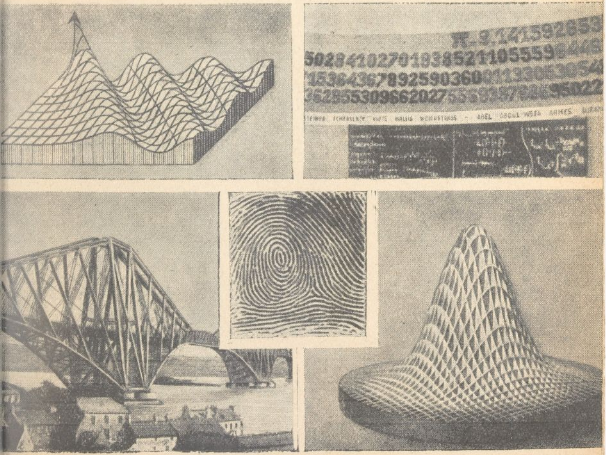
LE MYSTÈRE DES NOMBRES & DES FORMES

par Marcel BOLL



LAROUSSE - PARIS-VI

LE MYSTÈRE
DES NOMBRES
ET DES FORMES

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR A LA MÊME LIBRAIRIE

Qu'est-ce que... le hasard ? l'énergie ? le vide ? la chaleur ? la lumière ? l'électricité ? le son ? l'affinité ? Un volume in-8° (*Bibliothèque Larousse,* f^t 13,5 × 20 cm.), 152 gravures.

Pour connaître... la relativité, l'analogie, l'inertie, la gravitation, le choc, l'incandescence, la luminescence, la fréquence. Un volume in-8° (*Bibliothèque Larousse,* f^t 13,5 × 20 cm.), 145 gravures.

Idées nouvelles sur... l'électron, les piles, les dynamos, l'alternatif, l'induction, la radio, la télévision, les ultrasons. Un volume in-8° (*Bibliothèque Larousse,* f^t 13,5 × 20 cm.), 180 gravures.

L'électricité à la ville, à la campagne, en auto. Un volume (*Bibliothèque Larousse,* f^t 13,5 × 20 cm.), 174 gravures, index.

La chimie au laboratoire et à l'usine, dans la nature et dans la vie. Un volume in-8° (*Bibliothèque Larousse,* f^t 13,5 × 20 cm.), 250 gravures, 20 tableaux, 2 index.

Les deux infinis *(galaxies, étoiles, planètes, micelles, réseaux, noyaux, neutrons, photons).* Un volume (*Bibliothèque Larousse,* f^t 13,5 × 20 cm.), 162 gravures, 42 tableaux, index.

La chance et les jeux de hasard *(loterie, boule, roulette, baccara, trente et quarante, dés, ..., bridge, poker, belote, écarté, piquet, manille, ...).* Un volume in-8° (*Bibliothèque Larousse,* f^t 13,5 × 20 cm.), 155 gravures, 108 tableaux, index.

En collaboration :

La science, ses progrès, ses applications, sous la direction de Georges Urbain, membre de l'Institut, et de Marcel Boll. Deux volumes grand in-4° (*Collection in-4° Larousse,* f^t 32 × 25 cm.), 2 360 héliogravures, 12 hors-texte en couleurs, index contenant 20 000 références.

LE MYSTÈRE DES NOMBRES ET DES FORMES

Nombres réels et complexes
Formes naturelles et artificielles
Diagrammes descriptifs du monde matériel et des faits humains

par MARCEL BOLL
Professeur agrégé de l'Université, Docteur ès sciences

354 GRAVURES
INDEX

LIBRAIRIE LAROUSSE — PARIS (VI^E^)
13 à 21, rue Montparnasse, et boul^d^ Raspail, 114

INTRODUCTION

De toutes les idées générales, que la réflexion individuelle a puisées dans l'expérience, que la coopération a développées et que la tradition transmet aux membres de la collectivité humaine, il n'en est guère de plus nettes, de plus pénétrantes, de plus fécondes que celles de nombre *et de* forme.

Le nombre fit son apparition, en tant que nombre comptable, *dans le recensement des ensembles : arbres d'un verger, pièces de monnaie, habitants d'une ville, étoiles du ciel... La forme s'est dégagée, d'une façon souvent fautive, de coups d'œil réitérés sur les objets qui nous entourent ; les illusions des sens sont d'ailleurs facilement rectifiées par la première extension du nombre, le* nombre métrique, *employé inconsciemment par tout écolier, quand il répète que le mont Blanc a* 4 810 *mètres... Notre premier but sera d'approfondir la* correspondance rigoureuse, *que Descartes établit entre le nombre (métrique) et la forme. Puis, nous décrirons les applications les plus disparates de ces deux notions expérimentales, non seulement à notre exploration du monde matériel et des êtres vivants, mais aussi à notre compréhension des faits humains, tels que la science des caractères et la démographie. Au fur et à mesure que les nombres et les formes acquièrent droit de cité dans la pensée et dans la conduite, le niveau intellectuel d'un cerveau s'évalue de plus en plus par la diversité des questions qu'il est capable de traiter numériquement et graphiquement, alors que l'homme moyen se borne à vérifier ses comptes.... Sous peine d'atteindre des dimensions prohibitives, il fallait* élaguer *parmi la richesse des exemples de portée générale, tout en intéressant les esprits déjà informés.*

Il n'y a pas d'aberration plus flagrante que celle qui consiste à croire que les mathématiques possèdent une rigueur définitive : elles furent bouleversées à maintes reprises, notamment par Newton et par Gauss. Il est tout à fait impossible de se familiariser intégralement avec l'énorme vague de mathématiques, qui a déferlé sur le monde depuis le début de notre siècle, et il n'y aurait pas pire témérité que de s'aventurer à prédire ce qu'elles pourront être dans cinquante ans. Ainsi que l'écrit E.-T. Bell, plus les *mathématiques avancent en âge, plus elles deviennent abstraites, et, par conséquent, plus elles deviennent pratiques.*

Cet exposé ne se propose pas d'allonger la liste des « initiations mathématiques », dont certaines furent satisfaisantes. Il aurait plutôt tendance à prendre le contre-pied d'une pédagogie bornée et anachronique, car, comme le dit Tobias Dantzig, les traités scolaires sont rebutants, parce qu'ils éliminent toute préoccupation de culture, en ne laissant subsister qu'un squelette de sèche technicité. Combien d'adultes conservent un dégoût vivace de ces leçons tatillonnes et mortellement ennuyeuses, qui ont assombri leurs jeunes années? Depuis trois générations, les mathématiques ont cessé d'être le savoir par excellence, la science des affirmations inconditionnées, mais notre enseignement secondaire ne s'est pas encore rendu compte qu'il n'y a pas de vérité absolue, même en arithmétique, et que la géométrie est la plus simple des théories physiques... L. Hogben regrette qu'aucun effort ne soit tenté pour décrire l'évolution de ces sciences, leur signification dans la vie sociale, leurs rapports étroits avec l'humanité civilisée, car toute nation porte les germes de sa perte, si elle néglige l'instruction des masses, pour se consacrer aux êtres exceptionnellement doués.

Nous nous appliquerons à montrer, d'une façon concrète et accessible, que les nombres et les formes constituent, d'une part, un aspect, important par lui-même, de la réalité; et, d'autre part, que nombres et formes sont des modèles complaisants, des types rationnels, qui s'adaptent à tout, *par quoi* tout *s'énonce et sans lesquels la précision nous serait interdite : la lente élaboration de l'intelligence humaine n'aboutit-elle pas à ce double principe, de toujours définir ce dont on parle et de renoncer à parler de ce qui échappe à l'expérimentation? Principe qui ne souffre pas d'exception, dans aucun domaine.*

Chaque esprit attentif est capable de comprendre l'essentiel des idées directrices, que nous mettons en valeur. Après avoir pris connaissance de cet Ouvrage, allégé des développements purement techniques, les lecteurs ne seront certes pas promus mathématiciens... Mais ils regretteront sûrement de ne pas l'être, et beaucoup désireront le devenir.

MARCEL BOLL.

Sur les illustrations qui ornent la couverture, consulter les pages 169, 48, 204, 206, et 171.

Chapitre premier.

