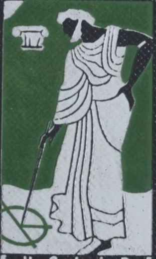
ALBERT CHATELET

ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE MODERNES

I

COLLECTION



EUCLIDE

PRESSES UNIVERSITAIRES
DE FRANCE

N, C

ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE
MODERNES

★

« EUCLIDE »

INTRODUCTION AUX ÉTUDES SCIENTIFIQUES

Collection fondée par

CHARLES MAURAIN et MAURICE CAULLERY

Membres de l'Institut

●

PREMIÈRE SECTION :

Mathématiques et Astronomie mathématique

dirigée par Daniel DUGUÉ

Professeur à la Sorbonne

Directeur de l'Institut de Statistique

DEUXIÈME SECTION :

Physique du Globe, Astronomie physique et Sciences de la Terre

dirigée par Charles MAURAIN

Membre de l'Institut

TROISIÈME SECTION :

Physique

dirigée par (†) Gustave RIBAUD

Membre de l'Institut

QUATRIÈME SECTION :

Chimie

dirigée par (†) Louis HACKSPILL

Membre de l'Institut

CINQUIÈME SECTION :

Biologie animale

dirigée par X

SIXIÈME SECTION :

Biologie végétale et Agronomie

dirigée par Roger BLAIS

Directeur de l'Institut National Agronomique

« EUCLIDE »
INTRODUCTION AUX ÉTUDES SCIENTIFIQUES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIE MATHÉMATIQUE
SECTION DIRIGÉE PAR DANIEL DUGUÉ

ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE MODERNES

par

Albert CHATELET
Doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Paris

TOME PREMIER

NOTIONS FONDAMENTALES — GROUPES

DEUXIÈME ÉDITION

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS
1966

ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE MODERNES

par Albert CHATELET

Tome Premier
Notions fondamentales - Groupes

Tome II
Anneaux et corps - Idéaux et divisibilité

Tome III
Idéaux dans un domaine d'intégrité
Algèbre et arithmétique linéaires

DÉPOT LÉGAL

1re édition .. .. .. 1er trimestre 1954
2e — .. .. .. 2e — 1966

PRÉFACE

Allocution de M. Marc ZAMANSKY

Doyen de la Faculté des Sciences de Paris

prononcée le 6 juin 1963

à l'occasion de l'inauguration du Centre Albert-Chatelet

L'œuvre scientifique d'Albert Chatelet s'inscrit sous la grande rubrique : algèbre et théorie des nombres.

Le sujet de sa thèse se rattache au problème de la meilleure approximation de deux nombres donnés par des fractions de même dénominateur, dont le grand Hermite disait que depuis cinquante ans ce problème ne cessait de le préoccuper et de le désespérer. A. Chatelet met en évidence une structure périodique des approximations simultanées de deux irrationnelles d'un même corps cubique. Il généralise ainsi une propriété des nombres algébriques du second degré qu'on n'avait pas jusqu'alors réussi à étendre. La méthode de Chatelet s'étend à des irrationnelles réelles d'un même corps algébrique. Cette méthode use de tableaux qu'on appelle aujourd'hui matrices et la thèse de Chatelet a contribué à répandre leur emploi.

Par la suite Chatelet étudie naturellement les relations entre calcul matriciel et calcul des nombres algébriques, ce qui lui permet de mettre en évidence un aspect nouveau de la théorie des idéaux dans les nombres algébriques. L'aspect géométrique de la théorie des nombres algébriques dû à Minkowski est alors associé à l'emploi des matrices. Chatelet caractérise alors les groupes abéliens finis, étudie les équations algébriques dont le groupe de Galois est abélien. Un travail sur les corps quadratiques vient d'être édité par son fils

François Chatelet. Il faut encore signaler ses travaux sur les suites de composition de Jordan-Holder où il emploie la théorie des treillis à peine connue à l'époque.

Son activité de savant ne peut être dissociée de l'intérêt actif qu'il a toujours porté à l'enseignement et à la diffusion des mathématiques. On lui doit la publication du cinquième tome des œuvres de Henri Poincaré. Son traité d'algèbre, son cours sur le calcul vectoriel qui préparent l'avènement de l'algèbre linéaire dans l'enseignement attestent de la manière brillante avec laquelle A. Chatelet donnait une vie aux mathématiques, même celles que le grand public considère comme les plus abstraites. Ses talents de professeur passionné des questions d'enseignement le font désigner à la présidence de la commission interministérielle chargée d'étudier les programmes des enseignements de 1er cycle des Facultés et des concours d'entrée aux grandes écoles scientifiques. On lui doit ce rapprochement, une meilleure connaissance de ces deux types d'enseignements voisins, une modernisation des programmes des concours d'entrée et la démonstration du rôle de pilote que joue l'Enseignement Supérieur.

Albert CHATELET, Doyen

En février 1949 Albert Chatelet succède à Jean Cabannes au poste de Doyen de la Faculté des Sciences de Paris. Il occupera ce poste jusqu'en 1954. Il met au service de la Faculté et de l'Université son dévouement, sa compétence, sa combativité. La présence d'une épouse admirable, l'entourage de ses neuf fils et filles constituèrent certainement le climat qui lui permit ce grand décanat et dans notre gratitude à l'égard d'Albert Chatelet nous mêlons intimement sa famille.

Le poste de Doyen devint davantage avec Albert Chatelet un poste de combat créateur. Il l'occupa avec beaucoup de fermeté à laquelle il alliait un sourire malicieux, le sourire d'un homme solide à la magnifique carrure, parfaitement équilibré, aussi à l'aise dans la guerre de mouvement que dans la diplomatie.

Quelques chiffres montrent ce que la Faculté des Sciences de Paris devint sous son décanat.

Le budget passe de 1 730 000 F à 8 800 000 F.

Le nombre d'étudiants atteint 10 600 en 1953 (il était de 390 en 1890, 4 500 en 1940). Au cours de la période quinquennale de 1949-1953, 850 thèses et diplômes de toutes catégories sont soutenus au lieu de 527 dans la période précédente (et 10 en 1815-1820).

En 1954 la Faculté comprend 80 professeurs.

Pour un Doyen les problèmes sont des problèmes élémentaires et chacun sait que ce sont les plus difficiles à résoudre : hommes, crédits, bâtiments.

