposition elle-même pour la réfuter. Cette distinction parfaitement admissible repose sur un fait extrêmement simple : qu'une proposition donnée entraîne contradiction peut servir à montrer aussi bien que sa négation est thèse du système ou qu'elle-même n'y a pas sa place.

* * *

Dans la forme générale de *raisonnement apagogique*, telle que nous l'avons caractérisée, il est exceptionnel que la contradiction finale résulte de la seule proposition *non*-θ sans l'assistance d'autres propositions, démontrées ou admises comme vraies. Nous dirons donc que les $n + 1$ prémisses du *raisonnement par l'absurde* sont *non*-θ, P_1, P_2, ..., P_n ($n \geqslant 0$), les n propositions P_i étant celles dont la vérité n'est pas mise en question, mais qui, par leur présence dans le raisonnement, contribueront à la déduction de la contradiction

4. *Nouveaux essais*, liv. IV, chap. VIII, § 2.

5. Par exemple *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* par André Lalande, Paris, Félix Alcan, 1928, article « Réduction à l'absurde ».

« α et *non*-α » à partir de l'admission de *non*-θ. C'est donc en fait la conjonction de ces $n+1$ propositions qui entraînera, au terme d'un certain nombre d'inférences, cette contradiction.

Il est facile de comprendre pourquoi et comment le raisonnement apagogique, tel que nous venons de l'analyser, peut se convertir en un raisonnement ostensif entièrement équivalent au précédent pour les conséquences qu'on se propose d'établir. Toute inférence en effet revêtant la forme :

si β, alors γ

se laisse retourner par contraposition en la forme équivalente

si *non*-γ, alors *non*-β;

si donc l'on renverse une à une les inférences successives d'un quelconque raisonnement indirect, on obtiendra en principe un raisonnement direct : la contradiction

α et *non*-α

qui terminait le raisonnement par l'absurde se transformera après négation en la tautologie initiale de ce raisonnement ostensif

non (α et *non*-α)

ou, si l'on préfère

α ou *non*-α;

tandis que le point d'aboutissement de ce nouveau raisonnement ostensif sera maintenant la thèse θ, celle même dont la négation était le point de départ, *non*-θ, du raisonnement par l'absurde. Ainsi suffit-il en principe de procéder par contrapositions pour que, comme l'écrivait Joachim Jungius au XVII^e^ siècle, « tout syllogisme direct *puisse* être changé en un indirect et inversement tout indirect *puisse* être ramené à un syllogisme direct »[6].

6. « Potest autem omnis directus Syllogismus in indirectum mutari, et vicissim, indirectus revocari ad directum », *Logica hamburgensis*, Hamburgi, Sumptibus Bartholdi Offermans, 1638, Liber Tertius, cap. XIII, 10.

Ce retournement, toujours possible, d'un raisonnement apagogique en un raisonnement ostensif, ne serait en réalité aussi simple que si le raisonnement apagogique se présentait constamment sous la forme d'une succession de *m* propositions $A_1, A_2, \ldots, A_m$, chaque A_i étant unilinéairement inférée à partir de la précédente A_{i-1}, jusqu'à la conclusion contradictoire A_m. Il est rare qu'un raisonnement parte d'une unique prémisse dont se déduiraient successivement les autres étapes; nous-mêmes avions parlé des $n + 1$ prémisses, *non*-θ, $P_1, P_2, \ldots, P_n$, du raisonnement par l'absurde; sans doute, ne serait-il pas impossible de conjoindre ces $n + 1$ prémisses en une unique proposition initiale, en sorte qu'on eût :

$$A_1 \Leftrightarrow \textit{non}\text{-}\theta \;\&\; P_1 \;\&\; P_2 \;\&\; \ldots \;\&\; P_n$$

et qu'on pût désormais déduire chaque A_i du seul A_{i-1} qui le précède et parvenir ainsi par une démarche unilinéaire jusqu'à la contradiction A_m. Il faut reconnaître qu'une telle démarche, si peu usuelle qu'elle fût, serait parfaitement régulière; elle permettrait alors de ramener un tel raisonnement apagogique au raisonnement ostensif qui procéderait, tout aussi unilinéairement, de la tautologie initiale « *non*-A_m » jusqu'à « *non*-A_1 », c'est-à-dire jusqu'à

$$\textit{non}\ (\textit{non}\text{-}\theta \;\&\; P_1 \;\&\; P_2 \;\&\; \ldots \;\&\; P_n)$$

proposition qui, rapprochée de notre connaissance de la vérité de la conjonction des prémisses

$$P_1 \;\&\; P_2 \;\&\; \ldots \;\&\; P_n$$

nous autoriserait à conclure « *non-non*-θ » c'est-à-dire « θ ».

