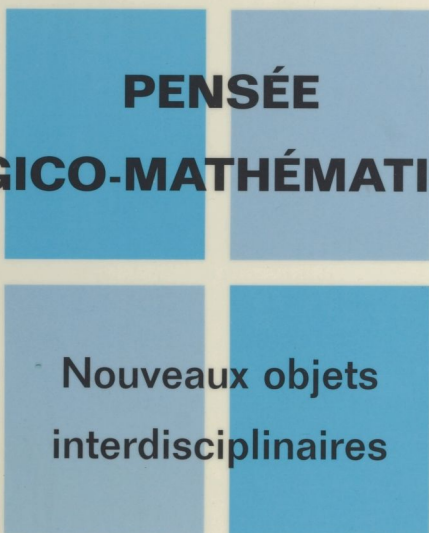


Olivier Houdé et Denis Miéville



PENSÉE
LOGICO-MATHÉMATIQUE

Nouveaux objets
interdisciplinaires

puf

Psychologie et sciences de la pensée

PENSÉE I Pensée logico-mathématique MATHÉMATIQUE
Nouveaux objets interdisciplinaires

Olivier NOUË
Denis NREVILLE

1984
Paris
1984

45-3-06-7564

Centre de Recherches de l'Université de Paris

PSYCHOLOGIE ET SCIENCES DE LA PENSÉE

Collection dirigée par

Olivier Houdé

Comité d'évaluation scientifique
Stanislas Dehaene, Pierre Jacob, Denis Miéville,
Jacques Pitrat, Joëlle Proust et François Rastier

PENSÉE LOGICO-MATHÉMATIQUE

Nouveaux objets interdisciplinaires

Olivier HOUDÉ
Denis MIÉVILLE

Avec la collaboration de

Jean-Pierre CHANGEUX

Michel DE GLAS

Stanislas DEHAENE

Pascal ENGEL

Jean-Blaise GRIZE

BIBLIOTHEQUE NATIONALE DE FRANCE



3 7513 00318737 3

L3.34.174.23641



Presses Universitaires de France



PENSÉE LOGICO-MATHÉMATIQUE

de Raymond Queneau

Préface de Raymond Queneau

Éditions de la Pléiade
Paris, 1994

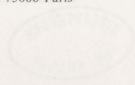
OLIVIER HOUDE
DANS MIEVILLE

Texte de Raymond Queneau
Illustrations de Raymond Queneau
Paris, 1994

ISBN 2 13 045992 7

Dépôt légal – 1^{re} édition : 1993, novembre

© Presses Universitaires de France, 1994
108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris



LES COLLABORATEURS

Jean-Pierre Changeux. Collège de France et CNRS, Laboratoire de neurobiologie moléculaire, Institut Pasteur.

Michel De Glas. CNRS, Laboratoire Reconnaissance des formes et intelligence artificielle, Université Paris VI.

Stanislas Dehaene. INSERM et CNRS, Laboratoire de sciences cognitives et psycholinguistique, Maison des sciences de l'homme.

Pascal Engel. Université de Caen et CNRS, Centre de recherches en épistémologie appliquée, Ecole polytechnique.

Jean-Blaise Grize. Université de Neuchâtel, Centre de recherches sémiologiques.

DES MÊMES AUTEURS

Olivier Houdé

Cognition et développement : boîte à outils théoriques, Berne, Peter Lang, 1991 (avec J. Bideaud).

Catégorisation et développement cognitif, Paris, PUF, 1992.

L'homme en développement (coll. « Premier Cycle »), Paris, PUF, 1993 (avec J. Bideaud et J.-L. Pedinielli).

Denis Miéville

Essai de logique naturelle, Berne, Peter Lang, 1983 (avec M.-J. Borel et J.-B. Grize).

Un développement des systèmes logiques de Stanislaw Lesniewski, Berne, Peter Lang, 1984.

Approches sémiologiques dans les sciences humaines, Lausanne, Payot, 1993.

Jean-Pierre Changeux

L'homme neuronal, Paris, Fayard, 1983.

Matière à pensée, Paris, Odile Jacob, 1989 (avec A. Connes).

Michel De Glas

Proceedings of the first world conference on the fundamentals of artificial intelligence, Paris, Angkor, 1991 (avec D. Gabbay).

Stanislas Dehaene

Numerical cognition, Oxford, Blackwell, 1993.

Pascal Engel

La norme du vrai : philosophie de la logique, Paris, Gallimard, 1989.

Etats d'esprit : questions de philosophie de l'esprit, Aix-en-Provence, Aliena, 1992.

Jean-Blaise Grize

Essai de logique opératoire, Paris, Dunod, 1972 (avec J. Piaget).

Essai de logique naturelle, Berne, Peter Lang, 1983 (avec M.-J. Borel et D. Miéville).

Sémiologie du raisonnement, Berne, Peter Lang, 1984.

Logique et langage, Gap, Ophrys, 1990.

Un signe parmi d'autres, Neuchâtel, Editions Gilles Attinger, 1992.

Sommaire

Introduction. Quoi de neuf depuis *Logique et connaissance scientifique* ?
par Olivier Houdé, 1

PREMIÈRE PARTIE PENSÉE LOGICO-MATHÉMATIQUE ET PSYCHOLOGIE

Chapitre I. Logique. Histoire et diversité,
par Denis Miéville, 9

Logique et mathématique : l'histoire d'une complicité, 9

L'émergence d'un calcul logique, 9

*Les logiques issues de la tradition russellienne et les théories classiques
des ensembles*, 12

L'émergence de la théorie des systèmes formels, 14

L'intuitionnisme, 16

Le temps d'un bilan, 17

La logique classique contemporaine, 18

Les logiques non classiques, 24

Les logiques épi-classiques, 24

Les logiques affaiblies, 26

Les logiques supra-classiques, 27

Les logiques issues d'une problématique appliquée, 29

Vers une logique naturelle (ou) non formelle, 30

Esquisse d'une logique d'ordre supérieur, développementale, libre et
universelle, 31