On doit à Chatelet d'avoir démontré combien ces trois aspects sont inséparables. Il a soulevé des montagnes, et emporté l'adhésion de la Direction de l'Enseignement Supérieur à une politique d'expansion.

Il construit partout où il peut. Il occupe un sous-sol, surélève l'Institut Henri-Poincaré d'un étage, transforme le laboratoire de Chimie biologique, agrandit le laboratoire d'évolution des êtres organisés, affecte à la physique de l'atmosphère la station du Val-Joyeux. On lui doit la première emprise sur la Halle aux Vins, devenue enfin domaine de la Faculté. On lui doit l'implantation de grands services dans le très beau cadre d'Orsay où désormais vit et prospère un ensemble dont l'importance ne fait que croître.

Mais on lui doit aussi la station d'écologie des Eyzies, l'aide apportée au laboratoire de Roscoff, les projets de transformation et d'agrandissement de la grande station de Banyuls, dotée grâce à lui d'un navire de recherches océanographiques, le rattachement à la Faculté du laboratoire zoologique de Villefranche-sur-Mer. Albert Chatelet avait vu l'importance pour la Faculté de posséder des laboratoire extérieurs spécialisés ; la vocation d'une Faculté des Sciences est de s'intéresser à tout, partout ; le doyen Chatelet a donné à la Faculté les moyens de cette vocation.

On doit aussi à Albert Chatelet l'apparition de cours libres préfigurant le 3e cycle actuel. Il s'agit, si l'on peut dire, du produit *direct des laboratoires de recherches, de la mise à jour permanente des connaissances avec la collaboration de savants étrangers que sous son décanat on voit de plus en plus nombreux à la Faculté.*

Organisation de cours nouveaux, modification de programmes, nouvelles méthodes administratives par déconcentration, partout il a laissé sa marque.

Tâches apparemment humbles ; ce furent les tâches du Doyen. Albert Chatelet portait son attention à tous les aspects car aucun n'est mineur. Il savait qu'une modification de détail peut avoir quelques années plus tard des conséquences considérables.

Cela lui fut possible parce qu'il avait une vision de la vie de l'Université à laquelle tout devait être rapporté.

C'est probablement ici que nous devons chercher l'explication de son œuvre, de son rayonnement. J'en parle avec émotion car j'ai eu la joie de connaître Albert Chatelet. Permettez-moi de réserver quelques instants à l'intimité. Des conversations que j'avais parfois avec lui dans son bureau de la Faculté, à son domicile, devant l'Institut Henri-Poincaré, au lycée Montaigne où il présidait la commission qui portait son nom, j'ai gardé le souvenir d'une vie de l'Université dont il paraissait le dépositaire. Sa stature lui permettait de porter sans peiner le poids de plusieurs siècles d'histoire à travers lesquels lui apparaissaient l'unité et l'universalité de l'esprit ; à travers lesquels aussi il portait témoignage du caractère essentiel de l'Université qui ne crée chaque jour que pour la génération suivante, qui est chaque jour l'enfant émerveillé d'une nouveauté et chaque jour l'homme du lendemain riche du passé créateur des hommes. Albert Chatelet a vaincu la règle par la vie, la raison administrative par la passion de la jeunesse. Il fut un Doyen de vie et de foi.

> « Ce sont ces diverses routes qui ouvrent les conséquences nouvelles et qui par des énonciations assorties au sujet lient des propositions qui semblaient n'avoir aucun rapport dans les termes où elles étaient considérées d'abord... »
>
> B. Pascal,
> *Traité du triangle arithmétique.*

INTRODUCTION

Le développement de l'Algèbre et de l'Arithmétique a été considérable pendant ce premier demi-siècle ; il n'a fait d'ailleurs que continuer les profondes recherches et les remarquables découvertes du siècle précédent ; d'une part en les élargissant, d'autre part en les rapprochant les unes des autres.

En plus de multiples mémoires originaux, dont font foi d'abondantes bibliographies, de nombreux traités méthodiques ont paru ces dernières années. On trouvera, au chapitre II (§ 1) une longue liste d'ouvrages sur la théorie des Groupes et, dans le cours du livre, des indications de publications sur des théories particulières (lattices ou treillis ; structures ; anneaux ; algèbres ; systèmes de nombres hypercomplexes ; idéaux ; matrices ; théorie de Galois ; nombres algébriques ; théorie des nombres ; ...).

La *Moderne Algebra* de B. L. van der Waerden (1930-31) qui embrasse presque tous les aspects de l'Algèbre moderne a connu un grand succès : la 3e édition est en cours de publication et une traduction en langue anglaise a paru en 1949 (par F. Blum et T. J. Benac, d'après la 2e édition allemande). Il convient d'en rapprocher la *Höhere Algebra* de H. Hasse (1933-37) et la *Modern Higher Algebra* de A. A. Albert (1936). Il est également intéressant de signaler la parution récente de livres de caractère relativement élémentaire : *An Introduction to Abstract Algebra* de Mac Duffee (1940) ; *Introduction to Algebraic Theories* de A. Albert (1941) ; *A Survey of Modern Algebra* de G. Birkhoff et de S. Mac Lane (1941) ; *Rings and Ideals* de H. McCoy (1948) ; *Higher Algebra* for the Undergraduate de M. J. Weiss (1948) ; *Lectures in Abstract Algebra* ; Vol. 1, Basic Concepts de N. Jacobson (1951).

Il existe aussi d'importantes publications, peut-être plus tardives, en langue française. Dans les *Éléments de Mathématique* (en cours de rédaction) de N. Bourbaki, l'*Algèbre* comporte déjà 7 chapitres (5 fascicules de 1942 à 1952) et on peut y rattacher le *Fascicule de résultats de la Théorie des ensembles* (1939), ainsi que de nombreux raisonnements des chapitres parus sur la *Topologie* et sur les *Fonctions d'une variable réelle.*

Dans un petit traité d'*Algèbre abstraite* (1936), O. Ore a *présenté quelques-uns des problèmes et des résultats les plus importants.* Un livre de G. Verriest (1939), quoique plus spécialement consacré à la *Théorie des groupes* et à la *Théorie des équations selon* Galois, n'en utilise pas moins quelques-uns des concepts récents de l'Algèbre.

