COLLECTION MAJOR BAC

Terminales ES - L

Pratique des mathématiques

Problèmes, méthodes et corrigés

par G. Szwebel

Presses Universitaires de France
puf

Pratique des mathématiques

Problèmes, méthodes et corrigés

PAR

Georges Szwebel

Professeur de mathématiques
au Cours Charlemagne

Presses Universitaires de France

MAJOR BAC
DIRIGÉ PAR
PASCAL GAUCHON

DU MÊME AUTEUR

Mémento de mathématiques (Terminales ES-L), « Major Bac », PUF, 1995.

ISBN 2 13 047767 4

Dépôt légal — 1re édition : 1996, avril

108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris

Sommaire

Avant-propos

Ce volume d'exercices et de problèmes corrigés recouvre la totalité du programme de mathématiques des enseignements obligatoire et de spécialité des Terminales ES et L.

Complément du Mémento dans lequel l'élève trouve déjà les définitions, propositions, théorèmes et formules à connaître, ce recueil se veut **un instrument méthodologique** *permettant à l'élève d'appréhender correctement les sujets qui lui sont proposés.*

Tous les sujets sont précédés de l'indication des thèmes abordés pour permettre aux élèves d'envisager les questions en fonction du programme déjà traité.

Les corrigés sont détaillés et rédigés de façon à apprendre aux élèves à présenter une copie au baccalauréat. Les corrigés sont précédés de **remarques méthodologiques** *destinées à faire comprendre la cohérence des énoncés, à dégager l'approche à envisager et à montrer les pièges à éviter; ils rappellent également les points du cours à utiliser.*

Ce livre constitue ainsi un outil efficace de révision et de synthèse pour l'année du baccalauréat. Son ambition est d'apprendre à travailler avec **méthode***, seule façon d'envisager le succès.*

1

Exercices

1 – THÈMES ABORDÉS
- factorisation d'un polynôme
- logarithme népérien et exponentielle de base e

Énoncé

1. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$$

a) Calculer P(2). En déduire une factorisation de $P(x)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

a) $2 \ln x + \ln(x - 1) = \ln(14x - 24)$.

b) $e^{2x} - e^x + 24\,e^{-x} - 14 = 0$.

Remarques méthodologiques

- La question 1 *a)* n'est cohérente que si $P(2) = 0$ ce qui permet d'envisager la factorisation $P(x) = (x - 2)Q(x)$, Q étant un polynôme de degré inférieur de une unité au degré de P, c'est-à-dire que Q est un polynôme du second degré, soit de la forme $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
Pour déterminer a, b et c, on pourra utiliser le **procédé par identification.**

- L'énoncé utilisant l'expression «**En déduire**» on cherchera, dans la résolution des deux équations de la question 2, à revenir à la forme $X^3 - X^2 - 14X + 24 = 0$.

- Ne pas oublier, dans la question 2 *a)*, de déterminer d'abord l'ensemble des valeurs de x sur lequel cette équation a un sens; le logarithme d'un nombre n'ayant de sens que si, et seulement si, ce nombre est strictement positif.

Corrigé

1. *a)* $P(2) = 2^3 - 2^2 - (14 \times 2) + 24 = 8 - 4 - 28 + 24$

soit $\boxed{P(2) = 0}$

Dans ce cas 2 étant une racine du polynôme P de degré 3, on peut mettre $(x-2)$ en facteur et écrire $P(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$ a, b et c étant des constantes réelles qu'on va déterminer **par identification.**

$$P(x) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$$

or $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$, d'où, en identifiant monôme par monôme ces deux écritures, on obtient :

$$\begin{cases} \boldsymbol{a = 1} \\ b - 2a = b - 2 = -1 \Longleftrightarrow \boldsymbol{b = 1} \\ c - 2b = c - 2 = -14 \Longleftrightarrow \boldsymbol{c = -12} \\ \textit{Vérification : } -2c = 24 \Longleftrightarrow c = -12 \end{cases}$$

d'où $\boxed{P(x) = (x-2)(x^2+x-12)}$

b) Résolvons l'équation $P(x) = (x-2)(x^2+x-12) = 0$
Cette équation est équivalente à

- $x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 2$

ou

- $x^2 + x - 12 = 0$

$\Delta = 49 \quad x_1 = \dfrac{-1-7}{2} = -4 \quad$ ou $\quad x_2 = \dfrac{-1+7}{2} = 3$

finalement, l'ensemble solution de cette équation est

$$\boxed{S = \{-4; 2; 3\}}$$

2. *a)* Résolvons l'équation $2 \ln x + \ln(x-1) = \ln(14x-24)$ le logarithme d'un nombre n'ayant de sens que si, et seulement si, ce nombre est strictement positif, posons :