Qu'une telle procédure soit possible n'empêche pas qu'elle soit assez rare dans la pratique du raisonnement. Il est exceptionnel qu'on rassemble toutes les prémisses dont on aura besoin en une proposition initiale qui permette d'avancer par étapes successives dont chacune trouve son entière justification dans celle qui la précède immédiatement. Il est plus courant que les prémisses *non*-θ, P_1, $P_2, \ldots, P_n$ interviennent plus ou moins séparément à telle ou telle étape, laquelle ne sera, dans ces conditions, impliquée que par une partie des prémisses et servira ensuite d'antécédent dans l'implication d'étapes ultérieures, non pas nécessairement de l'étape immédiatement suivante.

Ainsi le raisonnement par l'absurde, qui, parti des différentes prémisses *non*-θ, P_1, P_2, …, P_n, aboutit à la contradiction terminale « α et *non*-α », en dehors de la situation exceptionnelle où toutes les prémisses se trouveraient conjointes à l'intérieur d'une même proposition initiale, ne se retourne-t-il généralement pas en un raisonnement unilinéaire allant de « α ou *non*-α » jusqu'à une conclusion qui se présenterait sous la forme globale

$$non\ (non\text{-}\theta\ \&\ P_1,\ \&\ P_2\ \&\ \ldots\ \&\ P_n)$$

mais se retourne-t-il beaucoup plus naturellement en un raisonnement multilinéaire qui, faisant intervenir les différentes prémisses

α ou *non*-α
P_1
P_2
…
P_n

à divers moments du cheminement, aboutit finalement à la conclusion θ. Car enfin, si la procédure de contraposition conduit à remplacer, pour l'élaboration du raisonnement ostensif, une proposition qui découlait de la supposition de *non*-θ par sa propre négation, il est clair qu'elle ne doit pas conduire à la négation des prémisses P_1, P_2, …, P_n, qu'on a admises dans le raisonnement apagogique, et qu'on continuera évidemment à admettre dans le raisonnement ostensif, pour ce qu'elles sont, c'est-à-dire pour des propositions vraies.

Dans le texte que nous avons déjà cité, Jungius, immédiatement après avoir mentionné la possibilité de convertir un syllogisme direct en syllogisme indirect et réciproquement, justifie cette possibilité en ces termes :

En effet, si l'on prend la contradictoire de l'une ou l'autre des deux prémisses du syllogisme direct comme nouvelle conclusion, que la contradictoire de l'ancienne conclusion devienne prémisse et qu'on lui adjoigne l'autre prémisse du syllogisme direct, il en résultera un syllogisme indirect... Le syllogisme indirect se ramène à un syllogisme direct de la même manière, à ceci près que ce n'est pas la contradictoire de l'une ou l'autre des deux prémisses, mais de la seule prémisse fausse qui devient la conclusion du nouveau syllogisme[7].

Rien ne nous empêche d'appliquer à toute inférence par laquelle on passe de $n + 1$ prémisses à une conclusion, les propos que Jungius applique ici au syllogisme, c'est-à-dire à une inférence qui ne comporte que deux prémisses. Si $n = 1$, le raisonnement par l'absurde, qui de

non-θ & P

(P étant la prémisse dont on connaît la vérité) déduit une contradiction, se ramène au raisonnement ostensif, qui, comme le dit Jungius, de la négation de la contradiction, conjointe avec la prémisse P, déduit θ. Mais si $n > 1$, P_1, P_2, ..., P_n, qui figuraient parmi les $n + 1$ prémisses du raisonnement indirect, gardent toutes leur statut de prémisses dans le raisonnement direct qui lui correspond.

Ainsi, pour passer d'un raisonnement par l'absurde au raisonnement ostensif qu'on peut toujours lui substituer, convient-il de distinguer soigneusement dans le cours du raisonnement apagogique initial :

1) d'une part les prémisses reconnues comme vraies, ainsi que les étapes du raisonnement qui sont des conséquences de ces seules prémisses vraies;
2) d'autre part les étapes du raisonnement pour l'établissement desquelles est entrée en jeu l'admission de *non*-θ.