P. Dubreil a fait paraître, en 1946, le premier tome d'une *Algèbre*, où *il s'est interposé aussi peu que possible entre le lecteur et la vaste littérature algébrique actuelle.*

Le Livre d'*Arithmétique et Algèbre modernes*, que les Presses Universitaires de France ont bien voulu accueillir dans la collection « Euclide », section dirigée par J. Chazy, s'est inspiré largement de ces devanciers, aussi bien étrangers que français. Il est le résultat de dix années de Cours, à la Sorbonne, dans un enseignement, puis dans une Chaire (créés à la demande de la Faculté des Sciences). Quoique les sujets en aient été variables, avec les années, ils ont presque tous comporté une partie commune d'algèbre abstraite, assurée souvent avec la collaboration de P. Dubreil. Quelques rédactions polycopiées (1945 et 1947 ; 1949-50 ; 1951-52) ont précédé l'actuelle mise au point.

Les tomes II et III dont l'élaboration est achevée comporteront chacun deux chapitres : « Anneaux et corps. Idéaux et divisibilité. » « Algèbre et arithmétique linéaires. Extensions finies des corps. »

Une des légères difficultés de l'Algèbre moderne est une certaine instabilité du vocabulaire et une multiplicité de notations et de termes, nouveaux et synonymes. C'est la rançon de l'abondance des progrès : chaque auteur apportant avec ses découvertes les mots et les signes qui lui sont personnels. J'ai essayé de remédier partiellement à cet inconvénient : en plus d'un lexique important, j'ai indiqué, au cours du texte, de nombreux renvois et, souvent même, des rappels des définitions ou des propriétés caractéristiques des notions utilisées. Pour l'introduction de ces notions elles-mêmes, j'ai essayé de me limiter à celles qui pouvaient avoir des applications dans la suite des exposés prévus.

J'espère qu'ainsi un lecteur, un peu averti, pourra utiliser un paragraphe du Livre, ou même certains numéros, sans être obligé ni d'étudier, ni même de lire méthodiquement, tout ce qui précède ; il trouvera notamment, pour les notions importantes, des définitions *directes* (parfois surabondantes). J'ai essayé aussi de limiter les énoncés de théorèmes à des propriétés essentielles qui puissent permettre à tout mathématicien d'en retrouver, sans peine, les multiples conséquences. C'est dans le même but que chaque théorème important est donné avec un titre qui rappelle son contenu et que la table des matières comporte un sommaire.

Les paragraphes (§) sont suivis de Commentaires qui donnent quelques indications, mi-historiques, mi-bibliographiques, mais qui sont surtout destinés à esquisser l'évolution des idées aboutissant aux conceptions actuelles. Ils sont aussi complétés par des *exercices* ; certains sont des illustrations des théories du texte, ils en indiquent des applications possibles à des exemples concrets et à des propriétés connues ; ils montrent la nécessité de certaines restrictions et de certaines exceptions ; j'espère qu'ils diminueront un peu l'abstraction apparente des exposés. D'autres sont des amorces de généralisations, ou des indications de raisonnements que le lecteur rétablira aisément dans leur intégralité.

Je serais injuste si je ne disais tout ce que ce Livre doit aux Professeurs, aux Chercheurs et aux Étudiants, qui depuis cinq ans participent au *Séminaire d'Algèbre* de la Faculté des Sciences et y ont fait des exposés, soit sur des théories récentes, soit sur des travaux originaux, soit sur leurs recherches personnelles. Je ne saurais trop remercier mon collègue et ami P. Dubreil, qui a été le véritable animateur de ce Séminaire. Le travail en commun ainsi réalisé et les thèses de doctorat nombreuses qu'il a inspirées ou animées sont la preuve du renouveau dont jouit maintenant, en France, la Science algébrique et arithmétique.

A. C.

Les renvois au cours du texte et dans l'index indiquent le chapitre et le numéro dans ce chapitre.

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS FONDAMENTALES

« ... plus on s'élève en mathématiques, plus on a affaire à des êtres purement logiques, à des symboles, plus on va vers une logique formelle c'est-à-dire vers le simple... »

H. LEBESGUE,
Entretiens de Zurich, déc. 1938.

§ 1. NOTATIONS ET VOCABULAIRE DU RAISONNEMENT

Dans ce paragraphe, je rappelle seulement quelques notations et quelques termes du vocabulaire de la Logique, plus ou moins utilisés actuellement en Mathématiques, et plus spécialement en Algèbre. J'énonce aussi quelques « lois logiques », considérées souvent comme *évidentes* (et utilisées implicitement) ; je ne cherche pas à distinguer méthodiquement celles qu'on peut considérer comme des *axiomes* et celles qu'on peut *démontrer* comme des conséquences de ces axiomes.

Je rappelle seulement que, dans ces premières notions de Logique, comme dans les premières notions d'Algèbre qui suivront, certains êtres —ou certains noms— ne peuvent être définis seuls, mais seulement par une *définition collective*, constituée par des relations entre plusieurs de ces êtres —ou de ces noms—.

1. Implication. — Une flèche, placée entre deux *relations* (1) —ou conditions— (énoncées ou formulées), considérées dans une *théorie* —ou avec des *circonstances préalables*— :

$$\{\text{relation } 1\} \rightarrow \{\text{relation } 2\}$$

désigne une *implication*, c'est-à-dire un jugement, exprimé par l'un des énoncés suivants, qui sont équivalents —ou synonymes— :

la relation 1, appelée *hypothèse*, *entraîne* —ou implique— la relation 2, appelée *conséquence* — ou *conclusion*— ;

si {rel. 1} *est vraie*, {rel. 2} *est vraie* ;

pour que {rel. 1} soit vraie ; *il est nécessaire* —ou *il faut*— que {rel. 2} soit vraie ;

pour que {rel. 2} soit vraie, *il suffit* que {rel. 1} soit vraie.

(1) Certains logisticiens emploient le terme *proposition*, au lieu de relation. Cependant une relation, au sens logique, peut être une *conjonction* (ou une *disjonction*) (I-5), de plusieurs propositions, au sens grammatical.

Le mot « vrai » est ainsi utilisé pour expliquer —ou servir de synonyme— à l'implication. Inversement l'implication peut servir à expliquer —sinon à définir— la vérité (mathématique).

Dans une *théorie*, dont le *fondement* (système —ou conjonction— de définitions, conventions et hypothèses) est une relation (complexe), *une relation est vraie quand* (et seulement quand) *elle est impliquée par le fondement* (1).