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > 1 \\ 14x - 24 > 0 \Longleftrightarrow x > \dfrac{12}{7} \end{cases} \quad \text{soit} \quad x \in \left]\frac{12}{7}; +\infty\right[$$

Sur cet ensemble, l'équation est équivalente à
$\ln(x^2) + \ln(x-1) = \ln(14x-24)$
c'est-à-dire à $\ln[x^2(x-1)] = \ln(14x-24)$
et le logarithme étant bijectif, l'équation est équivalente à
$x^2(x-1) = 14x - 24$
c'est-à-dire à
$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{P}(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-4; 2; 3\}$
mais, dans la mesure où $x \in \left]\dfrac{12}{7}; +\infty\right[$, l'ensemble solution de cette équation est $\boxed{S = \{2; 3\}}$

b) Résolvons l'équation $e^{2x} - e^x + 24e^{-x} - 14 = 0$
Cette équation est équivalente à $e^{2x} - e^x + 24\,\dfrac{1}{e^x} - 14 = 0$
c'est-à-dire à $e^{3x} - e^{2x} - 14e^x + 24 = 0.$
En posant $X = e^x$, l'équation est alors équivalente à

$$\left\{\begin{array}{l} X = e^x > 0 \\ X^3 - X^2 - 14X + 24 = \mathrm{P}(X) = 0 \Longleftrightarrow X \in \{-4; 2; 3\} \end{array}\right\}$$
$\Longleftrightarrow X \in \{2; 3\}$

- $X = e^x = 2 \Longleftrightarrow x = \ln 2$
- $X = e^x = 3 \Longleftrightarrow x = \ln 3$

finalement, l'ensemble solution de cette équation est

$$\boxed{S = \{\ln 2; \ln 3\}}$$

2 – THÈME ABORDÉ
• logarithme népérien

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\ln(x^2 + x - 6) = \ln(2x - 1) + \ln(4 - x).$$

Remarques méthodologiques

- Avant d'utiliser la relation fonctionnelle $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, ne pas oublier que le logarithme d'un nombre n'a de sens que si, et seulement si, ce nombre est strictement positif; en conséquence, commencer par déterminer l'ensemble des valeurs de x sur lequel cette équation a un sens.
- Une fois précisé cet ensemble, chercher à écrire l'équation sous la forme $\ln a = \ln b$ pour pouvoir, le logarithme étant bijectif, écrire ensuite $a = b$.

Corrigé

L'équation n'a de sens que si, et seulement si,

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0 & L_1 \\ 2x - 1 > 0 & L_2 \\ 4 - x > 0 & L_3 \end{cases}$$

Le trinôme $x^2 + x - 6$, associé à la première ligne, a deux racines -3 et 2; il est du signe de a (c'est-à-dire positif) à l'extérieur des racines; en conséquence le système des 3 conditions est équivalent à

$$\begin{cases} x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[\\ x > \dfrac{1}{2} \\ x < 4 \end{cases} \iff x \in]2; 4[$$

Sur l'intervalle]2; 4[, l'équation est équivalente à

$$\ln(x^2 + x - 6) = \ln[(2x - 1)(4 - x)|$$

et le logarithme népérien étant bijectif,

$$x^2 + x - 6 = (2x - 1)(4 - x) = -2x^2 + 9x - 4$$

cette équation est équivalente à

$$3x^2 - 8x - 2 = 0.$$

Cette équation admet deux solutions

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{22}}{3} \approx -0,23 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{22}}{3} \approx 2,90.$$

Seule la solution x_2 appartient à l'intervalle]2; 4[, en conséquence, l'ensemble solution de cette équation est :

$$\boxed{S = \left\{ \frac{4 + \sqrt{22}}{3} \right\}}$$

3 – THÈMES ABORDÉS
- calcul intégral
- exponentielle de base e et logarithme népérien

Énoncé

a) Résoudre le système $\begin{cases} x - 3y = 2 \ln 2 \\ x + y = 4 \ln 2 \end{cases}$

b) On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4}\, dx$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4}\, dx$.

Calculer $\mathrm{I} - 3\mathrm{J}$ et $\mathrm{I} + \mathrm{J}$.
En déduire les valeurs exactes de I et J.