LES NOMBRES NATURELS

1. Une opération compliquée. — Aujourd'hui, que notre numération écrite est fixée dans tous ses détails (depuis le XIVe siècle) et parfaitement unifiée, nous pouvons nous amuser — distraction bien innocente — à écrire certains nombres en chiffres romains : en général, cette fantaisie ne dépasse pas... l'arrondissement, le siècle, rarement le millésime. Peut-être les originaux, qui font une consommation excessive de V et de L, changeront-ils d'avis en essayant une addition entre nombres, même petits, comme :

$$\begin{array}{r} \mathrm{C\,X\,I\,X} \\ +\ \mathrm{X\,L\,V\,I} \\ \hline \mathrm{C\,L\,X\,V} \end{array}$$

Il ne saurait être question d'effectuer des multiplications avec les chiffres romains!!! D'ailleurs, aujourd'hui que la grande majorité des Français et des Françaises a appris « les quatre règles » vers l'âge de huit ans, et continue à savoir s'en servir toute la vie, il est difficile de s'imaginer l'époque, somme toute récente, où les quatre règles étaient confiées à des « experts », à des « savants spécialistes », qui apportaient le résultat quelques jours après, en s'étant servi d'un *boulier* (appelé parfois « abaque »), analogue à celui qui orne encore le mur de la salle de billard, dans les villages (1).

(1) « Il y a seulement quatre siècles, le calcul digital (compter sur ses doigts) était le seul procédé dont disposait l'homme de culture moyenne, et les secrets du boulier n'étaient accessibles qu'aux calculateurs professionnels de l'époque. » (Tobias Dantzig, mathématicien américain, né en 1884.)

2. Zéro (ou vide). — Si les premiers recensements remontent à soixante siècles (Égypte), soit à plusieurs millénaires avant l'invention de l'écriture, la numération écrite est probablement aussi vieille que la propriété privée : sans aucun doute, elle est née du désir de l'homme de tenir un compte exact de ses troupeaux et de ses autres biens. Le principe de la numération actuelle est dû aux Phéniciens, plus intelligents que les Romains et d'ailleurs poussés, par les exigences de leur commerce, à utiliser des notations moins baroques et moins primitives. Par exemple, le nombre

sept cent deux mille huit cent quatre-vingt-quatre

(qui exige quarante-deux lettres), les Phéniciens l'auraient écrit à peu près comme ceci :

7*c* 2*m* 8*c* 8*d* 4

(avec neuf caractères seulement).

Dans les premiers siècles de notre ère, un Hindou, dont l'histoire n'a pas conservé le nom, imagina un caractère spécial, maintenant appelé « zéro » (1), pour marquer l'absence d'un chiffre d'un certain ordre :

7*c* 0*d* 2*m* 8*c* 8*d* 4;

dès lors, les lettres *en italiques* devenaient inutiles et *tous* les nombres naturels (tous les nombres entiers) pouvaient être écrits uniquement avec *dix* signes différents. C'est là l'origine de la « numération de position », qui ne fut ainsi découverte que plusieurs millénaires après les débuts de la pensée mathématique. Comme dit Jean Pelseneer, c'était un véritable défi au bon sens que d'oser désigner par un signe quelque chose qui n'existe pas, une absence, un trou, un vide.

Dès le VII^e siècle, les Arabes comprirent toute la portée de cette innovation; ils remarquèrent en outre que le zéro est un *opérateur* (2), puisque chaque zéro ajouté *à la droite* d'un nombre quelconque permet d'effectuer instantanément la multiplication de ce nombre par dix. Notre compatriote Gerbert (940-1003) s'initia aux chiffres arabes, lors de son voyage (980) à Cordoue, et sa conversion eut une grande importance, puisqu'il

(1) Le mot « zéro » est italien, emprunté à l'arabe, où son sens était : *vide*.

(2) La notion d'*opérateur* — une des plus importantes de toutes les mathématiques — est une extension et une généralisation de l'idée de grandeur : elle a été systématiquement introduite, vers 1854, par le savant anglais George Boole (1815-1864), dans son ouvrage fondamental *les Lois de la pensée*. Le signe bien connu $\sqrt{\ }$ est un opérateur; il en est de même pour i (§ **70**), qui exprime une rotation de 90°; pour d, qui signifie « partie infinitésimale de... » (**note V**, p. 283, etc.).

passa ses quatre dernières années sur le Saint-Siège (sous le nom de Sylvestre II), ce qui lui permit de répandre des idées saines, dont la fécondité est éternelle.

L'arithmétique commerciale commence, au XIVe siècle, avec son emploi par les négociants italiens.

3. **Ce que c'est qu'un milliard.** — Au XVe siècle, l'extrême limite des calculs possibles fut le million, qui resta d'ailleurs longtemps une expression nébuleuse. A la fin du XVIIIe siècle, les astronomes, en se familiarisant avec les immensités du ciel, apprirent par elles ce que c'est qu'un milliard.

Un milliard est un nombre bien grand s'il exprime un stock de pommes; c'est un nombre bien petit quand il s'agit de compter les atomes (1). Le nombre des fibres nerveuses du cerveau humain est de l'ordre de 3 milliards.

Il y a environ deux milliards d'êtres humains vivant sur la Terre : si l'on voulait rassembler la moitié de l'humanité en les tassant à raison de quatre au mètre carré, on arriverait à les caser tous dans le camp de Châlons ou dans la forêt de Fontainebleau.

Il s'est écoulé environ un milliard de minutes depuis le début de notre ère.

Un homme qui vivrait cent ans n'arriverait pas à compter depuis 1 jusqu'à 1 000 000 000, en ne s'occupant pas d'autre chose... Les nombres de neuf chiffres, en effet, comme 174 937 602, exigent trois secondes pour être prononcés. En 55 ans, un homme ne respire qu'un demi-milliard de fois; âgé de 33 ans, il a vécu un milliard de secondes. Pour faire tracer un milliard de bâtons (à raison d'un par seconde), il faut occuper 140 employés pendant un an (2).

Et cependant un milliard est un nombre infime à côté de ceux que nous allons rencontrer à propos des factorielles (§ **6**) et surtout à propos des puissances (§ **7**).

4. **Définition d'un ensemble ; l'addition.** — Les savants conservent au mot *ensemble* son acception habituelle (3) : un

(1) Inversement, un milliardième est une longueur considérable, quand on choisit l'année-lumière comme unité (ce milliardième vaut alors environ 461 kilomètres. Voir *les Deux Infinis*, 3e édition, p. 15).

(2) Dans la numération parlée, il n'y a *aucun avantage* à employer des mots représentant des nombres plus grands que le milliard. Ainsi, on dira : 726 millions de milliards.

(3) Il s'agit, en ce moment, d'ensembles dénombrables, mais on en connaît d'infiniment plus nombreux (*les Deux Infinis*, 3e édition, pp. 222-223).

ensemble est la réunion, considérée comme formant un tout, de plusieurs constituants ou objets (ensemble des molécules de l'atmosphère terrestre, ensemble des électrons d'un atome, ensemble des voyageurs d'un train, ...).

Il existe deux moyens expérimentaux de définir un ensemble :

I. Définition extensive (ainsi nommée, parce qu'elle « s'étend » à tous les *constituants* auxquels elle s'applique) :

a) *Désignation*. Ainsi, chez le crémier, un client annonce : « Je désire cet œuf, ces deux-ci et celui-là »;

b) *Enumération*. Exemple : un serrurier, appelé en ville pour une réparation, connaît ou possède la « liste » des outils, qui lui seront nécessaires.

II. Définition compréhensive (ainsi nommée, parce qu'elle « comprend » toutes les *propriétés* communes aux constituants). Tel est l'ensemble des recrues dont la corpulence est comprise entre 160 cm et 170 cm.

Lorsqu'on a affaire à deux ensembles primitivement recensés (1), on peut se demander quel sera le nombre d'objets qui seront contenus dans l'ensemble global, formé par la réunion des deux autres. « Objets » signifie, en principe, corps solides analogues et conservant leur individualité (2).

L'addition jouit de trois propriétés importantes, qui, *de l'avis unanime*, résultent d'une expérience progressivement affinée et qui sont *indispensables* dans l'application des « quatre règles » :

1° Elle est *univoque* (elle conduit à un résultat unique, bien déterminé), puisque deux nombres ont une seule somme, un seul total;

2° Elle est *commutative* (3) :

$$5 + 6 = 6 + 5;$$

3° Elle est *associative :*

$$1 + 2 + 5 = (1 + 2) + 5 = 3 + 5$$

(la double parenthèse indiquant, depuis Albert Girard, 1629,

---

(1) Et formés des *mêmes* objets (des œufs, des fruits, des têtes de bétail, des habitants). « Compter, écrit Hermann von Helmholtz (1821-1894), est un procédé qui repose sur notre possibilité de nous rappeler l'ordre de succession de nos états de conscience. » La suite des nombres naturels est l'échelle commune de comparaison, l'étalon de tous les ensembles.