L'implication est *réflexive* (une relation s'implique elle-même) ; elle est *transitive* (pour le sens général de ces qualificatifs, voir I-31) :

$$\{\text{rel. } 1 \rightarrow \text{rel. } 2 \quad \textit{et} \quad \text{rel. } 2 \rightarrow \text{rel. } 3\} \rightarrow \{\text{rel. } 1 \rightarrow \text{rel. } 3\}.$$

2. Équivalence (logique). — Deux relations sont *équivalentes*, dans une théorie, et peuvent se remplacer mutuellement dans tout raisonnement de cette théorie, lorsque *chacune d'elles implique l'autre* —ou en est *une condition nécessaire* (conclusion) *et suffisante* (hypothèse)—. Cette implication mutuelle est désignée par une double flèche :

$$\{\text{rel. } 1\} \rightleftarrows \{\text{rel. } 2\}\,; \quad \text{ou} \quad \left\{ \textit{et} \begin{array}{c} \text{rel. } 1 \rightarrow \text{rel. } 2 \\ \text{rel. } 2 \rightarrow \text{rel. } 1 \end{array} \right\}$$

Elle est souvent exprimée par l'un des énoncés suivants (qui sont eux-mêmes équivalents) et dans lesquels 1 et 2 peuvent être transposés —ou permutés— :

pour que {rel. 1} soit vraie, *il faut et il suffit* que {rel. 2} soit vraie ;

{rel. 1} est vraie *si et seulement si* {rel. 2} est vraie.

On désigne parfois (abusivement) une équivalence par la seule conjonction *lorsque*, ou *quand*, ou même *si* (en sous-enten-

(1) La vérité (mathématique) est ainsi une notion essentiellement relative ; elle dépend du fondement, souvent admis implicitement. Certains théorèmes de géométrie sont vrais *en géométrie euclidienne* ; ou en *géométrie archimédienne...* ; certaines propriétés des polynômes sont vraies pour certains *domaines de coefficients* (qui ne sont pas toujours des ensembles de « nombres »)... (Ex. 1.).

dant « et seulement »). Cet emploi est notamment fréquent dans les définitions.

La synonymie d'expression —ou de termes— est une *équivalence* (sous-entendu : de définitions ou de vocabulaires). Des définitions (équivalentes) sont aussi appelées *propriétés caractéristiques* de l'être défini.

L'équivalence est, comme les implications qui la définissent, *réflexive* et *transitive* ; elle est en outre *symétrique* : chacune des deux relations est équivalente à l'autre.

3. Récurrence. — Le *raisonnement par récurrence*, fréquemment utilisé en Arithmétique et en Algèbre, peut être exprimé par la propriété (de logique) suivante, souvent considérée comme un des axiomes de l'arithmétique :

Si, dans une suite (finie ou dénombrable), *numérotée*, par un entier (positif) *i*, *de relations*, considérées dans une théorie, *chaque relation implique la suivante* :

$$\{\text{rel. } i \rightarrow \text{rel. } i+1\}\,; \quad (\text{quel que soit } i)$$

et si la première relation de la suite est vraie, toute relation de la suite est vraie (1).

Pour une suite de *deux* relations (la théorie constituant une circonstance préalable permettant d'exprimer la vérité par une implication) cette loi de récurrence devient une forme de la *transitivité de l'implication*, ou du *syllogisme* :

$$\{\text{rel. } 2 \text{ vraie} \quad \textit{et} \quad \text{rel. } 2 \rightarrow \text{rel. } 3\} \rightarrow \{\text{rel. } 3 \text{ vraie}\}.$$

(1) Cet énoncé comporte l'emploi des termes : *numéro*, *suivant* et suite ; *premier*, *tout* et chaque, qui font partie du vocabulaire de l'arithmétique, et qu'il faudrait, en toute rigueur, *expliquer* —sinon définir— préalablement (voir les ex. 5-1 à 5-7).

A. Denjoy, dont on connaît les importants travaux sur « l'énumération (transfinie) », pense que cet énoncé peut être démontré comme conséquence de propriétés —ou axiomes— des ensembles (exposé fait à la *Soc. math. de France* (1948) et *Congrès de Philosophie des Sc.*, 1951).

On sait d'autre part l'importance attribuée par H. Poincaré, à l'emploi du raisonnement par récurrence.

On retrouve l'expression de la transitivité, en remplaçant l'affirmation de la vérité par l'implication par le fondement de la théorie, considéré comme une relation numérotée 1.

4. Absurde et contradictoires. — Le *raisonnement par l'absurde* utilise, plus ou moins explicitement, les *contradictoires* des relations considérées, dont l'existence semble être une hypothèse de la théorie.

Deux relations 1 et 1′ sont *contradictoires*, dans une théorie [1] lorsqu'elles vérifient (la conjonction de) les deux relations suivantes qui sont symétriques (chaque relation est contradictoire de l'autre) :

{rel. 1 *et* rel. 1′} est *absurde*
{rel. 1 *ou* rel. 1′} est *vraie* (dans la théorie).

Cette définition peut encore être exprimée par une *alternative* :

ou bien rel. 1 est vraie ; *ou bien* rel. 1′ est vraie.

Dans cette définition, la vérité a, comme il a été dit, un caractère relatif ; c'est une implication par le fondement de la théorie.

Par contre l'*absurde* a un caractère général, il peut être caractérisé comme étant une relation telle que :
sa conjonction avec une autre relation est équivalente à l'absurde ;
sa disjonction avec une autre relation est équivalente à cette relation :

$$\{\text{rel. } \textit{et} \text{ absurde}\} \rightleftarrows \text{absurde} ; \quad \{\text{rel. } \textit{ou} \text{ absurde}\} \rightleftarrows \text{rel.}$$

L'emploi des contradictoires est fait, implicitement ou explicitement, par l'application de la **loi** —ou la règle— de **contraposition.**

(1) On admet parfois que, dans toute théorie, toute relation a une contradictoire ; par exemple toute « définition d'un mode d'égalité » entraîne *l'existence de l'inégalité* (contradictoire). On peut aussi considérer que cette existence est une hypothèse complémentaire de la théorie qui, dans certains cas, peut être abandonnée : on peut concevoir qu'il existe des nombres dont on ne sait pas « vérifier » s'ils sont égaux ou inégaux.