Remarques méthodologiques

- La question *a)* est un simple système de deux équations du premier degré à deux inconnues. La méthode d'addition permettra très rapidement de trouver les inconnues x et y.
- Dans la question *b)*, on demande de **calculer** $\mathrm{I}-3\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}+\mathrm{J}$, puis d'en **déduire** les valeurs de I et J, en conséquence, ne surtout pas chercher des primitives de $x \longmapsto f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x+3}{\mathrm{e}^x+4}$ ou de $x \longrightarrow g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+4}$, le but de l'exercice est de **déduire** les valeurs des intégrales I et J du calcul des intégrales $\mathrm{I}-3\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}+\mathrm{J}$.
- Noter d'ailleurs l'air de famille existant entre d'une part $\begin{cases} x-3y \\ x+y \end{cases}$ de la question *a)*,

  et d'autre part $\begin{cases} \mathrm{I}-3\mathrm{J} \\ \mathrm{I}+\mathrm{J} \end{cases}$ de la question *b)*.

  En conséquence, ne soyez pas surpris si vous trouvez
  $$\begin{cases} \mathrm{I}-3\mathrm{J} = 2\ \ln 2 \\ \mathrm{I}+\mathrm{J} = 4\ \ln 2 \end{cases}$$
  l'exercice ayant, bien entendu, sa cohérence.

Corrigé

a) $\begin{cases} x-3y = 2\ \ln 2 \\ x+y = 4\ \ln 2 \end{cases}$. En faisant $\boxed{\begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_1+3L_2 \\ L_2 \longleftarrow L_2-L_1 \end{matrix}}$

on obtient un nouveau système équivalent au précédent, soit

$$\begin{cases} 4x = 14\ \ln 2 \\ 4y = 2\ \ln 2 \end{cases} \text{ d'où finalement } \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{7\ \ln 2}{2} \\ y = \dfrac{\ln 2}{2} \end{cases}}$$

b) En utilisant les propriétés de linéarité de l'intégrale (notamment : l'intégrale d'une somme est égale à la somme de deux intégrales), on obtient :

$$\mathrm{I} - 3\mathrm{J} = \int_0^{\ln 16} \left[\frac{\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x + 4} - \frac{3}{\mathrm{e}^x + 4}\right] \mathrm{d}x = \int_0^{\ln 16} \left[\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 4}\right] \mathrm{d}x$$

c'est-à-dire $\mathrm{I} - 3\mathrm{J} = \left[\ln|\mathrm{e}^x + 4|\right]_0^{\ln 16}$
soit

$$\mathrm{I} - 3\mathrm{J} = (\ln 20) - (\ln 5) = \ln\left(\frac{20}{5}\right) = \ln 4 = \ln(2^2) = 2\ \ln 2.$$

On aura noté, dans la recherche d'une primitive de $x \longrightarrow f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 4}$, que nous étions en présence d'une forme $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x + 4$ et $u'(x) = \mathrm{e}^x$.

En conséquence, une primitive de f est définie par :

$$F(x) = \ln|u(x)| = \ln|\mathrm{e}^x + 4|$$

et $$\mathrm{I} + \mathrm{J} = \int_0^{\ln 16} \left[\frac{\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x + 4} + \frac{1}{\mathrm{e}^x + 4}\right] \mathrm{d}x = \int_0^{\ln 16} \left[\frac{\mathrm{e}^x + 4}{\mathrm{e}^x + 4}\right] \mathrm{d}x$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{I} + \mathrm{J} = \int_0^{\ln 16} 1\ \mathrm{d}x = [x]_0^{\ln 16} = \ln 16 = \ln(2^4) = 4\ \ln 2.$$

Ainsi, on obtient $\begin{cases} \mathrm{I} - 3\mathrm{J} = 2\ \ln 2 \\ \mathrm{I} + \mathrm{J} = 4\ \ln 2 \end{cases}$

et, par analogie avec la question *a)*, on en déduit que

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{7\ \ln 2}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \frac{\ln 2}{2}}$$

Ce recueil propose des exercices et problèmes corrigés de mathématiques couvrant la totalité du programme des enseignements obligatoire et de spécialité des Terminales ES et L.

L'auteur a particulièrement insisté sur l'apprentissage et l'assimilation d'une méthodologie. *Tous les sujets proposés sont précédés de l'indication des thèmes abordés. Les corrigés sont détaillés et précédés de* remarques méthodologiques *destinées à faire comprendre la cohérence des énoncés, à dégager l'approche à envisager et à montrer les pièges à éviter ; les points du cours à utiliser sont rappelés systématiquement.*

Complément du Mémento de mathématiques, du même auteur, ce livre constitue un outil indispensable d'application du cours, d'apprentissage des techniques méthodologiques, *de révision et de synthèse tout au long de l'année de Terminale.*

42 FF

22411071/4/96

9 782130 477679