Une caractérisation des systèmes logiques de Lesniewski, 31

La protothétique ou théorie des thèses premières, 33

Un aperçu de l'ontologie de Lesniewski, 37

La méréologie ou théorie des classes collectives, 42

Epilogue, 46

Chapitre II. La référence logico-mathématique en psychologie. Entre méthode universelle et rationalité arrogante,

par Olivier Houdé, 47

Psychologisme, logicisme, réalisme et constructivisme, 47

Psychologisme et antipsychologisme : Mill, Frege et Husserl, 48

Devenir des arguments antipsychologistes et logicisme, 49

Réalisme et constructivisme, 52

En filigrane, 54

Pensée logico-mathématique et structuralisme piagétien, 55

Du bébé biologique au bébé géomètre, 55

L'exemple de la catégorisation, 58

De l'universel à l'individuel, 58

Le contrôle des faits, 61

Pensée logico-mathématique, cognitivisme et connexionnisme, 64

Le cognitivisme : symboles et inférences, 65

Formalismes logiques de représentation des connaissances, 65

Logique mentale et raisonnement : La logique mentale ; Modèles mentaux, biais de raisonnement et schémas pragmatiques ; Déduction et induction, 66

Le connexionnisme : du rêve de Boole à la statistique de neurones, 79

Nouvelles approches développementales de la pensée logico-mathématique, 83

Le néostructuralisme, 83

Opérateurs métaconstructifs, rationalité et connaissances expérientielles, 84

Morphismes, catégories et appariements de symboles, 96

Le cognitivisme développemental, 101

Logique et représentation, 101

Logique et action : une protologique pragmatique, 103

Un bébé mathématicien ?, 106

Pensée logico-mathématique et derniers ajustements piagétien, 111

Le possible et le nécessaire : genèse fonctionnelle de la nécessité, 112

La logique des significations : intensionnalité et protologique opératoire, 113

Morphismes, catégories et logique opératoire, 116

Questions vives et schèmes du psychologue, 118

SECONDE PARTIE
PENSÉE LOGICO-MATHÉMATIQUE
ET SCIENCES COGNITIVES

Neuroscience cognitive, intelligence artificielle,
sémiologie du langage et philosophie de l'esprit

Chapitre III. Pensée logico-mathématique et modèles neuronaux des fonctions cognitives. L'exemple des capacités numériques,
par Stanislas Dehaene et Jean-Pierre Changeux, 123

Introduction aux modèles neuronaux des fonctions cognitives, 124

Comment le cerveau traite-t-il les nombres ?, 126

Monsieur N.A.U. et la représentation analogique des nombres, 127

Facultés numériques élémentaires chez le jeune enfant et l'animal, 129

Effet de distance et loi de Fechner, 131

Un modèle neuronal du traitement numérique élémentaire, 131

Les détecteurs de numérosités, 133

Conditionnement à la numérosité, 135

Comparaison de deux numérosités, 138

Auto-organisation des capacités numériques élémentaires, 140

Discussion et prédictions, 141

Raisonnement et cortex frontal, 142

Chapitre IV. Pensée logico-mathématique et intelligence artificielle. Paradigmes logico-symbolique et connexionniste,
par Michel De Glas, 147

Le cognitivisme et ses rivaux, 148

Le fonctionnalisme computo-représentationnel, 148

Les approches rivales, 150

Les deux paradigmes de l'intelligence artificielle, 154

Le paradigme logico-symbolique, 154

Le paradigme connexionniste, 155

Une double incompréhension, 157

Vers une logique du sens, 159

La logique classique et son impasse sur l'intensionnalité et l'intentionnalité, 159

La sémantique des mondes possibles, 161

La sémantique de Kripke et la logique intuitionniste de Heyting, 163

La sémantique locologique, 171

Vers une physique du sens, 173

Pour une intégration des paradigmes logico-symbolique et connexionniste, 176

- Chapitre V. Pensée logico-mathématique et sémiologie du langage,**
par Jean-Blaise Grize, 181
- Les activités de modélisation, 182
 - L'usage des langues naturelles, 185
 - Langue et communication*, 185
 - La signification et le sens des mots*, 186
 - Cinq principes : le dialogisme, les représentations, les préconstruits culturels, la situation et la construction d'objets*, 187
 - L'axiomatisation*, 190
 - Les langages logico-mathématiques, 192
 - Irréductibilité et complémentarité, 197
 - La recherche d'opérations logico-discursives, 200
 - Les schématisations*, 200
 - Les opérations d'ancrage*, 201
 - Les opérations d'objet*, 202
 - La polyopération de détermination*, 203
 - La polyopération de prise en charge*, 203
 - Les opérations d'articulation*, 204
- Chapitre VI. Philosophie de la pensée logico-mathématique. Logique, raisonnement et normes de la rationalité**
par Pascal Engel, 205
- La normativité de la logique, 205
 - Psychologisme et antipsychologisme, 206
 - Le problème de la rationalité inférentielle, 209
 - La présomption de rationalité, 211
 - Premier argument (A) : la rationalité a priori des croyances*, 212
 - Deuxième argument (B) : rationalité et évolution*, 214
 - Troisième argument (C) : l'équilibre réflexif*, 215
 - Rationalité logique et relativisme, 216
 - Charité et rationalité, 218
 - Psychologie du raisonnement et rationalité, 223
 - La logique mentale*, 223
 - Les modèles mentaux*, 224
 - Contenus des tâches et schémas pragmatiques*, 225
 - Les biais de raisonnement*, 226
 - Processus subdoxastiques, croyances réfléchies et présomption de rationalité, 226
- Bibliographie**, 229
- Index des noms**, 239

Introduction

Quoi de neuf depuis *Logique et connaissance scientifique* ?

OLIVIER HOUDÉ

Il y a vingt-cinq ans paraissait, sous la direction de Jean Piaget, *Logique et connaissance scientifique*¹. Ce volume de l'*Encyclopédie de la Pléiade*, consacré à la logique, à l'épistémologie des mathématiques, de la physique, de la biologie et des sciences humaines, marque l'apogée de l'épistémologie génétique. De nombreux collaborateurs de l'Ecole genevoise y ont participé et notamment le premier logicien d'entre eux : Jean-Blaise Grize.