(2) L'addition est donc, à l'origine, le compte rendu sténographique d'une propriété du monde extérieur. Mais toutes les propriétés ne sont pas *additives*. Nous en avons rencontré maints exemples : un litre d'eau distillée et un litre d'alcool ne donnent pas deux litres d'eau alcoolisée (*Qu'est-ce que...?*, 4e édition, p. 10); 115 volts + 115 volts peuvent donner 200 volts (*l'Electricité à la ville...*, 2e édition, p. 38 et **note P** du présent ouvrage); vérification expérimentale de « deux et un font deux » (*la Chimie au laboratoire...*, 3e édition, pp. 73-74), etc.

(3) On trouvera, à la **note K** (p. 276), un exemple d'addition, qui n'est pas commutative.

que l'addition est supposée effectuée sur les deux premiers nombres). Le signe (=) de l'égalité a été introduit en 1557 par l'Anglais Robert Recorde (1510-1558).

L'addition est *la seule opération fondamentale* de l'arithmétique : elle suffit à établir toutes les règles du calcul, si complexes soient-elles. Par exemple, si nous voulions extraire la racine cinquième du nombre 702 884, l'opération n'invoquerait aucune notion nouvelle, qui ne soit pas incluse dans l'addition... Mais le chemin à accomplir entre le point de départ — très simple — et le point d'arrivée — relativement difficile — est si long, qu'il faut tendre une main secourable à l'infirmité des déductions humaines, lorsqu'elles sont insuffisamment entraînées.

5. La multiplication. — Il arrive souvent que l'on ait à rassembler plusieurs ensembles, qui comportent, tous, le même nombre d'objets. Chacun sait que c'est là une multiplication, qui se présente, à l'origine, comme une addition abrégée (1).

La multiplication possède quatre propriétés fondamentales, que chacun de nous met inconsciemment en pratique :

1° Elle est *univoque* (§ **4**, 1°);

2° Elle est *commutative*. Supposons, par exemple, que l'on réunisse sept ensembles de trois objets, ce qui s'écrit (2) :

$$3+3+3+3+3+3+3=7\times 3$$

(7 fois 3 égale 21). Puis, dans une seconde opération, on réunit trois ensembles de sept objets :

$$7+7+7=3\times 7$$

(3 fois 7 égale aussi 21). L'égalité :

$$7\times 3=3\times 7$$

exprime la commutativité de la multiplication des nombres naturels (3);

3° Elle est *associative*. Ainsi :

$$2\times 3\times 7=(2\times 3)\times 7=6\times 7;$$

nous venons d'expliquer (§ **4**, 3°) la signification de la double parenthèse dans ce cas;

4° Elle est *distributive* par rapport à l'addition. On peut écrire :

$$2\times(3+5)=(2\times 3)+(2\times 5)=6+10;$$

(1) La « preuve par neuf » a été découverte par le savant arabe Alhossein (980-1037).

(2) Le signe (×) remonte à 1631 (William Oughtred, 1575-1660).

(3) Cette commutativité se retrouve pour les nombres réels (Chap. II) et pour les nombres complexes (§ **71**), à l'exclusion des « nombres d'ordre supérieur » (§ **30**) et des vecteurs (§ **67**, III).

c'est ce que l'on appelle « développer » le produit d'un nombre (ici : 2) par une somme (ici : 3 + 5).

6. Les factorielles. — En raison de sa grande importance, il nous faut rappeler incidemment le cas d'une multiplication particulière : on désigne, pour fixer les idées, par « factorielle neuf » — ce qui s'écrit « 9! » — le produit des neuf premiers nombres naturels, c'est-à-dire le produit

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9,$$

qui vaut 362 880 : c'est là un premier cas de *notation condensée*, puisqu'avec deux signes, on exprime un nombre relativement considérable. La figure 1 reproduit les factorielles des dix premiers nombres naturels.

1! = 1	=	1
2! = 1 × 2	=	2
3! = 1 × 2 × 3	=	6
4! = 1 × 2 × 3 × 4	=	24
5! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5	=	120
6! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6	=	720
7! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7	=	5.040
8! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7 × 8	=	40.320
9! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7 × 8 × 9	=	362.880
10! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7 × 8 × 9 × 10	=	3.628.800

FIG. 1. — Les factorielles des dix premiers nombres naturels.

Nous donnons également la valeur de 20!

2 432 902 008 176 640 000,

et celle de 30!

265 252 859 812 191 058 636 308 480 000 000.

Celle de 52! se trouve en note (1) faute de place; quant à 3 000!, c'est un nombre de 9 131 chiffres, dont voici les onze premiers (2) :

41 493 596 034 ......

Inutile de spécifier que les mathématiciens disposent de moyens rapides pour obtenir les valeurs *approchées* de nombres aussi grands.

7. Les puissances. — L'élévation à une puissance (ou « exponentiation ») joue, par rapport à la multiplication, un

(1) C'est le nombre :
80 658 175 170 943 878 571 657 984 856 403 766 975 289 550 440 883 304 344 000 000 000 000 (nombre de soixante-huit chiffres). 52! représente le nombre des paquets *différents* de cartes qu'un joueur de bridge peut avoir entre les mains, lorsqu'il commence à distribuer les cartes. Voir *La Chance et les jeux de hasard*, 2e édition, p. 20.

(2) Ce nombre 3 000! est le plus grand de ceux dont on a calculé la valeur avec plus de quatre ou cinq chiffres exacts.

rôle comparable à celui que celle-ci joue par rapport à l'addition (1).

Ainsi 2×2 s'écrit 2^2 et se lit « deux au carré »; 4 est le carré de 2.

De même $5 \times 5 \times 5$ s'écrit 5^3 et se lit « cinq au cube »; 125 est le cube de 5.

De même encore $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ s'écrit 3^7 et se lit « trois à la puissance sept » ou « trois exposant sept »; 2 187 est la puissance septième de 3.

L'opération de l'élévation aux puissances jouit de plusieurs propriétés remarquables :

1° Elle n'est pas *commutative :*

$$3^7 = 2\,187$$
$$7^3 = 343;$$

2° Mais elle est *distributive :*

$$(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3^5 \times 3^2 = 3^{(5+2)} = 3^7;$$

3° Et elle est également *associative :*

$$(5^3)^2 = (5^2)^3 = 5^{(2\times3)} = 5^6 = 15\,625.$$

A titre d'illustration, on peut se demander, avec Charles Laisant, quel est le plus grand nombre que l'on puisse écrire avec trois chiffres.

Ce n'est naturellement :

a) Ni 999;

b) Ni $(9^9)^9$, qui vaut *seulement* (d'après 3°) « neuf à la puissance 81 »;

c) Ni même 9^{99} (« neuf à la puissance 99 »).

C'est le nombre 9^{9^9}, qui s'écrit (pour éviter toute ambiguïté) $9^{(9^9)}$, soit « neuf à la puissance neuf-exposant-neuf » ou, si l'on préfère, « neuf à la puissance 387 420 489 ». Pour l'obtenir, il suffit (!) d'effectuer 387 420 488 multiplications par neuf, ce qui dépasse, non pas seulement les forces d'un homme, mais les forces de la collectivité humaine.

Nous avons néanmoins une idée de ce nombre. Il comprend exactement 369 693 100 chiffres (2), dont le dernier est un neuf et dont les treize premiers sont :

4 281 247 731 999 ......

Pour le transcrire sur un bout de papier, en supposant que

(1) La notation moderne des exposants remonte à Descartes (1637).

(2) Alors qu'un milliard s'écrit avec dix chiffres...

chaque chiffre occupe une longueur de 4 millimètres, il faudrait disposer d'une bande plus longue que le trajet de Paris à Rome en chemin de fer. Ce nombre remplirait dix-huit tomes du *Larousse du XX*e *siècle.* Si l'on chargeait un comptable, *non pas de le calculer,* mais de le recopier (*en admettant* qu'on l'ait calculé) à raison d'un chiffre par seconde, ce comptable serait occupé pendant 46 ans et demi, à raison de 49 semaines par an et de 45 heures par semaine...

L'exemple que nous venons de développer ne l'est nullement à titre de « récréation mathématique »; son but était de montrer que 52! et même 3 000! sont réellement de bien petits nombres (§ **6**) et que les mathématiciens construisent et manient avec aisance des ensembles incomparablement plus grands. Ces nombres peuvent d'ailleurs suffire au physicien, puisque l'ensemble des particules qui constituent l'Univers tout entier, est exprimé par un nombre de quatre-vingts chiffres (1).

