COLLECTION MAJOR BAC

Terminale S

Probabilités et nombres complexes, des exercices aux problèmes

par J. Assayag

Presses Universitaires de France
puf

Probabilités et nombres complexes, des exercices aux problèmes

PAR

Jacky Assayag

Presses Universitaires de France

MAJOR BAC
DIRIGÉE PAR
PASCAL GAUCHON

ISBN 2 13 047728 3

Dépôt légal — 1re édition : 1996, avril

108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris

Sommaire

Avant-propos

Ce volume d'exercices de mathématiques, consacré aux probabilités et nombres complexes, recouvre la totalité du programme des enseignements obligatoire et de spécialité de Terminale S.

L'élève trouvera dans chaque chapitre :

- *des rappels de cours axés sur les notions et résultats de base que l'étudiant doit connaître et savoir utiliser;*
- *un choix d'exercices et de problèmes, sélectionnés pour beaucoup parmi les sujets du baccalauréat des années précédentes. Chacun est accompagné d'une solution détaillée, offrant un panorama complet des méthodes classiques de résolution.*

L'étudiant avisé commencera par étudier sérieusement son cours avant d'aborder les exercices et problèmes. Il n'oubliera pas que réfléchir longuement sur un point délicat est souvent plus utile que lire un corrigé. S'affronter aux difficultés, chercher par soi-même des solutions qui n'apparaissent pas évidentes, se concentrer sans se décourager, voilà ce qui permet de progresser.

Ce livre constitue ainsi un outil efficace de révision et de synthèse aussi bien pendant l'année pour les devoirs de contrôle, qu'à la veille de l'examen. Il sera aussi très utile aux futurs étudiants des classes préparatoires économiques et commerciales.

Son ambition n'est pas seulement de vous préparer, mais surtout de vous faire réussir.

1

Dénombrements

RAPPELS DE COURS

I Cardinal d'un ensemble fini

- On appelle cardinal d'un ensemble fini E, le nombre n de ses éléments. On note $\operatorname{card} E = n$, en convenant que $\operatorname{card} \varnothing = 0$.
- Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E, alors : $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$

  $\operatorname{card} \overline{A} = \operatorname{card} E - \operatorname{card} A$ ($\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E).
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ est une partition d'un ensemble fini E, alors : $\operatorname{card} E = \operatorname{card} A_1 + \operatorname{card} A_2 + \ldots + \operatorname{card} A_p$
- Soient E et F deux ensembles finis, alors : $\operatorname{card}(E \times F) = (\operatorname{card} E) \cdot (\operatorname{card} F)$

On en déduit la règle suivante, dite règle du produit :
si on peut choisir un objet α de a façons, puis un objet β de b façons, alors on peut choisir α puis β, dans cet ordre, de ab façons.

II Listes d'un ensemble fini

Soit E un ensemble non vide de n éléments; soit p un entier naturel non nul.

- Une p-liste (ou mot de longueur p) d'éléments de E est un élément de E^p, c'est-à-dire une suite $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de p éléments de E.

  Remarques : l'ordre des éléments de la p-liste est important.
  Une p-liste peut contenir plusieurs fois le même élément.

  Il y a n^p p-listes d'un ensemble à n éléments.

- Un arrangement de p éléments de E est une p-liste d'éléments deux à deux distincts de E. Le nombre des arrangements de p éléments de E est noté A_n^p :

  $$\mathrm{A}_n^p = 0, \quad \text{si } p > n$$

  $$\mathrm{A}_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \quad , \text{ si } p \leqslant n$$

- Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E.

  Il y a $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments.

III Combinaisons

Soit E un ensemble de n éléments. Une combinaison de p éléments de E est une partie à p éléments de E.