A la question « Quoi de neuf depuis *Logique et connaissance scientifique* ? », la plupart d'entre nous répondrait sans hésiter : les sciences cognitives et leur institutionnalisation. Sans doute est-ce vrai, mais en quel sens ? Dans une publication récente du CNRS, intitulée *Les chemins de la science : Regards sur la recherche*, on peut lire que les sciences cognitives ont « [...] un but ambitieux : accéder à la connaissance de la connaissance »². Ce n'est à l'évidence pas là que réside la nouveauté, ou alors il s'agit d'ignorer un siècle (pour le moins) de psychologie de la connaissance. D'autres, ou les mêmes, diront que c'est l'interdisciplinarité qui marque l'originalité du mouvement de recherche cognitive actuel. Que dire alors de l'effervescence qui anima, dès 1955, le *Centre international d'épistémologie génétique* fondé par Piaget et où collaboraient des psychologues, des logiciens, des mathématiciens, des physiciens et des biologistes ? Les célèbres *Etudes d'épistémologie génétique* — et dans leur foulée *Logique et connaissance scientifique* — témoignent avec force de cette interdisciplinarité. Bref, au-delà des slogans erronés, l'innovation introduite (ou susceptible de l'être) par les sciences cognitives des années 1980-1990 reste à définir. En un premier temps, cela impose d'établir, pour diverses problématiques, un échantillonnage interdisciplinaire précis des nouveaux objets d'étude qui se dégagent.

L'objectif de ce livre est de contribuer à un tel échantillonnage dans

1. Piaget, J. (éd.), *Logique et connaissance scientifique*, Paris, Gallimard, 1967.

2. Textes établis à partir des contenus du rapport de conjoncture 1992 du Comité national de la recherche : *Les chemins de la science : Regards sur la recherche*, Editions du CNRS, 1993 (citation, p. 51).

le domaine de la pensée logico-mathématique¹, en retenant six disciplines clés des sciences cognitives : la psychologie, la logique, les neurosciences cognitives, l'intelligence artificielle, la sémiologie du langage et la philosophie de l'esprit. Nous espérons ainsi fournir au lecteur, étudiant ou spécialiste de ces disciplines, quelques éléments de réponse à la question « Quoi de neuf depuis *Logique et connaissance scientifique* ? ». Il ne s'agira pas ici directement d'épistémologie, mais, comme le soulignait Piaget, et la remarque vaut encore, « [...] tous les courants vivants de l'épistémologie contemporaine font aujourd'hui corps avec les sciences elles-mêmes, en ce sens que les transformations si imprévues et souvent si rapides des diverses disciplines ont entraîné des crises et des réorganisations obligeant les savants à examiner les conditions mêmes de leur savoir, donc en fait à construire des épistémologies » (1967, p. X).

La première partie de l'ouvrage, « Pensée logico-mathématique et psychologie », est constituée de deux chapitres de synthèse : l'un consacré à la logique contemporaine, du point de vue de sa complicité avec les mathématiques et de sa diversité ; l'autre relatif à la référence logico-mathématique en psychologie au cours des deux dernières décennies.

Le premier chapitre, « Logique : histoire et diversité » (Denis Miéville), esquisse les grandes lignes de l'histoire récente de la logique pour révéler la forme, l'esprit et la raison d'être des théories dominantes et déviantes. Ainsi que le souligne d'entrée de jeu l'auteur, tout panorama est l'expression d'un point de vue et ne peut dès lors être que partial et partiel. L'objectif de ce chapitre est « simplement » de briser l'image d'une logique unique et unifiée : *La* logique mathématique. Partant de la logique classique issue de la tradition frégréenne et russellienne, différentes logiques non classiques sont analysées, pour conclure par l'exposé d'une théorie logique libre, universelle, d'ordre supérieur et développementale : les systèmes de Lesniewski (protothétique, ontologie et méréologie). Une attention particulière est portée à ces systèmes, relativement méconnus, car tout en partageant les objectifs de la logique classique — cerner le discours du vrai et du faux en liaison avec la question de la référence — ils les dépassent très largement et constituent même la réalisation la plus achevée d'un tel projet.

Le deuxième chapitre, « La référence logico-mathématique en

1. Précisons que l'expression « logico-mathématique », utilisée en titre et tout au long de cet ouvrage, ne désigne pas la seule forme de pensée cristallisée par la *logique mathématique*, mais la *diversité* des formes de pensée logique et mathématique.

psychologie : entre méthode universelle et rationalité arrogante »¹ (Olivier Houdé), traite des rapports du fait psychologique (les hommes *tels* qu'ils pensent) à la norme logico-mathématique (ce qu'ils *devraient* penser) en explorant les diverses perspectives de recherche qui ont marqué la psychologie cognitive au cours des deux dernières décennies. À partir des exemples de la catégorisation et du nombre chez le bébé et l'enfant, du raisonnement déductif et inductif chez l'adulte, ce chapitre propose un examen critique du structuralisme piagétien, du cognitivisme anglo-saxon (et de sa mise en question connexionniste), du néostructuralisme, du cognitivisme développemental et des derniers ajustements piagétiens. L'accent est mis, dans la confrontation de ces perspectives, sur un système cognitif polymorphe et, plus précisément, sur les conditions selon lesquelles un tel système peut être rationnel tout en présentant des processus d'activation/inhibition inefficients qui entravent l'expression de cette rationalité.

Dans la seconde partie de l'ouvrage, « Pensée logico-mathématique et sciences cognitives », nous avons invité divers spécialistes de disciplines connexes en sciences cognitives à exposer leurs recherches et analyses les plus récentes.