8. Les suites. — Une suite, c'est tout simplement un ensemble de nombres choisis systématiquement (un ensemble ordonné); chaque nombre s'appelle « terme » de la suite (2).

1° La plus simple est la suite « naturelle » des nombres entiers :

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ldots$$

On peut se proposer d'effectuer la somme des termes de cette suite jusqu'au dixième, jusqu'au centième, jusqu'au millième, ce qui donne pour (3) :

la série des dix	premiers nombres	=	55
— cent	—	=	5 050
— mille	—	=	500 500.

Ces résultats n'ont rien de mystérieux; la somme des termes

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

peut s'écrire :

$$(1 + 10) + (2+9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) = 5 \times 11.$$

On opérerait de même dans tous les cas (4);

(1) Voir *les Deux Infinis*, 3e édition, p. 20.

(2) Nous nous limitons ici aux *suites entières* (dont les termes sont des nombres naturels). La première idée des suites (§ **108**), remonte à Fibonacci, appelé encore Léonard de Pise (1180-1225).

(3) Conformément à l'usage, nous appellerons *série* la somme des termes d'une suite.

(4) La formule générale s'écrit :

$$1+2+3+\ldots\ldots\ldots+(n-1)+n = 1/2\ n\,(n+1).$$

Nous laissons de côté les *nombres triangulaires* (et les cas analogues) : c'est une correspondance futile entre nombres et formes, qui n'a « aucun intérêt scientifique » (Tobias Dantzig).

2° On peut considérer également la suite des carrés des nombres naturels :

1, 4, 9, 16, 25, ...

Un raisonnement à peine plus compliqué que le précédent donnerait (1) pour la somme des carrés :

des dix	premiers nombres	SOMME	=	55 ×	7
des cent	»	»	=	5 050 ×	67
des mille	»	»	=	500 500 ×	667

3° Enfin, nous citerons la suite des cubes des nombres naturels :

1, 8, 27, 64, 125, ...

On obtient comme résultats (2) pour la somme des cubes :

des dix	premiers nombres	SOMME	=	55 ×	55
des cent	»	»	=	5 050 ×	5 050
des mille	»	»	=	500 500 ×	500 500

9. Les progressions. — Les progressions ne sont que des cas particuliers de suites. Chaque progression est définie par deux nombres (que nous supposons entiers, pour le moment) :

a) Le premier terme;

b) La « raison ».

Nous allons préciser leurs rôles sur quelques exemples :

1° La suite des nombres naturels (§ **8**) est une progression : le premier terme est 1, et la raison est 1, puisque chaque terme s'obtient à partir du précédent, en lui ajoutant l'unité. La suite de nombres naturels est une progression *par addition* ou progression « arithmétique » (3);

2° La suite des nombres pairs est également une progression arithmétique : son premier terme est 2, et la raison est 2.

La somme des termes de cette seconde progression est évidemment le double de la somme obtenue dans le cas précédent (en 1°);

3° La suite des nombres impairs se rattache à la même famille (4);

---

(1) La valeur générale est le produit de

$1/2\ n\ (n+1)$ par $1/3\ (2n+1)$.

(2) La valeur générale est, comme on le voit, le carré de $1/2\ n\ (n+1)$.

(3) Un terme quelconque d'une progression arithmétique est la *moyenne arithmétique* des deux termes qui l'entourent.

(4) Formule générale (*nombres carrés*) :

$$1+3+5+\dots\dots\dots+(2n-1)=n^2.$$

4° Considérons une seconde sorte de progression, dont la suivante nous offre un exemple :

$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 + 768 + 1\,536$;

cette progression se compose de dix termes, dont le premier est 3. Mais les termes suivants s'obtiennent par *multiplication* : nous avons affaire à une progression « géométrique » (1);

5° La légende bien connue (2) de l'invention du jeu d'échecs fait également intervenir une progression géométrique : c'est celle dont le premier terme est 1, la raison est 2 et qui comprend 64 termes :

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots\dots\dots\dots + 2^{62} + 2^{63}$$

Cette somme a été effectuée, la première fois, par le mathématicien français Jacques Ozanam (1640-1717); on trouve :

$$2^{64} - 1;$$

c'est un nombre de vingt chiffres (3).

10. Les opérations inverses. — Les trois opérations sur les nombres naturels (§§ **4**, **5** et **7**) peuvent être inversées :

1° L'addition (§ **4**) donne lieu à la *soustraction* (4). Au lieu de :

$$6 + 5 = 11,$$

on écrit :

$$11 - 6 = 5$$

ou bien :

$$11 - 5 = 6.$$

2° La multiplication (§ **5**) donne lieu à la *division* (5). Au lieu de :

$$7 \times 3 = 21$$

on écrit (6) depuis Oughtred (1657) :

$$21 : 3 = 7,$$
$$21 : 7 = 3.$$

(1) Un terme quelconque d'une progression géométrique est la *moyenne géométrique* des deux termes qui l'entourent.

(2) *La Chance et les jeux de hasard*, 2e édition, pp. 26-27.

(3) Voir la **note A**, p. 271. Nous retrouverons les progressions au Chapitre V (§ **53**).

(4) Les signes + et — figurent dans un ouvrage (1489) de l'Allemand Johann Widman.

(5) A l'inverse de la multiplication, la division n'est pas commutative (§ **5**, 2°). Ainsi, il ne revient pas au même de partager deux hectares entre cinq héritiers ou cinq hectares entre deux héritiers. (Au contraire, on peut rassembler une somme de dix mille francs en empruntant cinq mille francs à deux personnes ou deux mille francs à cinq.)

(6) Nous indiquerons au chapitre II (§ **18**) les notations :

$$\frac{21}{3} = 7 \qquad \frac{21}{7} = 3$$

Au lieu de :

$$3^5 \times 3^2 = 3^7,$$

on écrit :

$$3^7 : 3^2 = 3^{(7-2)} = 3^5.$$

3° L'élévation aux puissances (§ **7**) donne lieu à l'*extraction des racines*. Il suffit de reprendre les exemples du § **6** (1) :

$$2^2 = 4, \quad \text{d'où :} \quad 2 = \sqrt{4},$$
$$5^3 = 125, \quad \text{d'où :} \quad 5 = \sqrt[3]{125},$$
$$3^7 = 2\,187, \quad \text{d'où :} \quad 3 = \sqrt[7]{2\,187},$$

ce qu'on lit :

2 égale racine de 4,
5 égale racine cubique de 125,
3 égale racine septième de 2 187.

Nous nous sommes ici bornés aux cas les plus simples. Tout le Chapitre II va porter sur la généralisation de ces opérations inverses.

On conçoit que l'*arithmétique* s'occupe des lois concernant : les ensembles d'objets, la réunion de deux ou plusieurs ensembles en un seul, le partage d'un ensemble en ensembles partiels, la construction de nouveaux ensembles, comme nous allons le voir dans les prochains paragraphes.

11. Les arrangements. — Dans les trois opérations simples (addition, multiplication, exponentiation) et dans leurs inverses (soustraction, division, extraction des racines), on opère sur des ensembles formés par des constituants (objets) que l'on suppose identiques.

Il s'agit maintenant (dans ce paragraphe et dans le suivant) de construire de nouveaux ensembles, à partir d'ensembles primitifs, qui contiennent des objets distincts, non interchangeables (2). Pour fixer les idées, nous représenterons ces objets par des lettres.

On dispose d'une réserve illimitée de cinq lettres :

A B C D E.

Combien y a-t-il de moyens de les réunir trois par trois ?

a) On peut poser en principe que l'on n'utilisera qu'*une fois* chaque lettre, ce qui donne :

ABC ACB ABD DAE ....;

(1) Le symbole $\sqrt{\ }$ est un *r* minuscule déformé ; il a été proposé en 1526 par l'Allemand Rudolff.
(2) L'Hindou Bhaskara, au XIIe siècle, avait déjà abordé ce problème.

ARRANGEMENTS SANS RÉPÉTITION					
Nombres des objets					pris
un	deux	trois	quatre	cinq	↓
1	2	3	4	5	un à un
	2	6	12	20	deux à deux
		6	24	60	trois à trois
			24	120	quatre à quatre
				120	cinq à cinq

FIG. 2. — Les arrangements sans répétition.

Les carrés en traits gras indiquent les nombres de permutations — sans répétition — de un, deux, trois, quatre ou cinq objets.