7. « Si enim alterutrius sumptionum directi Syllogismi contradictoria statuatur, ut nova conclusio, conclusionis autem pristinae contradictoria fiat sumptio, eique adjungatur reliqua sumptionum directi Syllogismi, orietur Syllogismus indirectus...

« Eodem modo indirectus Syllogismus revocatur ad directum, nisi quod non alterutrius sumptionum, sed solius falsae contradictoria novi fit Syllogismi conclusio », *ibid.*, 11 et 12.

Les premières garderont, telles quelles, dans le raisonnement ostensif le statut de *prémisses* qu'elles avaient dans le raisonnement apagogique. Chacune des secondes, au contraire, cédera la place à sa négation dans le nouveau raisonnement ostensif, par l'enchaînement de contrapositions qui d'un raisonnement fait passer à l'autre.

Nous venons de montrer qu'il n'y avait rien qui empêchât de « retourner » n'importe quel raisonnement par l'absurde en un raisonnement ostensif équivalent. Il faut reconnaître qu'il existe au moins un cas dans lequel, sans que ce retournement soit le moins du monde impossible, il aboutit cependant à un raisonnement ostensif dont la similitude est telle avec le raisonnement apagogique initial, qu'il faut s'armer de beaucoup d'attention pour en voir la différence; car la substitution d'un raisonnement à l'autre peut s'opérer ici sans modification de la partie délicate et intéressante du raisonnement.

Ce cas est celui, que nous avions signalé au départ, dans lequel la thèse à démontrer θ occupe elle-même la place de α dans la contradiction terminale « α et *non*-α » du raisonnement apagogique, celui dans lequel, si l'on préfère, on établit la thèse θ en démontrant que *non*-θ implique θ. Pour ramener un tel raisonnement à la caractérisation que nous avions proposée du raisonnement par l'absurde en général, on peut dire qu'il procède comme suit :

1) il va de soi que *non*-θ s'implique elle-même;
2) on démontre en outre que *non*-θ implique θ;
3) donc *non*-θ implique la contradiction « θ & *non*-θ »;
4) donc θ.

Ce raisonnement apagogique se laisse facilement retourner, conformément à nos indications précédentes, sous la forme ostensive suivante :

1) *non* (θ & *non*-θ)

ou, si l'on préfère,

θ ou *non*-θ;

2) il va de soi que θ s'implique elle-même;
3) on démontre que *non*-θ implique θ;
4) donc, en tout état de cause, θ.

En passant du raisonnement apagogique au raisonnement ostensif, le principal changement est qu'au rôle tenu par le principe de contradiction *à la fin du premier* correspond le rôle tenu par le principe du tiers exclu *au début du second*; pour le reste, l'un et l'autre raisonnements mobilisent des inférences tout à fait élémentaires (comme celle selon laquelle une expression s'implique elle-même), à l'unique exception de la démonstration, *commune aux deux raisonnements*, que *non*-θ *implique* θ. Cette dernière démonstration, étant la seule qui ne soit pas triviale, est aussi la seule que l'observateur remarque dans l'un et l'autre raisonnements, en sorte que la différence, de l'un à l'autre, est à peine sensible.

Ainsi peut-on se demander si la fameuse démonstration, dite *de la diagonale*, donnée par Cantor, de l'impossibilité de mettre en correspondance biunivoque l'ensemble des entiers naturels avec celui des réels, doit être considérée comme ostensive ou apagogique. Elle sera *apagogique*, si on se la représente sous la forme suivante :

1) si une telle bijection existe, elle existe;
2) la procédure de la diagonale nous montre que, si l'on se donne une telle bijection, on peut construire un réel auquel cette bijection cependant n'associera aucun entier;
3) donc la supposition d'une telle bijection implique et qu'elle soit et qu'elle ne soit pas;
4) donc une telle bijection comme correspondance biunivoque n'existe pas.

Elle sera *ostensive*, si on se la représente sous la forme suivante :

1) une telle bijection existe ou n'existe pas;
2) si elle n'existe pas, elle n'existe pas;
3) mais, si elle existe, c'est-à-dire si l'on peut réaliser une telle bijection, la procédure de la diagonale nous montre qu'on peut alors construire un réel auquel cette bijection n'associera aucun entier;
4) donc, en tout état de cause, une telle bijection n'existe pas.