On peut remplacer une implication de relations par l'implication « renversée » —ou converse— de leurs contradictoires (Ex. 3) (1) :

$$\{\text{rel. } 1 \to \text{rel. } 2\} \rightleftarrows \{\text{contr. } 2 \to \text{contr. } 1\}.$$

La contraposition peut aussi être appliquée *partiellement* à un seul terme d'une conjonction de relations

$$\{\text{rel. } f \textit{ et } \text{rel. } 1\} \to \text{rel. } 2$$
$$\rightleftarrows \{\text{rel. } f \textit{ et } \text{contr. } 2\} \to \text{contr. } 1.$$

En pratique, c'est toujours une contraposition partielle (2) qui est appliquée : la relation f étant le fondement de la théorie —ou la conjonction des circonstances préalables— (Ex. 7). Ceci peut d'ailleurs être mis en évidence en écrivant les implications (équivalentes) sous les formes qui résultent de la loi *d'importation-exportation* (I-6) :

$$\text{rel. } f \to \{\text{rel. } 1 \to \text{rel. } 2\}\ ; \quad \text{rel. } f \to \{\text{contr. } 2 \to \text{contr. } 1\}.$$

En particulier pour démontrer une équivalence de deux relations dans une théorie, il est assez fréquent d'établir directement l'une des implications (dans la théorie, ou comme conséquence du fondement), puis d'établir la contraposée de l'autre (Ex. 4) :

$$\text{rel. } 1 \rightleftarrows \text{rel. } 2. \quad \text{ou} \quad \{\text{rel. } 1 \to \text{rel. } 2 \textit{ et } \text{rel. } 2 \to \text{rel. } 1\}$$

peut être remplacée par :

$$\{\text{rel. } 1 \to \text{rel. } 2\} \textit{ et } \{\text{contr. } 1 \to \text{contr. } 2\}.$$

5. Conjonction et disjonction. — On a déjà utilisé ci-dessus les notions (qui sont corrélatives) de *conjonction* et *disjonction*

(1) On peut « démontrer » la loi de contraposition, en utilisant certaines règles et certains axiomes de la logique, dont, bien entendu, la définition de l'absurde.

(2) On peut aussi bien démontrer la loi de contraposition partielle que la loi totale.

de relations, en les désignant par les conjonctions grammaticales *et*, *ou* (la seconde n'ayant pas, bien entendu, le sens d'alternative) [1].

On peut les considérer comme des *opérations internes* (I-46) *dans l'ensemble des relations d'une théorie* (la conjonction ou la disjonction de deux relations d'une théorie est encore une relation de cette théorie). Il en résulte qu'on peut construire, par récurrence, la conjonction et la disjonction d'un système d'un nombre quelconque (fini) de relations d'une théorie.

On applique intuitivement leurs *qualités d'associativité*, de *commutativité* et de *tautologie* (pour le sens général de ces termes voir I-45 et 46). Dans la conjonction ou la disjonction d'un système (fini) de relations, *on peut* : *permuter les termes*, d'une façon quelconque ; *associer certains* d'entre eux et les *remplacer par le résultat* de leur conjonction ou disjonction (suivant le cas) ; *supprimer un terme qui est équivalent à un autre*. Ces modifications remplacent le résultat primitif par une relation équivalente (Ex. 2).

La contradictoire du résultat d'une opération (conjonction ou disjonction), sur un système de relations, *est équivalente au résultat de l'opération corrélative* (disjonction ou conjonction), *sur les contradictoires des relations primitives.*

$$\text{contr. }\{\text{rel. } 1 \ \textit{et} \ \text{ rel. } 2\} \rightleftarrows \{\text{contr. } 1 \ \textit{ou} \ \text{ contr. } 2\}$$
$$\text{contr. }\{\text{rel. } 1 \ \textit{ou} \ \text{ rel. } 2\} \rightleftarrows \{\text{contr. } 1 \ \textit{et} \ \text{ contr. } 2\}.$$

Ces formules sont équivalentes, en raison de la symétrie de la contradiction. Elles peuvent être justifiées par la définition des contradictoires en appliquant les lois de la logique indiquées ci-dessous.

Elles peuvent être utilisées pour passer d'une loi à sa corrélative ; il suffit d'en prendre la contraposée et d'y remplacer les contradictoires des relations arbitraires par les relations arbitraires.

(1) Certains logisticiens emploient :

& pour et ; V (initiale de vel) pour *ou*

6. Lois de la logique. — En plus de l'emploi qui a déjà été fait des opérations (transitivité de l'implication et expression de la récurrence ; définition de l'équivalence et de la contradiction), leurs relations avec l'implication peuvent être exprimées par un certain nombre de lois *corrélatives* (Ex. 7), plus ou moins intuitives. Elles sont exprimées ci-dessous pour des couples de relations arbitraires, numérotées 1 et 2 ; elles s'étendent, par récurrence, à un nombre quelconque de relations, numérotées de 1 à n.

Implication des constituants :

$$\{\text{rel. } 1 \textit{ et } \text{rel. } 2\} \to \text{rel. } i \, ; \quad \text{rel. } i \to \{\text{rel. } 1 \textit{ ou } \text{rel. } 2\}$$

(i peut être remplacé par 1 ou 2 ; dans l'extension à une opération sur n relations, il peut être remplacé par un nombre quelconque de 1 à n).

Distributivité de l'implication, relativement aux opérations (plus précisément à la *conjonction des conclusions* et à la *disjonction des hypothèses*) :

$$\{\text{h} \to \text{rel. } 1 \textit{ et } \text{h} \to \text{rel. } 2\} \rightleftarrows \{\text{h} \to \{\text{rel. } 1 \textit{ et } \text{rel. } 2\}\}$$
$$\{\text{rel. } 1 \to \text{c} \textit{ et } \text{rel. } 2 \to \text{c}\} \rightleftarrows \{\{\text{rel. } 1 \textit{ ou } \text{rel. } 2\} \to \text{c}\}.$$

De ces deux lois et de la transitivité de l'implication, on déduit aisément une *loi de combinaison terme à terme*, de deux implications (Ex. 6) :

$$\left\{\text{et} \begin{matrix} 1 \to 2 \\ 1' \to 2' \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} \{\{1 \textit{ et } 1'\} \to \{2 \textit{ et } 2'\}\} \\ \{\{1 \textit{ ou } 1'\} \to \{2 \textit{ ou } 2'\}\}. \end{matrix}$$