Remarques : l'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.
Les éléments d'une combinaison sont deux à deux distincts.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$:

$$C_n^p = 0, \quad \text{si } p > n$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ si } 0 \leqslant p \leqslant n$$

IV Formules usuelles

Pour tous entiers naturels n et p :

- si $p \leqslant n$: $C_n^p = C_n^{n-p}$
- Formule de Pascal : $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$
  Elle permet de calculer les nombres C_n^p de proche en proche, suivant un tableau appelé triangle de Pascal.
- Formule du binôme de Newton :
  $$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$
  Elle justifie l'appellation pour les nombres C_n^p de coefficients binomiaux.

EXERCICES AVEC SOLUTIONS

▶ *p*-listes, arrangements, permutations

1.1 On jette sur la table cinq dés de couleurs différentes et on lit sur la face supérieure de chaque dé le nombre de points. Combien y a-t-il de lectures possibles?

Solution

Le résultat d'un jet se compose de 5 nombres qui ne sont pas nécessairement distincts. L'ordre a de l'importance (les dés ont des couleurs différentes).
Un résultat est une 5-liste d'éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, donc le nombre de lectures possibles est : $6^5 = 7776$.

1.2 Une entreprise comprend 35 employés. On élit le bureau directeur du comité d'entreprise, composé d'un président, d'un vice-président et d'un trésorier. Les postes sont non cumulables.
Quel est le nombre de bureaux possibles ?

Solution

Un bureau est constitué de 3 employés distincts (postes non cumulables). L'ordre a de l'importance (les responsabilités sont différentes). Le nombre de bureaux est celui des arrangements de 3 éléments de l'ensemble des 35 employés, donc il y a A_{35}^{3}, c'est-à-dire 39 270 bureaux possibles.

1.3 On veut ranger $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ de telle sorte que A précède B et B précède C sans qu'ils soient nécessairement consécutifs. Par exemple (D, E, A, H, B, C, G, F).
Quel est le nombre de rangements des huit lettres respectant ces conditions ?

Solution

Pour ranger les 8 lettres de telle sorte que les 3 lettres A, B, C apparaissent dans l'ordre alphabétique, on peut procéder de la manière suivante :

on commence par placer les 5 lettres autres que A, B, C. Il y a 5 places à choisir, dans un certain ordre, parmi 8 places disponibles. Il y a donc A_{8}^{5} façons d'effectuer ce choix.

Puis on complète en disposant les lettres A, B, C dans cet ordre dans les 3 places non occupées. Il n'y a qu'une possibilité.

Le nombre de rangements cherché est : $A_8^5 = 6720$.

1.4 Un facteur arrive dans le hall d'un immeuble. Il doit distribuer 7 prospectus distincts dans 10 boîtes aux lettres nominatives.
De combien de façons peut-il le faire dans chacun des cas suivants :

1. Chaque boîte aux lettres peut contenir un nombre quelconque de prospectus.
2. Chaque boîte aux lettres peut contenir au plus un prospectus.

Solution

1. Il y a 7 prospectus, et pour chaque prospectus il y a 10 façons de choisir le numéro de la boîte aux lettres.
   Il y a donc 10^7 façons d'effectuer la distribution.
   Si on numérote les boîtes aux lettres de 1 à 10, une distribution est décrite par une 7-liste d'éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 10\}$ (à la $i^{ème}$ place de la liste, on met le numéro de la boîte où a été mis le prospectus n°i).
2. Puisque chaque boîte peut contenir au plus un prospectus, une distribution n'est autre qu'un arrangement de 7 éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 10\}$.
   Il y a donc A_{10}^7, c'est-à-dire 604 800 distributions différentes.

1.5 Pierre, Paul et Irène sont des élèves d'une classe mixte de 9 garçons et 11 filles. On se propose de prendre, dans cette classe, 3 garçons pour jouer les rôles respectifs de Tartuffe, Orgon et Cléante, et 2 filles pour jouer les rôles respectifs d'Elmire et de Marianne. Un tel ensemble de 3 garçons et de 2 filles, dans lequel le rôle de chacun est bien précisé est appelé une «troupe».