Le troisième chapitre, « Pensée logico-mathématique et modèles neuronaux des fonctions cognitives : l'exemple des capacités numériques » (Stanislas Dehaene et Jean-Pierre Changeux), aborde le problème de l'explication neurobiologique des objets mathématiques. Les auteurs soutiennent que cette question est à l'ordre du jour car les représentations neurales des objets mathématiques deviennent accessibles à l'expérimentation, que ce soit par des techniques d'imagerie cérébrale telles que la caméra à positrons, ou en observant les conséquences de lésions cérébrales sur les capacités mathématiques des patients, ou bien encore en étudiant les précurseurs des fonctions numériques chez les animaux et les jeunes enfants. C'est dans cette perspective qu'ils décrivent comment le cerveau représente les plus simples des objets mathématiques : les nombres entiers. Après un exposé des données actuelles sur la représentation des nombres chez l'homme et l'animal, un modèle neuronal du développement des capacités numériques chez l'enfant est présenté. La conclusion du chapitre souligne l'implication du cortex préfrontal dans le fonctionnement de la pensée logico-mathématique et propose un modèle élémentaire du raisonnement logique dans un réseau de neurones.

1. Le mot « référence » ne renvoie pas ici à l'analyse logique et philosophique du concept de référence, mais à l'usage qui est fait des théories logico-mathématiques dans l'explication en psychologie.

Le quatrième chapitre, « Pensée logico-mathématique et intelligence artificielle : paradigmes logico-symbolique et connexionniste » (Michel De Glas), décrit, en relation avec la question de l'intensionnalité et de l'intentionnalité, un renouveau possible de la logique et des mathématiques en intelligence artificielle. Le problème de l'intentionnalité, du rapport au contenu, se pose d'abord en termes sémantiques : il est nécessaire que les symboles soient dotés d'un sens et que le système soit capable d'agir en fonction du sens. Or, comment un système artificiel peut-il agir en fonction du sens des symboles alors qu'il ne possède de relations qu'avec la forme syntaxique de ceux-ci ? La solution suggérée par l'auteur est celle d'une *conquête formelle du sens* qui passe par une intégration théorique des deux paradigmes actuels de l'intelligence artificielle : le logico-symbolisme et le connexionnisme. Il définit : 1 / du point de vue logico-symbolique, une *logique du sens* ou logique intensionnelle : sémantique des mondes possibles, sémantique de Kripke et logique intuitionniste de Heyting, sémantique locologique ; 2 / du point de vue connexionniste, une *physique du sens* de type morphodynamique (auto-organisation des substrats matériels). Des pistes de recherche sont suggérées concernant la façon dont le morphologique — topologiquement et géométriquement formel mais non logiquement formel — peut faire l'objet de manipulations à des niveaux cognitifs supérieurs, descriptibles en termes logiques.

Dans le cinquième chapitre, « Pensée logico-mathématique et sémiologie du langage » (Jean-Blaise Grize), ce sont les activités de modélisation elles-mêmes qui sont analysées et, à travers elles, l'usage des langues naturelles et des langages logico-mathématiques. Les langues naturelles sont caractérisées du point de vue de leurs rapports avec la communication, de la signification et du sens des mots, de leurs principes de fonctionnement (dialogisme, représentation, préconstruits culturels, situation et construction d'objets) et de l'axiomatisation. Elles sont contrastées avec les langages logico-mathématiques qui effacent le sujet énonciateur, substituent un calcul à l'activité de pensée et s'imposent de contrôler chaque pas d'une déduction par des règles explicites. A l'issue d'une comparaison systématique des langues naturelles et des langages logico-mathématiques, dont il ressort l'irréductibilité et la complémentarité, l'auteur présente ses travaux de logique naturelle relatifs aux opérations logico-discursives.

Enfin, le sixième chapitre, « Philosophie de la pensée logico-mathématique : logique, raisonnement et normes de la rationalité » (Pascal Engel), aborde le problème de la *normativité* dans le cadre de la philosophie de l'esprit. Les divers arguments actuellement en présence font

l'objet d'un examen critique et d'une confrontation. Il y a, d'une part, les arguments en faveur d'une *présomption de rationalité* selon laquelle les humains doivent être crédités d'une rationalité de principe que les erreurs de raisonnement qu'ils commettent ne menacent pas : la rationalité *a priori* des croyances, l'évolution par sélection naturelle et l'équilibre réflexif. Il y a, d'autre part, le refus de ces arguments au nom d'une position relativiste qui dénonce l'idéalisation de la rationalité humaine. L'auteur soutient que la présomption de rationalité attribuable à tout sujet capable d'avoir des croyances est fondamentalement correcte. Il montre également que l'inadéquation prétendue de cette présomption aux processus de raisonnement logique, en raison de leur caractère subdoxastique¹, repose sur une analyse partiellement justifiée et de portée limitée. Ce dernier point est explicité en référence aux architectures cognitives décrites dans les modèles psychologiques : activation de règles inconscientes, automatiques et modulaires *versus* mobilisation de croyances conscientes et réfléchies (processus analytiques, évaluations sémantiques, etc.). La complicité, longtemps interrompue, entre philosophie et psychologie est ici renouée.

Nous avons choisi de ne pas conclure cet ouvrage, non pour nous soustraire à un exercice difficile, mais parce que, compte tenu de l'état de l'art, une synthèse nous paraît à ce jour prématurée (elle le sera peut-être moins lors d'une prochaine édition). Il ne faudrait cependant pas que soient ainsi occultés les nombreux points de rencontre interdisciplinaire qui apparaissent déjà. Les renvois indiqués par chacun des auteurs aux divers chapitres en témoignent. Voici également quelques « clés de lecture ».

Le chapitre I brise l'image d'une pensée logico-mathématique unique et unifiée issue de la tradition frégréenne et russellienne. L'éclatement et la diversité qui en ressortent apparaissent nettement dans les travaux de psychologie (chapitre II), d'intelligence artificielle (chapitre IV) et de sémiologie du langage (chapitre V) où de multiples « outils » logico-mathématiques sont actuellement utilisés pour cerner au plus près les processus humains de raisonnement, la logique et la physique du sens dans les systèmes artificiels et la nature effective des opérations logico-discursives. On peut également en déceler l'incidence en philosophie de l'esprit (chapitre VI) au niveau des discussions suscitées par le choix de systèmes normatifs arbitraires qui ne sont pas en *équilibre réflexif* avec les intuitions des agents cognitifs.