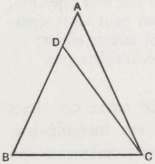
On sera tenté de considérer que la différence entre ces deux formes, l'une apagogique et l'autre ostensive, est insignifiante, puisque le seul moment de chacun de ces deux raisonnements qui échappe à la trivialité se retrouve commun à l'un et à l'autre, constituant la deuxième étape du premier et la troisième du second. D'une façon générale, quand la démonstration d'une thèse θ repose sur la preuve que *non*-θ implique θ, on peut aussi bien présenter l'ensemble de cette démonstration comme étant de nature ostensive ou de nature apagogique, puisque le passage de l'une à l'autre forme est lié à des modifications assez insignifiantes pour être peu perceptibles, qui laissent intact, comme nous l'avons vu sur l'exemple de la diagonale de Cantor, ce qu'on est en droit de regarder comme le cœur même de la démonstration. Tenterait-on de contraposer ce cheminement lui-même par lequel de *non*-θ on déduit θ, la nouvelle démarche ainsi obtenue ne serait ni plus ni moins ostensive, ni plus ni moins apagogique que le cheminement initial, pour cette raison fondamentale que l'implication

si *non*-θ, alors θ

est elle-même, à une double négation près, sa propre contraposée.

***

Pour trouver un exemple, aussi élémentaire que possible, qui puisse déjà donner une certaine illustration de nos propos théoriques, nous choisirons la première véritable démonstration par l'absurde qui se présente à la lecture des *Eléments* d'Euclide. Il s'agit de la proposition 6 du livre I :



Si deux angles d'un triangle sont égaux l'un à l'autre, les côtés opposés à ces angles égaux seront aussi égaux l'un à l'autre.

Soit ABC un triangle ayant l'angle ABC égal à l'angle ACB; je dis que le côté AB est égal au côté AC.

Car, si AB est inégal à AC, l'un des deux est plus grand que l'autre.

Soit AB le plus grand, et retranchons de AB, le plus grand, la droite DB égale au plus petit AC, et joignons DC.

Donc, puisque DB est égal à AC et que BC est commun, les deux droites DB et BC sont respectivement égales à AC et CB; or l'angle DBC est égal à l'angle ACB; la base DC est donc égale à la base AB et le triangle DBC sera égal au triangle ACB, le plus petit au plus grand, ce qui est absurde; AB n'est donc pas inégal à AC; il lui est donc égal.

Si donc deux angles d'un triangle sont égaux l'un à l'autre, les côtés opposés à ces angles égaux seront aussi égaux l'un à l'autre; ce qu'il fallait démontrer.

Ici la thèse θ à démontrer est la suivante :

Quel que soit le triangle ABC

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow AB = AC.$$

Nous partirons de la supposition de *non*-θ, c'est-à-dire :

Il existe un triangle ABC, tel que

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \quad \& \quad AB \neq AC.$$

Supposons donc que, des deux côtés inégaux, AB soit le plus grand. Le triangle ABC représente ainsi un triangle singulier, dont les angles ABC et ACB et les côtés AB, AC, etc., prennent aussi une existence singulière. Nous distinguerons cinq étapes, de la première, qui énonce *non*-θ, à la cinquième, qui énonce l'incompatibilité terminale, les indications mises entre parenthèses au terme de chaque ligne renvoyant chaque fois aux étapes antérieures et aux thèses qui justifient la conséquence tirée :

1) $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ & $AB > AC$

2) $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (1)

3) $AB > AC$[8] (1)

8. La lourdeur avec laquelle nous détachons, en deux étapes successives, les deux conjoints de la conjonction tient à notre souci de marquer ensuite le jeu distinct dans lequel entre chacun des deux conjoints.

4) il existe un point, compris entre A et B, que nous désignerons par la lettre D, tel que AB — AD, c'est-à-dire DB, est égal à AC (3)
5) triangle DBC = triangle ABC (2, 4, *Eléments* I-4[9]).