1. Combien de troupes peut-on former?
2. Combien y a-t-il de troupes qui contiennent Pierre, Paul et Irène?

(BAC)

Solution

1. Le nombre de façons de choisir 3 garçons parmi 9 pour tenir les rôles, respectivement de Tartuffe, Orgon et Cléante est égal au nombre d'arrangements de 3 éléments d'un ensemble de 9 éléments, c'est-à-dire A_9^3. Ce choix étant fait, il y a A_{11}^2 de façons de choisir 2 filles parmi 11 pour tenir les rôles d'Elmire et Marianne, respectivement. Il y a donc au total $A_9^3 \times A_{11}^2 = 504 \times 110 = 55\,440$ troupes possibles.
2. • Pierre et Paul font partie de la troupe. Il y a 7 façons de choisir le troisième acteur; puis pour chaque choix 3! façons de distribuer les rôles.

   • Irène fait partie de la troupe. Il y a 10 façons de choisir la seconde actrice; et pour chaque choix 2! façons de distribuer les rôles.

   Il y a donc $(7 \times 3!) \times (10 \times 2!) = 840$ troupes avec Pierre, Paul et Irène.

1.6 Un couple offre un dîner de $2n$ couverts.
De combien de manières les convives peuvent-ils être placés (autour de la table ronde) de façon que le maître de maison soit en face de sa femme?

Solution

- On commence par choisir la place de sa femme : il y a $2n$ places possibles.

- Pour chacun de ces choix, le maître de maison se place en face de sa femme, et il reste $2n-2$ places à distribuer aux invités. Il suffit de déterminer l'ordre dans lequel on les place. Il y a donc autant de façons de le faire que de permutations d'un ensemble de $2n-2$ éléments, c'est-à-dire $(2n-2)!$

Le nombre de manières de placer les $2n$ convives est donc :

$$2n \times (2n-2)! = \frac{(2n)!}{2n-1}.$$

1.7 On considère un damier carré comportant n^2 cases. On dispose de p jetons numérotés de 1 à p. Dénombrer les différentes façons de mettre les p jetons dans chacun des cas suivants :

1. Dans des cases différentes (on suppose $p \leqslant n^2$)
2. Chaque ligne et chaque colonne ne contiennent qu'un seul jeton (on suppose $p \leqslant n$).

Solution

1. Pour placer le jeton n°1, il y a n^2 choix de la case; pour placer ensuite le jeton n°2, il y a n^2-1 choix de la case (on supprime la case du jeton n°1); ....; pour placer enfin le jeton n°p il y a $n^2-(p-1)$ choix de la case (on supprime les $(p-1)$ cases où sont placés les $(p-1)$ premiers jetons).
Le nombre demandé est :
$n^2(n^2-1)\dots(n^2-p+1) = \mathrm{A}_{n^2}^p$
C'est le nombre d'arrangements de p éléments de l'ensemble des n^2 cases.

2. Le jeton n° 1 peut être placé sur n'importe laquelle des n^2 cases du damier; pour le jeton n° 2, il n'y a plus que $(n-1)^2$ possibilités (on supprime la ligne et la colonne

Ce recueil propose des exercices et problèmes de dénombrements, de calcul des probabilités sur un univers fini, et de nombres complexes. Il traite le programme des enseignements obligatoire et de spécialité de Terminale S.

On trouvera dans chaque chapitre :

- *des rappels de cours axés sur les notions et résultats de base que l'étudiant doit connaître et savoir utiliser ;*
- *un choix d'exercices et de problèmes, sélectionnés pour beaucoup parmi les sujets du baccalauréat des années précédentes. Chacun est accompagné d'une solution détaillée, offrant un panorama complet des méthodes classiques de résolution.*

Ce livre constitue ainsi un outil indispensable de révision et de synthèse, aussi bien pendant l'année pour les devoirs de contrôle qu'à la veille de l'examen.

L'auteur, actuellement professeur en classes préparatoires commerciales, a enseigné de nombreuses années en classes de Terminales.

42 FF 22411062/4/96

9 782130 477280