ARRANGEMENTS AVEC RÉPÉTITION					
Nombres des objets					pris
un	deux	trois	quatre	cinq	↓
1	2	3	4	5	un à un
1	4	9	16	25	deux à deux
1	8	27	64	125	trois à trois
1	16	81	256	625	quatre à quatre
1	64	243	1024	3125	cinq à cinq

FIG. 3. — Les arrangements avec répétition.

Les carrés en traits gras donnent les nombres des permutations — avec répétition — de un, deux, trois, quatre ou cinq objets.

ce sont les *arrangements* sans répétition de cinq objets pris trois à trois (le mot « arrangement » signifiant que l'on tient compte de l'*ordre* des lettres). La figure 2 donne les nombres de quelques arrangements sans répétition (1);

b) On peut poser en principe que l'on utilise chaque lettre autant de fois qu'il est possible, ce qui donne :

AAA ABA AAB ECD ....;

ce sont les *arrangements* avec répétition de cinq objets pris trois à trois (le mot « arrangement » ayant le même sens que ci-dessus). La figure 3 indique les résultats pour les premiers arrangements avec répétition (1).

Les arrangements de cinq objets pris cinq à cinq reçoivent le nom de *permutations* de cinq objets; et il se présente deux cas :

a') Permutations sans répétition. Ce sont les suivantes :

ABCDE BADEC ABDCE ....

Ces permutations sont dites linéaires. Pour les permutations *circulaires*, on suppose que les cinq lettres occupent les cinq sommets d'un pentagone régulier; le nombre des permutations circulaires est inférieur à celui des permutations linéaires, puisqu'alors les deux permutations :

ABCDE et BCDEA

sont identiques (1);

(1) La permutation de *deux* objets s'appelle « interversion ».

COMBINAISONS SANS RÉPÉTITION					
Nombres des objets					pris
un	deux	trois	quatre	cinq	↓
1	2	3	4	5	un à un
	1	3	6	10	deux à deux
		1	4	10	trois à trois
			1	5	quatre à quatre
				1	cinq à cinq

FIG. 4. — Les combinaisons sans répétition.

COMBINAISONS AVEC RÉPETITION					
Nombres des objets					pris
un	deux	trois	quatre	cinq	↓
1	2	3	4	5	un à un
1	3	6	10	15	deux à deux
1	4	10	20	35	trois à trois
1	5	15	35	70	quatre à quatre
1	6	21	56	126	cinq à cinq

FIG. 5. — Les combinaisons avec répétition.

b') Permutations (1) avec répétition. En voici quelques-unes :

AAAAA AACBD BADEC ....

12. Les combinaisons. — On dispose à nouveau d'une réserve illimitée de cinq objets, par exemple de cinq lettres :

A B C D E

On s'occupe maintenant de les réunir trois par trois, mais on ne tiendra plus compte de l'*ordre* des lettres (2), si bien que les deux variantes :

ABC et ACB

ne compteront que pour *une* (combinaison).

a) On peut poser en principe que l'on n'utilisera qu'*une* fois chaque lettre, ce qui donne :

ABC ABD ABE BCE ....

ce sont les *combinaisons* sans répétition de cinq objets pris trois à trois (le mot « combinaison » signifiant arbitrairement que l'on ne tient pas compte de l'*ordre* des lettres). La figure 4 donne les résultats pour les premières combinaisons sans répétition (3);

(1) Voir la **note B** et la **note C** (p. 272).

(2) Il s'ensuit que, toutes choses égales d'ailleurs, les « combinaisons » sont *moins nombreuses* que les « arrangements ».

(3) Voir la **note B** et la **note C** (p. 272). Ce nombre donne ainsi les « produits différents » que l'on peut obtenir en choisissant trois nombres parmi cinq nombres donnés (puisque le produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs : commutativité, § 5).

b) On peut poser en principe que l'on utilise chaque lettre autant de fois qu'il est possible, ce qui donne :

AAA AAC ABD BDE ....

ce sont les *combinaisons* avec répétition de cinq objets pris trois à trois (le mot « combinaison » ayant le même sens qu'en *a*). La figure 5 donne les résultats pour les premières combinaisons avec répétition **(notes B et C).**

L'étude arithmétique des arrangements et des combinaisons constitue « l'analyse combinatoire », dont les débuts remontent à Pierre de Fermat (1601-1665) et à Blaise Pascal (1623-1662). On connaît (1) le rôle qu'elle joue dans le calcul des probabilités : elle a une importance primordiale dans l'interprétation des mesures de laboratoire et dans toutes les théories de la physique ; elle intervient aussi dans toutes les statistiques, qui concernent les êtres vivants et la vie sociale. Gottfried-Wilhelm Leibniz (1646-1716) a pu même dire que « les lois de la pensée sont une question d'analyse combinatoire ».

Nous commençons à comprendre la valeur et le sens du nombre naturel, fort bien précisés par Ferdinand Gonseth : « Dans sa signification primitive et dans son rôle intuitif, le nombre est une qualité *physique*, permettant de définir et de distinguer les ensembles d'objets. »

13. Zéro (ou rien). — Jusqu'ici, o était un signe (§ 2), un chiffre entrant dans la composition de certains nombres, mais que nous n'avons pas employé *tout seul*. Grâce à des extensions *logiques* des idées précédentes, nous allons rechercher les propriétés que nous devons attribuer à zéro, considéré comme un nombre (2) :

1° Zéro se présente dans le recensement de certains ensembles appelés « ensembles nuls ». Par exemple, à la question : « Combien y a-t-il de gens non décorés, dans ce conseil d'administration ? », la réponse est « zéro » ;

2° Zéro fait également son apparition dans la soustraction, par exemple, dans le cas :

$$17 - (9 + 8);$$

---

(1) Nous en avons donné une idée dans *la Chance et les jeux de hasard.*

(2) Cette généralisation est de date relativement récente ; elle était étrangère aux conceptions (1484) du grand mathématicien Nicolas Chuquet. Le signe o a été vraisemblablement emprunté à la première lettre du mot grec *ouden*, qui signifiait : *rien.*

on écrira tout naturellement (1) :

$$17 - (9 + 8) = 0.$$

Parallèlement, on a :

$$5 + 0 = 0 + 5 = 5;$$

3° En appliquant les règles de la multiplication au nombre zéro, on est conduit à poser :

$$4 \times 0 = 0,$$

(quatre fois rien égale rien). Puis, en sauvegardant la commutativité de *toutes* les multiplications (des nombres naturels) :

$$0 \times 4 = 0,$$

(zéro fois quatre égale rien);

4° Avec les factorielles, on est obligé de donner un sens à l'expression « 0! », qui, au premier abord, *n'a aucune signification.* Le résultat est, pour le moins, étonnant :

$$0! = 1;$$

sans cette *convention*, les calculs de factorielles ne pourraient être menés à bien (2);

5° Pour les puissances, il faut distinguer deux cas :

a) Zéro élevé à la puissance 7 est égal à zéro (aucune difficulté) :

$$0^7 = 0;$$

nous admettrons également :

$$\sqrt[7]{0} = 0;$$

b) Mais que veut dire 3 à la puissance zéro? Il suffit, pour cela, de nous rappeler l'égalité (§ **10**) :

$$3^7 : 3^2 = 3^{(7-2)} = 3^5$$

et de la transposer :

$$3^7 : 3^7 = 3^{(7-7)} = 3^0,$$

ce qui nous donne immédiatement (3) :

$$3^0 = 1;$$

6° Il se présente de grosses difficultés, quand le nombre 0 intervient dans une division. Sans doute n'a-t-on guère de peine à admettre l'égalité :

---

(1) Le cas :

$$17 - (9 + 10)$$

est plus complexe et sera traité au Chapitre II (§ **16**).

(2) Ainsi, à la **note B**, il serait impossible de passer de la première expression (arrangements) à la seconde (permutations), qui est un cas particulier de la première.

(3) Au contraire, $\sqrt[0]{3}$ n'est pas précisé en ce moment; sa valeur est la même que celle de 8 : 0 (§ **23**).

$$0 : 8 = 0;$$

mais on ne voit pas de prime abord la signification à attribuer au quotient : $8 : 0$.

Dès le XII[e] siècle, l'arithméticien hindou Bhaskara avait des idées nettes sur ces « règles du zéro »; mais cette question doit être renvoyée plus loin (§ **20**).

Nous venons, dans ce Chapitre, de faire connaissance avec les propriétés les plus élémentaires des *nombres naturels*, c'est-à-dire des nombres entiers, auxquels nous avons adjoint le nombre zéro (1). Mais il existe bien d'autres catégories de nombres : les nombres réels (auxquels le Chapitre II est consacré), les nombres d'ordre supérieur (§ **30**, à la fin de ce même Chapitre) et les nombres complexes (§ **71**).