Distributivité mutuelle des opérations ; chaque opération est distributive (I-47), relativement à l'autre :

$$[\{\text{rel. } 1 \textit{ et } \text{rel. } 2\} \textit{ ou } h] \rightleftarrows [\{\text{rel. } 1 \textit{ ou } h\} \textit{ et } \{\text{rel. } 2 \textit{ ou } h\}]$$
$$[\{\text{rel. } 1 \textit{ ou } \text{rel. } 2\} \textit{ et } h] \rightleftarrows [\{\text{rel. } 1 \textit{ et } h\} \textit{ ou } \{\text{rel. } 2 \textit{ et } h\}].$$

Les implications gauche-droite de la première formule et droite-gauche de la deuxième sont des conséquences corrélatives des lois précédentes (Ex. 8). Les implications converses (droite-gauche et gauche-droite) qui sont aussi corrélatives l'une de l'autre (Ex. 9) peuvent être considérées comme des postulats de la logique. Elles sont, peut-être, plus évidentes dans l'application —ou l'illustration— qui en est faite ci-dessous aux opérations de réunion et d'intersection des ensembles (I-17). Elles sont aussi des conséquences de la loi suivante (Ex. 10 et 11).

Loi d'importation-exportation ; c'est une loi formelle, qui, à une implication par une conjonction d'hypothèses, substitue une succession d'implications :

$$[\{\text{rel. } 1 \textit{ et } \text{rel. } 1'\} \rightarrow \text{rel. } 2] \rightleftarrows [\text{rel. } 1 \rightarrow \{\text{rel. } 1' \rightarrow \text{rel. } 2\}].$$

En passant du premier membre au second, il y a *exportation* d'une des relations de la conjonction hypothèse (qui peut être d'ailleurs indifféremment 1 ou 1'). En passant du second membre au premier, il y a *importation*, de la deuxième hypothèse, dans une conjonction avec la première.

La possibilité de permutation de 1 et 1′ donne la loi :

$$[1 \rightarrow \{1' \rightarrow 2\}] \rightleftarrows [1' \rightarrow \{1 \rightarrow 2\}].$$

En appliquant l'exportation à la loi du syllogisme (I-1 et 3), on peut l'exprimer sans utiliser la conjonction :

$$\{\text{rel. } 1 \rightarrow \text{rel. } 2\} \rightarrow [\{\text{rel. } 2 \rightarrow \text{rel. } 3\} \rightarrow \{\text{rel. } 1 \rightarrow \text{rel. } 3\}].$$

7. Signes de totalité et d'existence. — J'indique encore, en considérant comme intuitives leur signification et leurs propriétés, l'usage des deux signes corrélatifs :

Tout (x) ; *Existe* (x) ; en abrégé *Ex.* x ; ou $(\exists)$.

Ils *quantifient* une relation qui « dépend » d'une *variable* x, définie dans un certain *domaine de variation* —ou représentant des éléments de ce domaine—, qui est un ensemble. (Ex. 13.) Leur étude se rattache ainsi à celle des ensembles et de l'appartenance.

Ce sont des abréviations de :

pour *toute valeur* de (la variable) x, la relation est vraie...
il existe (au moins) *une valeur* de x, telle que la relation soit vraie...

Il peut être commode d'utiliser explicitement l'appartenance (I-8) au domaine **E**, de variation de x :

la *totalité* est alors exprimée par une *hypothèse d'appartenance* :

$$\{\text{Tout } x, \text{ rel. } x\} \rightleftarrows \{x \in \mathbf{E} \to \text{rel. } x\} ;$$

l'existence est une *possibilité* (d'une conséquence c, non absurde)

$$\{\text{Ex. } x, \text{ rel. } x\} \rightleftarrows [\{x \in \mathbf{E} \textit{ et } \text{rel. } x\} \to \text{rel. } c].$$

Si le domaine de variation (de la variable) est un domaine d'un nombre fini n, de valeurs qu'on peut numéroter de 1 à n, ces signes sont des abréviations d'une conjonction ou d'une disjonction :

$$\{\text{Tout } i, \text{ rel. } i\} \rightleftarrows \{\text{rel. } 1 \textit{ et } \text{rel. } 2 \textit{ et } \dots \textit{ et } \text{rel. } n\}$$
$$\{\text{Ex. } i, \text{ rel. } i\} \rightleftarrows \{\text{rel. } 1 \textit{ ou } \text{rel. } 2 \textit{ ou } \dots \textit{ ou } \text{rel. } n\}.$$

Les lois des opérations, étendues par récurrence de 2 et 3 à n, *se généralisent* pour les signes de quantification, appliquées à un domaine d'un nombre quelconque (même infini) d'éléments.

Implication des constituants : si a est une *valeur* de x :

$$\{\text{Tout } x, \text{ rel. } x\} \to \text{rel. } a ; \quad \text{rel. } a \to \{\text{Ex. } x, \text{ rel. } x\}.$$

Ce sont là des généralisations des lois pour un système fini (I-6), ce sont aussi des relations évidentes —ou manifestement équivalentes au sens intuitif des quantifications—.

Distributivité de l'implication, relativement aux quantifications (totalité de la conclusion, ou existence de l'hypothèse) :

$$[\text{Tout } x, \{\text{rel. } h \to \text{rel. } x\}] \rightleftarrows [\text{rel. } h \to \{\text{Tout } x, \text{ rel. } x\}]$$
$$[\text{Tout } x, \{\text{rel. } x \to \text{rel. } c\}] \rightleftarrows [\{\text{Ex. } x, \text{ rel. } x\} \to \text{rel. } c].$$

Pour qu'une même hypothèse h implique chaque relation d'un ensemble, il faut et il suffit que toutes les relations de l'ensemble soient vraies, pour que h soit vraie.

Pour qu'une même conclusion c soit impliquée par chaque relation x

d'un ensemble, il faut et il suffit que c soit vraie lorsqu'est vraie une relation quelconque de l'ensemble.

Ce sont encore des équivalences intuitives des quantifications.

Relations avec la contradiction :

$$\text{contr. } \{\text{tout } x, \text{ rel. } x\} \rightleftarrows \{\text{Ex. } \ x, \text{ contr. } x\}$$
$$\text{contr. } \{\text{Ex. } \ x, \text{ rel. } x\} \rightleftarrows \{\text{Tout } x, \text{ contr. } x\}.$$

BIBLIOGRAPHIE FRANÇAISE SOMMAIRE (I, § 1)

Pour des développements plus complets de Logique et de Logistique je renvoie aux ouvrages spéciaux, dont j'indique ci-dessous quelques-uns parmi ceux de langue française.