La cinquième et dernière étape appelle deux observations : d'une part la proposition 4 du livre I des *Eléments*, qui permet d'inférer la conclusion de cette cinquième étape à partir des données de la deuxième et de la quatrième, dit que, « si deux triangles ont chacun deux côtés respectivement égaux à deux côtés de l'autre et que les angles compris par les côtés égaux soient égaux, ces triangles auront aussi leurs bases égales et seront égaux l'un à l'autre »; d'autre part, si la conclusion à laquelle parvient ainsi la cinquième étape est « absurde », c'est qu'elle contredit la « notion commune », mentionnée en tête du même livre I, selon laquelle « le tout est plus grand que la partie ».

Le retournement de ce raisonnement apagogique en son équivalent ostensif devra donc partir de la négation de l'égalité

triangle DBC = triangle ABC,

dont la notation, traditionnelle, que nous avons adoptée, ne doit pas nous faire oublier qu'elle était l'objet d'une quantification existentielle, et que, par le fait même, l'inégalité que nous obtiendrons, en la niant, se trouvera universellement quantifiée. En outre, comme cette cinquième étape résultait à la fois d'un théorème antérieur, qu'il n'est évidemment pas question de nier pour le faire entrer dans une contraposition, et des deux propositions :

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$$

et

il existe un point D, tel que DB = AC

l'étape qui désormais suivra fera valoir que :

si $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, alors il n'existe pas de point D tel que DB = AC.

9. Nous abrégeons « proposition 4 du livre I » en « I-4 ».

Dans la mesure enfin où la quatrième étape du raisonnement originel s'appuyait elle-même sur la troisième, à partir de l'étape précédente du nouveau raisonnement on passera à celle selon laquelle :

Si $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, alors $AB \not> AC$.

Ainsi pourrait-on substituer à la démonstration par l'absurde proposée par Euclide la démonstration ostensive suivante :

> Quel que soit le triangle ABC ayant l'angle ABC égal à l'angle ACB, je dis que le côté AB est égal au côté AC.
>
> Prenons sur AB entre A et B un point quelconque D et joignons DC.
>
> Le triangle DBC n'est pas égal au triangle ABC, puisqu'il est plus petit; ainsi, comme l'angle DBC est égal à l'angle ACB, DB n'est pas égal à AC; *sinon, les angles égaux* DBC *et* ACB *ayant leurs côtés adjacents respectivement égaux, les triangles* DBC *et* ABC *seraient égaux.*
>
> Si donc il n'existe pas de point D compris entre A et B tel que DB soit égal à AC, c'est que AB n'est pas plus grand que AC.
>
> On démontrera de la même manière que AC n'est pas plus grand que AB.
>
> Donc, quel que soit le triangle ABC, si l'angle ABC est égal à l'angle ACB, le côté AB est égal au côté AC.

La mise en parallèle des deux démonstrations, l'une apagogique, l'autre ostensive, équivalentes en ce sens qu'elles sont construites à partir des mêmes propositions élémentaires, tout au plus contraposées d'un cas à l'autre, donne déjà quelque idée des raisons pragmatiques qui peuvent conduire à préférer l'une à l'autre.

Certaines de ces raisons peuvent être circonstancielles, comme on peut le voir en particulier avec l'utilisation, par chacune de ces démonstrations, de la proposition 4 du livre I des *Eléments* : la version apagogique conduit à mobiliser ce théorème dans la formulation exacte qui lui avait été donnée, tandis que la version ostensive amène évidemment à contraposer l'implication par laquelle il s'exprime; c'est à cause de cette contraposition qui risquait de masquer la présence du théorème que nous avons préféré, suivant d'ailleurs la manière habituelle d'Euclide en pareil cas, doubler l'inférence ainsi

BIBLIOTHÈQUE D'HISTOIRE
DES SCIENCES

Collection dirigée par
Maurice Caveing et Luce Giard

OUVRAGES PARUS

Euclide d'Alexandrie, *Les Eléments* (traduit du texte de Heiberg)
Volume 1 : *Introduction générale* (par Maurice Caveing) et *Livres I-IV : Géométrie plane* (traduction et commentaires par Bernard Vitrac).

F. Delaporte, *Le savoir de la maladie. Essai sur le choléra de 1832 à Paris.*

J.-L. Gardies, *Le raisonnement par l'absurde.*

C. Sinding, *Le clinicien et le chercheur. Des grandes maladies de carence à la médecine moléculaire (1880-1980).*

OUVRAGE A PARAITRE

M. Blay, *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVII^e et XVIII^e siècles.*