14. Les nombres et la magie. — Nous ne pouvons quitter les nombres naturels sans faire allusion aux absurdités, dont ils ont été le prétexte, depuis les premiers balbutiements de la pensée humaine, et dont ils sont encore le prétexte auprès des ignorants.

Pour le premier venu, chaque nombre possède des propriétés occultes, favorables ou défavorables : nombres impairs, nombres amis, etc. (2).

---

(1) La théorie moderne des nombres naturels a acquis, surtout sous l'impulsion de l'Italien Giuseppe Peano (né en 1858), une rigueur inébranlable, liée à l'affirmation de cinq « axiomes », à la fois nécessaires et suffisants :

1° Zéro est un nombre naturel;

2° Zéro n'est le suivant d'aucun nombre naturel;

3° Tout nombre naturel a un suivant (Henri Poincaré), et ce suivant est également un nombre naturel;

4° Deux nombres naturels sont égaux, si leurs suivants respectifs le sont;

5° Lorsqu'une propriété est vraie pour le nombre *un*, et si l'on établit qu'elle est vraie pour le nombre $(n+1)$ pourvu qu'elle le soit pour le nombre n, cette propriété est vraie pour tous les nombres naturels (propriété « héréditaire »; G. Frege, Bertrand Russell). Cette proposition, à laquelle Poincaré attachait à juste titre une importance fondamentale, s'appelle « le principe d'induction complète » : elle est à la base de ce que l'on nomme *le raisonnement par récurrence*, dont l'essentiel était déjà compris par Blaise Pascal.

(2) L'illustre mathématicien anglais Bertrand Russell a déploré que, par son empreinte intellectuelle, « Aristote ait été l'un des plus grands fléaux de la race humaine ». De leur côté, Éric-Temple Bell et Lancelot Hogben sont d'accord pour dénoncer l'influence déplorable de Platon (§ **92**) : il fut le point de départ des « sombres superstitions » et des « fantastiques puérilités », à une époque où la véritable élite attribuait la même valeur aux deux phrases : « 13 est un nombre premier; 13 est un nombre néfaste. » N'y a-t-il pas, à l'heure actuelle, deux clans, parmi les anciens polytechniciens et parmi les membres de l'Académie des sciences (sans parler des indécis), au sujet de la radiesthésie, « science universelle de grand avenir » (!) ou délire collectif d'interprétation? La question est traitée dans *les Deux Infinis*, 3[e] édition (pp. 71-72) et reprise dans mon nouvel ouvrage sur les *Sciences captivantes*. Comme l'écrit (1937) le savant tchèque Léon Chwistek, « la principale cause de la niaiserie de certaines de nos doctrines actuelles est l'absence d'esprit critique venue de la métaphysique idéaliste des Anciens ».

Il nous suffira de dire quelques mots du nombre *dix* (§ **60**). Pour Nicomaque, le père d'Aristote, qui vivait au v^e siècle avant notre ère, « le nombre *dix* est le plus parfait de tous : il y a dix types de relations, dix types de catégories. C'est en accord avec cette idée (!) que sont établies les divisions et les formes des extrémités de nos mains et de nos pieds ». Le siècle d'après, Speusippe déclare : « *Dix* est parfait; c'est à juste titre et conformément à la nature que, sans préméditation aucune (*sic*), nous nous rencontrons avec les hommes de tous les pays pour compter suivant ce nombre. » Cette assertion n'a aucune valeur : le nombre *douze* est infiniment plus « parfait » que le nombre *dix* (§ **60**), car il a six diviseurs, au lieu de quatre... C'est un mysticisme puéril que d'ériger en « harmonie préétablie » un simple hasard de l'évolution qui nous a dotés de dix doigts et de dix doigts de pieds; c'est répéter avec Joseph Prudhomme : « Admire, mon fils, la prudence divine, qui fit passer les fleuves juste au milieu des villes. »

A ce propos, Tobias Dantzig oppose, fort pertinemment, le vulgaire bon sens à l'esprit scientifique : « La fascination spéciale, que les nombres *pris individuellement* ont exercée sur les hommes depuis un temps immémorial, a été l'obstacle principal à l'édification d'une théorie générale, c'est-à-dire d'une arithmétique; tout comme l'intérêt concret, qui s'est spontanément attaché aux étoiles particulières, a longtemps retardé la naissance de l'astronomie. »

« Dans les sociétés dites civilisées, écrit de son côté le sociologue Achille Ouy, non seulement la mentalité primitive vit et prospère parallèlement à la mentalité scientifique, mais elle risque même, par instants, d'étouffer celle-ci. Bon nombre d'*adultes blancs et civilisés* demeurent indéfiniment — et inconsciemment — dans un état d'esprit, qui ne dépasse guère la mentalité primitive ou infantile. Le divorce devient de plus en plus visible entre l'opinion vulgaire et la connaissance scientifique. » Et ce divorce, c'est, à proprement parler, le retour à la barbarie.

La numérologie (recueil des superstitions relatives aux propriétés magiques des nombres) rejoint ainsi les insanités sur le hasard, ainsi que les croyances aux phénomènes supranormaux (télépathie, télékinésie, divinations radiesthésiques et astrologiques, etc.), dont nous avons parlé dans nos précédents ouvrages.

Chapitre II.

LES NOMBRES RÉELS

15. Discussion de la possibilité des opérations inverses. — Jusqu'ici, nous ne nous sommes occupés que des nombres naturels. Il est temps d'établir une distinction fondamentale entre les opérations directes et les opérations inverses (§ **10**), portant les unes et les autres sur des nombres naturels.

Les opérations directes — c'est-à-dire l'addition et ses deux généralisations successives (la multiplication et l'exponentiation) — sont *toujours possibles,* parce qu'elles ne sont, au fond, que des successions de répétitions.

Il n'en est pas de même pour les opérations inverses.

Cette affirmation ne nous apprend rien, au moins dans un cas : chacun sait qu'il est impossible de diviser 3 par 2; plus exactement, le mot « impossible » signifie que l'on n'obtient pas, comme résultat, un nombre naturel, et, jusqu'ici, nous ne connaissons que des nombres naturels.

Mais les mathématiciens ne se sont pas laissé décourager par cette difficulté. A chaque fois, pour la soustraction (§ **16**), pour la division (§ **18**) et pour l'extraction des racines (§ **22**), ils ont décidé de *passer outre,* en « prolongeant », *par des conventions logiques* (1), ce que la seule considération des nombres naturels pouvait avoir d'insuffisant et, pour tout dire, de simpliste.

Chaque difficulté vaincue a permis d'inaugurer un nouveau chapitre de la science : les nombres négatifs (idée maîtresse de l'algèbre), les nombres fractionnaires et les nombres incommensurables (1). Ces nombres ne sont *en aucune manière* des fictions :

(1) Les fractions et les nombres décimaux constituent (§ **18**) une de ces conventions logiques, dont personne ne conteste ni le bien fondé, ni l'utilité. Les deux autres conventions — encore que moins connues — sont tout aussi fécondes.

ce sont tous des solutions de *problèmes concrets ;* ils résultent d'un lent et pénible effort d'adaptation.

16. Les soustractions impossibles. — A l'inverse de l'addition, la soustraction :

$$11 - 6 = 5$$

ne possède pas la propriété de commutativité (§ **4**, 2°) : à la place de (11 — 6), on n'a pas le droit d'écrire (6 — 11).

A première vue, (6 — 11) est une opération dénuée de signification : quand il n'y a que six œufs dans une corbeille, on ne peut en extraire onze...

Mais il existe d'autres problèmes, où (6 — 11) peut prendre une signification parfaitement claire, comme Nicolas Chuquet (1484), puis Michel Stifel (1545) ont été les premiers à s'en rendre compte. Reprenons rapidement quelques exemples :

1° Le thermomètre marquait hier soir 6°; pendant la nuit, il baisse de 11°; on convient de dire qu'il est ce matin à 5° au-dessous de zéro ou, pour abréger, à — 5°. On dit que — 5 est un *nombre négatif ;* 4, ou encore + 4, est un nombre positif (1);

2° Un point au-dessous du niveau de la mer a une altitude négative;

3° Un homme sans aucune fortune, mais qui ne doit rien, n'est pas riche; mais si, dépourvu de fortune, il a des dettes, on peut dire qu'il a moins que rien, que sa fortune est négative. Les premiers mathématiciens hindous appelaient une grandeur positive « un bien » et une grandeur négative « une dette »;

4° Un bouchon de liège a un certain poids; lâché dans l'air, il tombe; si on le plonge dans l'eau et qu'on le lâche, il remonte vers la surface; son poids apparent est devenu négatif.