G. PEANO, *Formulaire de mathématiques* (1895-97 ; 1901-2-8).

L. COUTURAT, *L'algèbre de la logique* (1re éd., 1905 ; 2e éd., 1914).

L. ROUGIER, *La structure des théories déductives* (1921).

G.-H. LUQUET, *Logique formelle*, IIe Partie : La logique symbolique contemporaine (1925).

S. ZAREMBA, *La logique des mathématiques* (1926).

F. GONSETH, *Les fondements des mathématiques*, chap. X : « Les mathématiques et la logique » (1926).

J. HERBRAND, *Recherches sur la théorie de la démonstration* (Thèse de doctorat, 1930).

A. REYMOND, *Les principes de la logique et la critique contemporaine* (1932).

H. REICHENBACH, Introduction à la logistique (en vue de la *Théorie des probabilités*, 1935), trad. franç. par H. SAVONNET (1939).

Ch. SERRUS, *Essai sur la signification de la logique*, chap. IV : « La logique des relations » (1939).

ID., *Traité de logique* (1945).

M. BOLL, *Éléments de logique scientifique* (1re éd., 1942 ; 2e éd., 1947).

I. M. BOCHENSKI O. P., *Précis de logique mathématique* (1948).

J. PIAGET, *Traité de logique* (1950).

E. W. BETH, *Les fondements logiques des mathématiques* (1950).

J. DOPP, *Leçons de logique formelle* (IIe et IIIe Parties : Logique moderne) (1950).

P. DESTOUCHES-FEVRIER, *La structure des théories physiques* (1951).

H.-B. CURRY, *Leçons de logique algébrique* (1952).

Je signale encore la Collection d'études en cours de publication : *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* (Amsterdam).

EXERCICES (I, § 1)

1. Donner des conditions préalables (sens des lettres et de signes) aux formules :

$$\{a = a'\} \rightarrow \{a \times b = a' \times b\} ; \quad \{a = a' \ \ ou \ \ b = 0\} \rightleftarrows \{a \times b = a' \times b\}.$$

2. La commutativité de la conjonction et de la disjonction étant admise pour 2 relations et l'associativité étant admise pour 3 relations, montrer, par application de la loi de récurrence, qu'elles sont vraies pour un nombre n entier quelconque, de relations.

3. Former la contraposée de l'implication (où x est un nombre réel) :

$$x^2 = 2 \rightarrow x \text{ irrationnel} ;$$

rappeler la démonstration de la propriété ainsi obtenue.

4. a et b étant des entiers positifs et p un nombre premier, on peut démontrer l'équivalence :

$$(a \text{ div. par } p \ \ ou \ \ b \text{ div. par } p) \rightleftarrows (a \times b \text{ div. par } p) ;$$

(div. abréviation de divisible). En fait, on remplace l'implication droite-gauche par :

$$(a \times b \text{ div. par } p \ \ et \ \ a \text{ non div. par } p) \rightarrow (b \text{ div. par } p).$$

Vérifier qu'on peut faire ce remplacement en prenant la contraposée, puis une contraposée partielle. Démontrer l'implication obtenue, pour $p = 2$, puis pour p quelconque, par récurrence sur le rang de p, dans les nombres premiers.

5. On admet, pour les nombres entiers, les propriétés suivantes (d'après B. L. Van der Waerden et G. Peano) :

Pour tout nombre entier i, il existe un et un seul suivant, noté i^+, dont il est le précédent. Le nombre 1 est le premier des nombres entiers c'est-à-dire n'est le suivant d'aucun nombre —ou n'a pas de précédent—. L'égalité de deux nombres entraîne celle de leurs précédents.

Des relations étant numérotées par des nombres entiers successifs et si chacune d'elles A_i implique sa suivante A_{i^+} et si en outre A_1 est vraie, chaque relation A_i est vraie (principe du raisonnement par récurrence).

Ceci admis démontrer les propriétés suivantes.

5-1. Tout entier différent de 1 a un précédent déterminé (défini à une égalité près).

5-2. L'*addition* de deux entiers étant une opération (de signe +) définie par la relation de récurrence :

$$i^+ = i+1 ; \quad i+j^+ = (i+j)^+ ;$$

démontrer qu'elle est définie, *associative*, *commutative* et aussi *unipare*, c'est-à-dire que

$$\{a+i = a+i'\} \to i = i'.$$

5-3. La *multiplication* de deux entiers étant une opération, de signe $\times$, définie par la relation de récurrence :

$$i \times 1 = i\,; \quad i \times (j^+) = (i \times j) + i\,;$$

démontrer qu'elle est *distributive*, pour l'addition des multiplicandes (de gauche), des multiplicateurs (de droite) ; *associative* ; *commutative* et *unipare*.

5-4. On définit une relation de *comparaison* entre les entiers par la condition :

$$i < j \rightleftarrows \{\text{Ex. } k, \text{ (entier) } i+k = j\}.$$

Vérifier que cette relation est *transitive*. On lui associe la relation *réflexive* :

$$i \leqslant j \rightleftarrows \{i < j \text{ ou } i = j\}.$$

Vérifier que cette relation est encore transitive.

5-5. Démontrer que si un système (fini) d'éléments est numéroté par des entiers successifs, le dernier numéro n est indépendant de l'ordre adopté (c'est le nombre *cardinal* des éléments).

On pourra raisonner par récurrence sur n, en montrant que :

(α) Toute permutation —ou substitution— des éléments peut être obtenue par une succession de transpositions (I-37), (récurrence sur le nombre n, trouvé par un premier numérotage) ;

(β) Le dernier numéro n ne change pas dans une transposition (on l'admettra pour le cas de $n = 2$).

5-6. Démontrer que tout ensemble d'entiers renferme un et un seul entier, *au plus égal* (au sens de la deuxième définition de 5-4) à tous les autres. On peut se ramener au cas d'un système d'un nombre fini de n éléments, puis raisonner par récurrence sur n.

5-7. Montrer qu'on peut compléter l'ensemble des entiers (positifs) par l'adjonction d'un nombre 0, qui soit le précédent de 1. Montrer que dans l'ensemble ainsi complété les opérations ont encore les mêmes qualités, à condition de poser :

$$i+0 = i\,; \quad i \times 0 = 0.$$

5-8. Démontrer que, pour tout couple de nombres entiers (positifs) a et b, il existe un (et un seul) couple d'entiers (positifs ou nuls) q et r, tels que :

$$a = b \times q + r\,; \quad 0 \leqslant r < b.$$

Raisonner par récurrence sur a, en examinant d'abord le cas de a plus petit que b.