1. La *subdoxasticité* caractérise tous les états représentationnels de la cognition situés à un niveau « inconscient » et sous-tendant les états conscients d'attitudes propositionnelles.

Le chapitre III souligne l'implication du cortex préfrontal dans le développement et le fonctionnement de la pensée logico-mathématique. C'est aussi (sans que l'accent soit mis sur l'aspect neuronal) le cortex préfrontal qui sous-tend les processus d'activation/inhibition décrits au chapitre II pour définir une architecture cognitive susceptible d'expliquer les données récentes de la psychologie du raisonnement. En outre, ces processus, en ce qu'ils permettent de préciser les conditions dans lesquelles un sujet peut être rationnel tout en présentant des erreurs de raisonnement, suggèrent une articulation avec la thèse de présomption de rationalité soutenue en philosophie de l'esprit (chapitre VI).

Le débat que cette dernière discipline consacre à la subdoxasticité des processus rationnels invite par ailleurs à un rapprochement plus précis avec les différents modèles psychologiques analysés dans le chapitre II, notamment au niveau de l'infrastructure « silencieuse » de la rationalité et des relations fonctionnelles — lors de la résolution d'un même problème — entre processus automatiques pré-attentionnels et processus attentionnels contrôlés.

Soulignons, enfin, qu'un concept fédérateur se dégage des diverses contributions : celui de *développement*. L'accent est mis dans le chapitre I sur l'intérêt d'une logique ouverte et développementale préservant la liberté définitoire. Les chapitres II et III accordent une large place au développement psychologique et neurobiologique du bébé et de l'enfant, ainsi qu'aux données phylogénétiques. Dans l'articulation qu'il suggère entre les paradigmes logico-symbolique et connexionniste, le chapitre IV introduit en conclusion le point de vue du développement. Celui-ci apparaît également dans le chapitre V lorsque est refusée l'attitude qui consiste à effacer le sujet énonciateur au profit d'une activité de modélisation épurée de son processus constructif.

Autant de « clés » — le lecteur en découvrira d'autres — qui incitent à établir des rapprochements entre les différents chapitres de ce livre. On peut toutefois se méfier (et il le faut) des rapprochements multiples et de l'irrépressible tendance au syncrétisme qui s'y associe parfois. « [...] Réunir tous les Crétois, ce n'est déjà pas si mal, mais s'il est vrai — comme on disait jadis — que tous les Crétois sont un peu menteurs... » (Gréco, 1988, p. 13). Le parti pris ici est de considérer ce risque acceptable au regard des instants privilégiés — les sciences cognitives en seront-elles un ? — où les forces se combinent pour donner naissance à de rares phénomènes. L'un des objectifs de la collection « Psychologie et sciences de la pensée » est de susciter cette combinaison des forces ou, pour le moins, de s'en faire l'écho.

Logique Histoire et diversité

PREMIÈRE PARTIE

Pensée logico-mathématique et psychologie

abandon au profit de la logique moderne. Ce type de logique est caractérisé par deux niveaux de diversité : d'une part, celui lié aux problèmes que la logique traite et, d'autre part, celui induit par les méthodes et les significations primitives utilisées. Quant à la seconde réalité, elle recouvre un phénomène épistémologique important : « [...] La logique a non seulement accompli sa transition de la condition de branche de la philosophie à celle de forme pleinement établie d'une science articulée, mais elle a également donné naissance à l'usage de plusieurs sciences dites "pures" à de nombreuses applications » (Agazzi, 1961, p. vii ; trad. de l'auteur).

Dans ces pages qui suivent, je me propose d'examiner les grandes lignes de l'histoire récente de la logique pour révéler tout à la fois la forme et l'esprit des divers dogmatismes et idéologies, ainsi que leur vision d'être. Tout partant en l'expression d'un point de vue, il ne peut être que partiel et partial. J'invite donc le lecteur à aborder ces pages avec un esprit critique.

LOGIQUE ET MATHÉMATIQUE L'HISTOIRE D'UNE COMPLÉTÉ

L'ÉMERGENCE D'UN CALQUE LOGIQUE

Peu plus de deux mille ans, la logique est restée exclusivement liée au discours. Que l'on pense à Aristote et à ses syllogismes, que l'on pense à l'enseignement de la logique dans les écoles médiévales : il s'agissait alors, comme l'a écrit Kantakirieli, d'un programme de spiritualité vertueuse. Puis la logique a trouvé son statut scientifique avec Leibniz

REVUE DE LA

Pensée logico-mathématique
et psychologie

CHAPITRE I

Logique Histoire et diversité

DENIS MIÉVILLE

Au XX^e siècle, la logique a connu un développement considérable. En accédant au statut de théorie formelle, elle a été baptisée du nom de logique moderne. Ce baptême recouvre une double réalité. La première relève de deux niveaux de diversité : d'une part, celui lié aux problèmes que la logique traite et, d'autre part, celui induit par les méthodes et les significations primitives utilisées. Quant à la seconde réalité, elle recouvre un glissement épistémologique important : « [...] La logique a non seulement accompli sa transition de la condition de branche de la philosophie à celle de forme pleinement établie d'une science articulée, mais elle a également donné naissance (à l'image de plusieurs sciences dites "pures") à de nombreuses applications » (Agazzi, 1981, p. VII ; trad. de l'auteur).

Dans les pages qui suivent, je me propose d'esquisser les grandes lignes de l'histoire récente de la logique pour révéler tout à la fois la forme et l'esprit des théories dominantes et déviantes, ainsi que leur raison d'être. Tout panorama est l'expression d'un point de vue, il ne peut être que partiel et partiel. J'invite donc le lecteur à aborder ces pages avec un esprit critique.