Les nombres qualifiés s'adaptent, d'une façon simple, aux propriétés qui comportent deux sens opposés, deux modes opposés : droite et gauche, devant et derrière, haut et bas, avant et après (passé et avenir), chaud et froid, crédit et débit, bornes d'un accumulateur, pôles d'un aimant, etc. L'introduction des nombres qualifiés constitue le passage de l'arithmétique à l'*algèbre.*

---

(1) L'ensemble des nombres positifs et des nombres négatifs s'appelle parfois « les nombres qualifiés ». Expression à retenir : 5 est appelé la valeur arithmétique ou « la valeur absolue » de — 5.

Traçons une ligne droite horizontale, très longue, et choisissons, vers le milieu, un point, que nous marquerons zéro. Puis divisons les deux demi-droites en centimètres. Nous noterons :

vers la droite : $+1, \quad +2, \quad +3, \quad \ldots\ldots$
vers la gauche : $-1, \quad -2, \quad -3, \quad \ldots\ldots$

A chaque nombre naturel (positif) correspond ainsi un nombre négatif (1). Le nombre zéro n'est ni positif, ni négatif. Il est bien certain que, sans le nombre zéro (§ **13**), jamais on n'aurait connu de nombre négatif, et notre technique serait restée dans l'enfance……

17. Multiplication des nombres qualifiés. — On doit s'arranger pour que les propriétés de la multiplication des nombres naturels (§ **5**) se retrouvent, quand l'un des facteurs (ou les deux facteurs) sont des nombres qualifiés.

C'est en avançant de proche en proche que nous épuiserons tous les cas possibles.

1° Les deux facteurs sont positifs (cas connu) :

$$3 \times 7 = 21$$

ou, en spécifiant les signes :

$$(+3) \times (+7) = +21;$$

2° Quel sens donner à l'opération : trois fois (-7)? Cela revient à porter trois fois la longueur 7 vers la gauche; donc :

$$(+3) \times (-7) = -21.$$

3° Pour conserver la propriété de commutativité, il faut écrire :

$$(-3) \times (+7) = -21,$$

ce qui donne une signification à « moins trois fois » : on multiplie par trois et on inverse le signe de ce que l'on prend « moins trois fois »; le signe « moins » devient ainsi un opérateur;

4° Le quatrième cas résulte immédiatement de la remarque précédente :

$$(-3) \times (-7) = +21.$$

Avec ces conventions logiques, la multiplication se trouve

(1) La remarque est d'importance (§§ **70** et suivants) : pour passer de $+1$ à -1, il faut faire subir à la longueur $+1$ une rotation d'un demi-tour autour de l' « origine » (point marqué *zéro*).

étendue aux nombres qualifiés, dont l'étude constitue une partie de l'algèbre (1).

Les mêmes « règles de signe » sont valables pour la division.

Ajoutons une remarque bien connue, qui n'en a pas moins une grande importance. Comme le nombre $+4$ peut aussi bien s'obtenir :

par $(+2) \times (+2)$ que par $(-2) \times (-2)$,

on en déduit que les nombres positifs ont *deux* racines carrées :

$$\sqrt{4} = \pm 2;$$

au contraire, les nombres négatifs *n'ont pas* de racine carrée; nous reviendrons plus tard (2) sur ce point.

18. Les divisions impossibles. — Définie initialement comme l'opération inverse de la multiplication (§ **10**, 2°), la division donne alors un résultat exact : si l'on veut partager le contenu de 21 bouteilles de vin entre 7 personnes, chacune d'elles recevra le contenu de 3 bouteilles.

Si le nombre des personnes est 5, ou 6, ou 8, ou 9, la division exacte est, strictement parlant, *impossible :* il n'y a pas de nombres entiers qui puissent exprimer le résultat du partage. Mais cette question est tellement connue que tout le monde entrevoit la solution; bien plus, il faudrait plutôt insister sur ce fait qu'il n'y a là rien d'évident et que l'on ne peut « s'en tirer » qu'en *généralisant* (dans un autre sens) la notion primitive de *nombre naturel* (3). Il suffit, par ailleurs, de dresser le tableau qui figure à la page suivante (4).

Le dividende (ici : 21) s'appelle *numérateur;* le diviseur (5 ou 6 ou ...) est le *dénominateur*. Celui-ci est l'indice de fractionnement; le numérateur établit le compte des parties fractionnaires (Nicolas Oresme, 1323-1382). On voit immédiatement qu'un nombre naturel n'est pas autre chose qu'une fraction ordinaire, dont le dénominateur est égal à *un*.

(1) On peut énoncer les quatre règles comme suit :
$+$ par $+$ donne $+$ (les amis de nos amis sont nos amis);
$-$ par $+$ donne $-$ (les ennemis de nos amis sont nos ennemis);
$+$ par $-$ donne $-$ (les amis de nos ennemis sont nos ennemis);
$-$ par $-$ donne $+$ (les ennemis de nos ennemis sont nos amis).
Ce n'est pas là seulement une règle mnémotechnique, mais une transposition de l'algèbre à la logique, (voir la **note L**, p. 276, c'est-à-dire une proposition de *logistique* (§ **118**).

(2) Voir la **note S** (pp. 279-280).

(3) Cette généralisation est, en tous points, comparable à celle du § **16** (nombres négatifs) et à celle du § **22** (nombres incommensurables). Les fractions ont été étudiées par les Égyptiens, il y a trois mille ans.

(4) Le dernier nombre décimal doit être complété par une suite indéfinie de chiffres 3.

DIVISIONS	FRACTIONS ORDINAIRES	NOMBRES DÉCIMAUX
21 : 5	$\frac{21}{5}$	4,2
21 : 6	$\frac{21}{6}$	3,5
21 : 8	$\frac{21}{8}$	2,625
21 : 9	$\frac{21}{9}$	2,33333333333...

L'emploi des fractions, sinon leur maniement, étant devenu familier à tous, personne n'admire plus cette audace peu commune, par laquelle on appela *nombre* l'ensemble de *deux* nombres rangés dans un ordre fixe (§ **71**).

L'emploi des sous-multiples des unités permet de remplacer *certaines* fractions par des nombres naturels. Ainsi, en supposant la contenance de chaque bouteille égale à 1 litre (exactement), les personnes, dont il vient d'être question, recevraient respectivement :

420 cl, 350 cl, 262 cl 1/2, 233 cl 1/3.

C'est notre compatriote François Viète (1540-1603) qui imagina (1579) les nombres décimaux; puis, peu après (1585), l'ingénieur belge Simon Stevin (1548-1620), le fondateur de l'hydrostatique, proposa l'emploi systématique de la *virgule* (1), découverte comparable à l'invention du zéro (§ **2**).

19. Nombres comptables et nombres métriques. — Nous apercevons, pour la première fois, avec netteté, la différence essentielle qui sépare un nombre *comptable* d'un nombre *métrique* : ce troupeau se compose de 32 moutons (nombre comptable), cette règle a 32 centimètres (nombre métrique). Le comptage est une partie essentielle de notre équipement mental. Cependant, les nombres ne servent pas seulement à évaluer des ensembles, à recenser des objets isolés (Chapitre Ier),

(1) Le Niçois Pelazzi avait introduit la *virgule* vers 1492, mais ses travaux ont vraisemblablement échappé à Viète et à Stevin.

à les numéroter (§ **20**), mais à les mesurer, à mesurer leurs diverses propriétés. Au lieu de comparer deux objets « au jugé », on peut les morceler ou, tout au moins, les supposer divisés en parties équivalentes à un objet de même espèce, choisi comme étalon et, par là, les transformer en ensembles (ensembles de cm, de cl, ...), dont il ne reste plus alors qu'à compter les termes. « Mesurer une grandeur, écrit Edmond Bauer (1939), cela consiste à décomposer une certaine expérience (concernant cette grandeur) en expériences-étalons, toutes égales entre elles (c'est-à-dire invariantes) et compter leur nombre. » La suite des nombres naturels, qui était primitivement appliquée aux seuls recensements, est ainsi devenue une *échelle de repères*, adaptée à tous les usages. La métrologie (science des mesures) se présente ainsi comme une extension de la statistique (science des dénombrements). Nous rencontrons ici, au passage, la base de toutes les connaissances rigoureuses et de toutes les techniques perfectionnées. Mais il fallut, à l'humanité, de nombreux siècles pour qu'elle parvînt à discerner les différents services que les nombres pouvaient nous rendre.