5 *bis*. En admettant l'existence de la suite doublement illimitée des nombres entiers :

$$\ldots, (-i), \ldots, (-1), 0, (+1), \ldots, (+i), \ldots$$

avec la relation, en deçà de 0 :

$$\text{suivant de } (-\text{suivant de } i) = (-i)\,;$$

reprendre les définitions et les démonstrations des exercices 5-1 à 5-4. Étendre la propriété de 5-8.

6. Démontrer les lois de combinaison terme à terme (I-6) en utilisant la transitivité de l'implication et les lois d'implication des constituants et de distributivité de l'implication.

7. Montrer que les couples de lois de l'implication des constituants, de la distributivité de l'implication et de la distributivité mutuelle des opérations sont respectivement corrélatives. On prendra pour cela la contraposée d'une des lois, en utilisant les règles de construction des contradictoires des opérations.

8. Démontrer les implications des lois de distribution :

$$[\{1 \textit{ et } 2\} \textit{ ou } h] \rightarrow [\{1 \textit{ ou } h\} \textit{ et } \{2 \textit{ ou } h\}]\,;$$
$$[\{1 \textit{ et } h\} \textit{ ou } \{2 \textit{ ou } h\}] \rightarrow [\{1 \textit{ ou } 2\} \textit{ et } h.]\,;$$

en utilisant la transitivité de l'implication, l'implication des constituants et la distributivité de l'implication. Mettre en évidence la corrélation des deux démonstrations (1, 2, h relations arbitraires).

9. Démontrer que l'une des équivalences de la loi de distributivité mutuelle entraîne l'autre. On pourra utiliser le fait que, dans une conjonction —ou une disjonction— de plusieurs relations, on peut supprimer l'une d'elles quand elle est impliquée par —ou qu'elle en implique— une autre ; (conséquence de la tautologie, de l'associativité et de l'implication des constituants). Il n'est pas nécessaire d'utiliser les contradictoires.

10. En utilisant la loi d'exportation, démontrer la formule :

$$h \rightarrow [\text{rel. } i \rightarrow \{h \textit{ et } \text{rel. } i\}]\,;$$

où h et rel. i sont des relations quelconques. En donnant à i deux valeurs 1 et 2 et en appliquant les lois précédentes de logique, démontrer l'implication :

$$h \rightarrow [\{1 \textit{ ou } 2\} \rightarrow \{(1 \textit{ et } h) \textit{ ou } (2 \textit{ et } h)\}]\,;$$

puis l'implication converse de la deuxième formule de l'exercice 8. Généraliser pour n valeurs de i.

11. Établir la loi suivante, qui, en un certain sens, est la *corrélative* de la loi exportation-importation :

$$[\text{rel. } 2 \rightarrow \{\text{rel. } 1 \textit{ ou } \text{rel. } 1'\}] \rightleftarrows [\text{contr. } 1 \rightarrow \{\text{rel. } 2 \rightarrow \text{rel. } 1'\}].$$

On pourra appliquer la loi d'exportation à la contraposée du premier membre de cette formule, puis remplacer la dernière implication de l'expression obtenue par sa contraposée.

En utilisant cette loi, vérifier la formule :

contr. h → [{rel. i *ou* h} → rel. i] ;

en utilisant un raisonnement analogue à celui de l'exercice précédent en déduire l'implication converse de la première formule de l'exercice 8.

12. Donner une justification de la loi de contraposition : en prenant pour hypothèse l'implication {rel. 1 → rel. 2} et utilisant les propriétés de l'absurde, montrer que :

[{rel. 1 *et* contr. 2} *ou* contr. 1] → contr. 1 ;

puis appliquer au premier membre la loi de distributivité des opérations.

13. Énoncer quelques exemples d'existence en arithmétique : infinité de nombres premiers ; plus petit diviseur premier d'un nombre ; quotient et reste d'une division. Vérifier que ce sont les *possibilités* qui servent de prémisses —ou hypothèses— pour d'autres propriétés.

14. Dans la généralisation de la loi de distributivité de l'implication relativement aux signes de totalité et d'existence ; exprimer ces signes au moyen d'une appartenance, puis appliquer la loi d'importation-exportation.

§ 2. ALGÈBRE DES ENSEMBLES

8. Ensemble et appartenance. — Les notions d'*être*, d'*égalité*, d'*ensemble* (fini ou infini), d'*appartenance d'un être à un ensemble*, sont indéfinissables séparément. Elles interviennent dans les raisonnements (elles-mêmes, ou par des locutions synonymes) au moyen de *relations* (I-1), entre elles, et avec les notions de la logique.

L'**appartenance** d'un être a à un ensemble $\mathbf{A}$ est exprimée par l'une des formules, ou l'un des énoncés suivants, qui sont considérés comme synonymes —ou équivalents— entre eux :

$a \in \mathbf{A}$; l'être a **appartient** à l'**ensemble** $\mathbf{A}$;
a est *contenu dans* $\mathbf{A}$; a est *agrégé à* $\mathbf{A}$;
a est un **élément** —ou une *quantité*, ou un *terme*— de $\mathbf{A}$.

Un ensemble (d'un *nombre d'éléments*) *fini* sera, plus spécialement, appelé un **système** et ses éléments en seront les **termes**.

Les termes d'un système peuvent être, soit numérotés, soit désignés individuellement (1), par une même lettre, affectée d'un indice :

$$a_i \; ; \quad i \text{ de } 1 \text{ à } n.$$

L'appartenance peut alors être caractérisée par une *disjonction d'égalités* (I-5 et I-9) :

$$x \in \mathbf{A} \;\rightleftarrows\; \{x = a_1 \;\; ou \;\; x = a_2 \;\; ou \;\; \ldots \;\; ou \;\; x = a_n\}.$$

(1) Cette désignation devient *pratiquement* impossible lorsque le nombre de termes, tout en étant fini, est trop grand ; d'où l'usage des points de « suspension ».

Quoi qu'il en soit, on peut considérer que l'appartenance est, dans le cas fini une *extension*, et dans le cas infini une *généralisation*, d'une disjonction de deux (ou d'un petit nombre) d'égalités (I-7).

Collection « EUCLIDE »