LOGIQUE ET MATHÉMATIQUE : L'HISTOIRE D'UNE COMPLICITÉ

L'ÉMERGENCE D'UN CALCUL LOGIQUE

Pendant plus de deux mille ans, la logique est restée intimement liée au discours. Que l'on pense à Aristote et à ses syllogismes, que l'on songe à l'enseignement de la logique dans les écoles médiévales : il s'agissait alors, comme l'a écrit Kotarbinski, d'un programme de spéculation verbale. Puis la logique a trouvé son identité formelle avec Leibniz

[1646-1716], mais surtout avec Frege [1848-1925]. C'est l'émergence de la logique mathématique. On attribue même une année de naissance à cette logique : 1879, date de la parution de l'ouvrage de Frege, la *Begriffsschrift*. Le projet de Frege est double. Mathématicien, il veut tout d'abord expliciter ce qui, dans le discours des démonstrations mathématiques, est exprimé dans une langue naturelle et règle les preuves. Il s'agit donc d'aller en deçà des structures mathématiques et d'extraire la substance logique même qui gère le raisonnement mathématique. Il réalise son projet en construisant un système hypothético-déductif pour la logique, système qui donne accès aux fondements des raisonnements de la démonstration mathématique. La langue artificielle construite par Frege pour le déroulement des preuves n'est pas seulement un calcul, mais également une idéographie qui a le mérite d'exprimer clairement des notions dont la langue naturelle rend compte de manière confuse et intuitive. Ce système est conçu de telle manière qu'il ne laisse aucune part à l'évidence, tout développement rationnel est contrôlé sur la base de ce qui a été préalablement et explicitement posé. Dans son ouvrage, les *Grundgesetze der Arithmetik* (1893), Frege expose cet idéal :

« [...] J'aimerais présenter comme suit l'idéal d'une méthode strictement scientifique en mathématique, idéal que j'ai tenté de réaliser ici et que l'on pourrait considérer comme non euclidien. On ne peut, à vrai dire, exiger de tout démontrer, car cela est impossible ; mais on peut revendiquer que toutes les propositions que l'on utilise sans démonstration soient présentées explicitement comme telles, afin de connaître clairement sur quoi repose toute la construction. Il faut tendre à réduire le plus possible le nombre de ces règles fondamentales en démontrant ce qui est démontrable. De plus — et en cela je vais plus loin qu'Euclide — j'exige que toutes les sortes de conclusions et de déductions utilisées soient énumérées préalablement. Si l'on ne respecte pas ces exigences, on ne saurait accéder à cet idéal. En substance, je crois l'avoir atteint maintenant » (*Grundgesetze der Arithmetik*, Hildesheim, Olms, 1893, 2^e éd. 1962, p. vi ; trad. de l'auteur).

Sur les modèles des systèmes hypothético-déductifs de la géométrie, Frege construit ainsi un système pour la logique, système qui possède ses propres caractéristiques et qui permet de fonder les raisonnements de la démonstration mathématique. Par ailleurs, et c'est le second volet de son projet, Frege est persuadé que la logique est le fondement même de l'arithmétique, que les propositions arithmétiques peuvent être réduites à celles de la logique, que l'arithmétique, donc, est dépendante de la logique.

La contribution de Frege est caractéristique d'un esprit fécond qui a su offrir les assises d'une science nouvelle, libérant la logique de la

tutelle des discours tenus dans une langue naturelle, réalisant ainsi une partie du pari de Leibniz. De plus, Frege a su échapper à l'omniprésence du modèle mathématique pour mieux en saisir les fondements : « [...] La théorie de la logique s'est ouverte à une époque prestigieuse lorsque, en 1879, la *Begriffsschrift* de Frege a été publiée. Cet ouvrage a libéré la logique d'une complicité artificielle qu'elle partageait avec les mathématiques, tout en préparant une interrelation plus profonde entre ces deux sciences » (van Heijenoort, 1977, p. vi ; trad. de l'auteur).

Frege possède un lecteur attentif de ses œuvres, lecteur qui adhère à son projet : il s'agit de Russell [1872-1970]. En 1902, ce dernier lui fait part de son admiration, mais lui communique également que son système est contradictoire¹. Cette découverte ébranle fortement l'édifice mathématique. En effet, la contradiction semble régner dans les bases mêmes de cette science.

L'antinomie révélée par Russell oblige les mathématiciens et les logiciens à prendre conscience de la fragilité des règles de raisonnement, ou plutôt de la manière d'analyser les objets théoriques et, davantage encore, que l'arithmétique, la « reine des sciences », repose sur des fondements peu sûrs. Le problème de la non-contradiction se pose alors avec une grande acuité. En effet, il s'agit de s'assurer, avant de développer une théorie mathématique, que ses principes fondateurs sont exempts de toute contradiction et que les règles de déduction ne peuvent en produire.

Les réflexions que nourrissent les problèmes du fondement des mathématiques, de la non-contradiction, de l'émergence de systèmes logiques formalisés, vont déterminer à l'aube de ce siècle des orientations qui marqueront profondément toute la logique contemporaine. Cette effervescence aura de nombreuses conséquences. J'en évoquerai plusieurs épistémologiquement importantes : la sédimentation d'une manière de penser la logique, l'émergence de la théorie des systèmes formels, ainsi que l'ouverture sur plusieurs familles de logiques dites « déviantes ».

1. Un système contradictoire est un système dans lequel une proposition et sa négation sont toutes deux des théorèmes.

LES LOGIQUES ISSUES DE LA TRADITION RUSSELLIENNE
ET LES THÉORIES CLASSIQUES DES ENSEMBLES

Russell a largement contribué à dessiner l'image de la logique de la première moitié du xx^e siècle. Les *Principia Mathematica* (1910-1913), ouvrage qu'il rédige en collaboration avec Whitehead [1861-1947], vont profondément marquer l'histoire de la logique contemporaine. Les *Principia* tentent d'offrir une réponse, voire une résolution, à différents problèmes. Il y a d'abord le projet de montrer que les mathématiques sont une expansion de la logique, projet qui prolonge celui de Frege : le logicisme¹. Il y a également la volonté d'exposer un système qui est exempt de toute contradiction, ou en tous les cas qui évite les contradictions mises alors en évidence. Je pense tout particulièrement au paradoxe de Cantor [1845-1918] et à celui que Russell décèle dans les *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege. Il y a enfin l'expression d'une synthèse de nombreux travaux antérieurs, ceux de Boole [1815-1854], Dedekind [1831-1916], De Morgan [1806-1871], travaux qui se voient enfin organisés en un tout. Les conséquences liées à l'existence de cette œuvre sont nombreuses. J'en évoquerai quatre.

1 / Les *Principia Mathematica* ont imposé le choix d'un langage, d'un style et surtout d'un point de vue. Une certaine unité dans le courant scientifique d'alors s'est cristallisée autour de cette œuvre, offrant peu d'espace à d'autres approches. On y considère la logique comme une théorie axiomatique fermée qui, dans sa présentation et de manière potentielle, contient tout ce qu'elle peut offrir. De ce fait, aucune expansion n'est possible sans une révision en profondeur de ses significations primitives. L'hégémonie de ce choix conceptuel a occulté l'intérêt pour des logiques de conceptions différentes. L'exemple des théories de MacColl et de Lesniewski est éclairant à cet égard, et nous aurons l'occasion d'y revenir.

2 / La logique classique qui se dessine alors n'est pas aussi neutre qu'on le souhaiterait. La logique des propositions contient seize opérateurs binaires et quatre unaires. Pourquoi ceux-là et que ceux-là ? Quant à la logique des prédicats, elle contient des symboles de propriétés et de relations. Ces symboles ont ceci de particulier qu'ils n'ont pour arguments que des symboles variables et constants d'individus. Pour quelles raisons s'est-on intéressé uniquement à ces catégories ? La réponse

1. Programme associé à la problématique des fondements des mathématiques, le logicisme vise à définir les concepts mathématiques en termes de concepts logiques.

à cette question est complexe et relève d'une étude de l'histoire de la pensée et, plus particulièrement, de la complicité que la logique entretient avec les mathématiques. Comme l'écrit Gardies (1975) : « [...] cet asservissement initial de la logique aux mathématiques classiques a conduit la première à concentrer son analyse sur les relations auxquelles les mathématiques faisaient appel, c'est-à-dire d'abord sur les relations binaires et, plus exactement, sur un type précis de relations binaires, à savoir celles qui admettent comme arguments deux individus » (p. 275). J'ajouterai que la sélection de l'ensemble des opérateurs et le choix de certains principes qui règlent ces systèmes relèvent de la même complicité. Frege était d'ailleurs conscient que la logique en tant que saisie des formes que revêt la pensée avait une signification qui débordait le cadre mathématique. Toutefois, le souci d'assumer les fondements des mathématiques a été plus fort que l'appel logique. Et parfois l'on oublie que cette logique-là est la logique mathématique, qu'elle n'est donc qu'un fragment de la logique. Ce qui précède n'explique rien, mais met en évidence l'influence que les mathématiques classiques ont eue sur la logique lorsqu'elle avait des visées logicistes.

3 / La référence russellienne aux mathématiques et à la théorie des ensembles a également contribué à marquer toute une manière d'appréhender la notion de classe, une notion qui, en se conceptualisant progressivement, perd toute relation avec la perception naïve qu'on peut en avoir. Cette rupture avec une certaine réalité classificatoire n'est attribuée à la définition de classe qu'un rôle désincarné, celui d'un symbole incomplet.

« [...] Dans notre système, les symboles pour les classes, de même que ceux pour les descriptions, sont des symboles incomplets : leurs "usages" sont définis, mais en eux-mêmes, ils ne sont pas supposés signifier quelque chose. Il en découle que l'usage de tels symboles est ainsi défini que, lorsque le *definiens* est substitué au *definiendum*, il ne demeure plus aucun symbole dont on pourrait supposer qu'il représente une classe. Ainsi les classes, de la manière dont nous les avons introduites, sont simplement des commodités symboliques ou linguistiques, et non pas des objets authentiques comme leurs objets le sont s'ils sont des individus » (Whitehead et Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge, Cambridge University Press, 1910, vol. I, p. 75 ; trad. de l'auteur).

4 / Enfin, et ceci est en relation avec la nature conceptuelle de ces théories axiomatiques, le rôle attribué à la définition¹ est bien particu-

1. La définition est la mise en relation d'équivalence entre un *definiens* (ce qui permet de définir) et un *definiendum* (ce qui est défini).

lier. Il est en effet surprenant de constater que dans les systèmes classiques la définition n'est, théoriquement parlant, rien d'autre qu'une abréviation, qu'elle ne joue aucun rôle dans le raisonnement, qu'elle n'est présente que pour des raisons de convenance pratique, de commodité linguistique. S'il y a surprise, c'est que dans la pratique, dans le développement cognitif d'un sujet, la définition relève d'une démarche particulièrement complexe, et dont la finalité est, entre autres choses, de modifier une connaissance, de donner accès à une connaissance nouvelle. Cette surprise, Russell l'exprimait déjà il y a quelque quatre-vingts ans, tout en se contentant de cette pratique abrégative.

« [...] Il s'agit d'un curieux paradoxe, embarrassant pour l'esprit symbolique, de considérer les définitions, au niveau théorique tout au moins, comme l'expression d'abréviations symboliques uniquement, sans conséquence pour le raisonnement et proposées uniquement pour des raisons de commodité pratique. Cela est d'autant plus surprenant que, dans le développement d'un sujet, les définitions mettent en œuvre une activité considérable de la pensée et le plus souvent incarnent quelques-unes des plus grandes réussites de la pensée » (Russell, *The Principles of Mathematics*, London, Allen & Unwin, 1956, p. 63 ; 1^{re} éd., 1903 ; trad. de l'auteur).

Aujourd'hui encore, l'influence de ces choix, de ces premiers développements, se fait largement sentir dans la présentation de la logique et, par conséquent, dans ce qu'elle donne à penser d'elle-même. Mais reste à savoir « [...] si des programmes qui finalement relèvent de la logique [classique] des prédicats [...] suffisent à eux seuls à rendre compte de la pensée » (Grize, 1991, p. 10). Certes non ! Formulons cette interrogation d'une autre manière : une réflexion qui vise au développement d'une théorie logique avec la volonté de dépasser la manière classique de parler des valeurs de vérité et de la référence est-elle pertinente ? La réponse est sans équivoque. Elle est affirmative et nous l'étayerons.

L'ÉMERGENCE DE LA THÉORIE DES SYSTÈMES FORMELS

La contradiction qui semblait régner dans les fondements mêmes des mathématiques a troublé plus d'un mathématicien. Hilbert [1862-1943] en fut probablement le plus éminent. Il aborde le problème de la non-contradiction d'une théorie de manière très originale. La solution proposée est la marque d'un esprit subtil et cultivé. Hilbert tire une grande leçon de l'histoire des sciences, celle qui met en évidence la faiblesse, la

non-certitude de nos sens, de nos jugements lorsqu'ils tentent de cerner un contenu conceptuel en un processus rationnel. Il est persuadé que les mathématiques doivent être libres de tout préjugé et que, pour cela, il faut en aborder les fondements d'une manière uniquement formelle.

Hilbert s'engage dans une réflexion sur la théorie de la démonstration¹ en privilégiant la dimension syntaxique, théorie dans laquelle il n'est pas question de considérer une organisation mathématique en tant que chargée de sens. Il a également formulé la distinction précise entre le langage utilisé pour une théorie mathématique et celui qui sert à en parler. Il sépare ainsi nettement mathématique et métamathématique. La théorie de la démonstration se présente comme un système axiomatique qui s'organise sur la base de matériaux symboliques et qui contient des règles formelles de formation et de transformation, règles purement opératoires. Une telle structure doit être contrôlable. Il faut donc exiger des conditions d'effectivité et n'admettre que des procédures finitaires. Dans cette perspective, le problème de la non-contradiction se pose en d'autres termes. Il s'agit de démontrer qu'en appliquant les règles formelles aux propositions de base, il est impossible d'obtenir à la fois une formule du système et sa négation. On veut davantage encore. Si l'on admet que les mathématiques contiennent tous les modes de raisonnement rationnel, elle contient donc ceux qui s'appliquent à la métamathématique. La métamathématique posséderait dès lors, de manière réfléchissante, les moyens de montrer sa propre non-contradiction. Ce rêve s'éteint lorsque Gödel [1906-1978] démontre en 1931 l'impossibilité de prouver la non-contradiction de toute théorie contenant l'arithmétique si les démonstrations utilisées consistent en ces procédés finis, voulus par Hilbert. Dans cette perspective, les mathématiques sont essentiellement incomplètes et, davantage encore, elles ne sauraient être complétées : la méthode axiomatique possède certaines limites internes qui excluent la possibilité d'axiomatiser dans sa totalité l'arithmétique, et donc les mathématiques classiques. Il n'y a pas de système axiomatique de type hilbertien capable d'envisager la totalité des problèmes de la pensée mathématique, ainsi que la possibilité d'en proposer toutes les réponses.

Mais les théorèmes critiques de Gödel ne marquent cependant pas le simple crépuscule d'un temps et d'une manière de vivre la pensée logico-mathématique. Les résultats de Gödel constituent l'un des thèmes cen-

1. La théorie de la démonstration (ou de la preuve) est l'étude des systèmes axiomatiques s'organisant sur la base de matériaux symboliques et contenant des règles formelles de formation et de transformation, règles purement opératoires. Elle s'oppose à la théorie des modèles qui privilégie l'aspect sémantique.

Il y a vingt-cinq ans paraissait, sous la direction de Jean Piaget, *Logique et connaissance scientifique*. Quoi de neuf depuis ce volume de *l'Encyclopédie de la Pléiade* qui a marqué l'apogée de l'épistémologie génétique? Olivier Houdé et Denis Miéville réunissent ici un ensemble cohérent de contributions dont l'objectif est de cerner le renouveau survenu au cours des années 1970-1990 dans l'étude de la pensée logico-mathématique. Ces contributions reflètent la multiplicité des approches actuelles du problème en sciences cognitives : logique (Denis Miéville), psychologie (Olivier Houdé), neurosciences cognitives (Stanislas Dehaene et Jean-Pierre Changeux), intelligence artificielle (Michel De Glas), sémiologie du langage (Jean-Blaise Grize) et philosophie de l'esprit (Pascal Engel). Autant de cadres d'analyse différents conjugués dans ce livre pour apporter aux étudiants de 2^e et 3^e cycles de psychologie et disciplines connexes, aux chercheurs et aux éducateurs, des éléments de réponse nouveaux aux interrogations classiques sur les rapports entre le fonctionnement cognitif et ses normes. Comment la pensée logico-mathématique nous vient-elle à l'esprit? Par quels processus se construit-elle au cours du développement? Quels sont ses conquêtes et ses aléas?

Olivier Houdé enseigne la psychologie aux Universités de Paris V - Sorbonne et de Genève. Il mène ses recherches au Laboratoire de psychologie du développement et de l'éducation de l'enfant (LAPSYDEE) associé au CNRS.

Denis Miéville enseigne la logique à l'Université de Neuchâtel où il dirige le Centre de recherches sémiologiques (cdrs).



Participant d'une démarche de transmission de fictions ou de savoirs rendus difficiles d'accès par le temps, cette édition numérique redonne vie à une œuvre existant jusqu'alors uniquement sur un support imprimé, conformément à la loi n° 2012-287 du 1^{er} mars 2012 relative à l'exploitation des Livres Indisponibles du XX^e siècle.

Cette édition numérique a été réalisée à partir d'un support physique parfois ancien conservé au sein des collections de la Bibliothèque nationale de France, notamment au titre du dépôt légal. Elle peut donc reproduire, au-delà du texte lui-même, des éléments propres à l'exemplaire qui a servi à la numérisation.

Cette édition numérique a été fabriquée par la société FeniXX au format PDF.

La couverture reproduit celle du livre original conservé au sein des collections de la Bibliothèque nationale de France, notamment au titre du dépôt légal.

*

La société FeniXX diffuse cette édition numérique en accord avec l'éditeur du livre original, qui dispose d'une licence exclusive confiée par la Sofia – Société Française des Intérêts des Auteurs de l'Écrit – dans le cadre de la loi n° 2012-287 du 1^{er} mars 2012.

Avec le soutien du