Signalons incidemment une application des fractions décimales à la mesure *précise* des longueurs. Le long d'une règle principale (*fig.* 6), divisée en millimètres, peut coulisser une réglette d'une longueur totale de 9 millimètres et divisée en dix parties égales. Chaque division de la réglette vaut par suite 0 mm 9. La figure 7 représente la mesure d'un objet. dont la longueur est comprise entre 7 millimètres et 8 millimètres. On voit, d'autre part, que c'est la division 4 de la réglette qui coïncide avec une division de la règle : un instant de réflexion montre que la longueur cherchée est égale à 7 mm 4. Tel est le principe du *vernier* rectiligne au dixième.

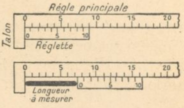


FIG. 6 et 7. — Principe du vernier rectiligne au dixième.

20. Les inverses ; première idée de l'infini. — On appelle « inverse » (1) d'un nombre naturel le résultat que l'on obtient

(1) On dit aussi : « réciproque » d'un nombre naturel.

en divisant le nombre 1 par le nombre naturel considéré (1).

La figure 8 donne les valeurs des inverses des dix premiers nombres naturels. On trouve, dans tous les formulaires, des tables donnant (2) les inverses des mille premiers nombres naturels, dont l'usage se comprend immédiatement : au lieu de diviser un nombre par 749 (par exemple), il est souvent plus expéditif de multiplier ce nombre par l'inverse 0,00133511 (trouvé dans la table) de 749 (3).

NOMBRES	INVERSES		VALEURS (en nombres décimaux)
1	$\frac{1}{1}$	=	1
2	$\frac{1}{2}$	=	0,5
3	$\frac{1}{3}$	=	0,333333333333......
4	$\frac{1}{4}$	=	0,25
5	$\frac{1}{5}$	=	0,2
6	$\frac{1}{6}$	=	0,166666666666......
7	$\frac{1}{7}$	=	0,142857142857......
8	$\frac{1}{8}$	=	0,125
9	$\frac{1}{9}$	=	0,111111111111......
10	$\frac{1}{10}$	=	0,1

FIG. 8. — Valeur des inverses des dix premiers nombres naturels.

(La représentation graphique est donnée par la figure 99).

Les inverses (ou réciproques) des nombres naturels se désignent, comme on sait, par le suffixe *ième* : un cinquième, un septième, un 749ième.

Le même suffixe s'emploie également dans le « numérotage » pour désigner un nombre ordinal (ou numéro) : le troisième enfant de cette famille de cinq enfants (troisième = nombre ordinal; cinq = nombre cardinal). Ce double emploi de « ième » ne risque guère de provoquer des confusions.

Si nous jetons un nouveau coup d'œil sur la figure 8, nous constatons — expérimentalement, pour ainsi dire — que plus un nombre est grand, plus son inverse est petit.

(1) Les anciens Égyptiens raisonnaient exclusivement sur les fractions dont le numérateur est égal à l'unité.

(2) Avec six chiffres exacts.

(3) Ces tables contiennent également (pour les 1 000 premiers nombres naturels) : les carrés, les cubes, les racines carrées, les racines cubiques, les longueurs de circonférence et les surfaces de cercle.

Et réciproquement.

Ainsi, écrivons les nombres :

0,1 0,01 0,001 0,0001 0,00001 ......

les inverses correspondants sont :

10 100 1 000 10 000 100 000 ......

L'inverse d'un milliardième est un milliard :

$$\frac{1}{0{,}000000001} = 1\ 000\ 000\ 000$$

et ainsi de suite. Le résultat est d'autant plus grand que le nombre, dont on prend l'inverse, est plus petit. *A la limite,* on concevra que, si on pouvait calculer l'inverse du nombre zéro, on obtiendrait un nombre plus grand que n'importe quel nombre indiqué d'avance (1) ou, comme on dit brièvement, un nombre infini, ce que l'on représente, depuis Wallis (1655), par un huit couché (∞), de telle sorte que l'on écrit symboliquement (2) :

$$\frac{1}{0} = \infty.$$

On a, réciproquement :

$$\frac{1}{\infty} = 0,$$

et il n'y a là aucun mystère : c'est tout simplement la traduction de faits d'expérience quotidienne, comme celui-ci : la longueur apparente d'une règle devient infiniment petite, quand on l'éloigne indéfiniment de l'œil qui l'observe (3)... « Pour un cerveau normalement constitué, écrit Karl Pearson, l'infini ne peut être jugé et utilisé qu'en fonction du nombre des phénomènes qu'il nous permet de classer, de décrire et de prédire. Il n'a donc rien de commun avec ce que l'on suppose en théologie naturelle et en métaphysique » (§ **112**, début, note).

21. Les fractions comprises entre zéro et un. — La figure 8 nous donne des indications sur les nombres décimaux, dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1.

(1) Plus grand que le nombre dont il a été question au § **7**.

(2) Le quotient :

$$8 : 0$$

que nous avons rencontré au § **13**, est également infini. Quant au symbole :

$$0 : 0$$

il n'apparaîtra que beaucoup plus tard (§ **75**).

(3) Dès 1882, le philosophe Hippolyte Taine rappelait que l'idée d'infini résulte de l'analyse de notions acquises par l'expérience.

On peut d'ailleurs, tout aussi bien, exprimer ces nombres en *pourcentages*, qui varient alors entre 0 % et 100 %.

Ces nombres ont une importance telle qu'ils interviennent dans les branches les plus disparates de l'activité humaine. Il est vraiment regrettable que des considérations, du genre de celles que nous allons examiner à titre d'exemples, ne forment pas *le fond* des idées mathématiques que l'on devrait inculquer à la jeunesse (enseignements primaire et secondaire) : les mathématiques ne donneraient plus l'impression d'un passe-temps de maniaques, n'ayant aucun rapport avec la vie et susceptible de décourager les meilleures volontés.

Voici les exemples annoncés :

1° *Titre d'un mélange homogène*, par exemple des solutions d'eau distillée et d'alcool pur. On appelle « titre » le rapport (1) de la masse d'un des constituants à la masse totale du mélange : le titre de l'alcool varie entre 0 (0 %)—eau pure—et 1 (100 %) — alcool pur ;

2° *Rendements*. Le rendement d'un moteur (par exemple) n'est pas autre chose que le rapport de l'énergie utile à l'énergie totale dépensée. Les machines à vapeur ont un rendement de l'ordre de 0,1 (10 %) d'après le principe de Carnot; les moteurs à explosion, de l'ordre de 0,3 (30 %) pour la même raison. Les génératrices et moteurs électriques ont un rendement variant entre 0,75 (75 %) pour les petites puissances et 0,97 (97 %) pour les grandes;

3° *Déclivités*. Pour bien préciser cette question dans l'esprit du lecteur non mathématicien, nous distinguerons soigneusement la « pente » (§ **49**) d'un plan incliné et sa « déclivité ». Lorsqu'une route est telle qu'après avoir parcouru un mètre (sur cette route), l'altitude s'est abaissée de 10 centimètres, nous dirons que la déclivité est 0,1 (10 %). Une route horizontale a donc une déclivité nulle (0 %). Comme exemples de déclivité égale à 1 (100 %), nous pouvons citer le mât de cocagne ou l'ascenseur (2);

---

(1) Il convient d'employer le mot *rapport*, quand il s'agit de division de deux grandeurs de même espèce (ici : deux masses). Il vaut mieux se servir du mot *quotient* dans le cas contraire (la vitesse d'un train est le quotient de la distance parcourue par le temps employé à la parcourir).

(2) La déclivité est mesurée par le « sinus trigonométrique » (§ **50**) de l'angle que fait le plan incliné avec l'horizontale. La pente est, au contraire, la « tangente trigonométrique » (§ **50**) de cet angle : la pente ne varie pas entre 0 et 1, mais entre 0 et ∞. Ce sont là deux notations différentes d'un même dispositif.

4° *Gamme*. Tout le monde connaît les sept notes de la gamme. Sans entrer dans aucun détail, nous nous contenterons de rappeler que c'est Pythagore (586-500) qui inaugura l'étude des cordes vibrantes et introduisit le calcul dans un problème d'acoustique. Pour la gamme diatonique majeure, la hauteur des sons est représentée par les nombres :

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
1	$1+\frac{1}{8}$	$1+\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{3}$	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{2}{3}$	$1+\frac{7}{8}$	$1+1$

Deux notes sont « à l'octave » l'une de l'autre, lorsque leurs fréquences (mesurées en *cycles* ou nombres de vibrations par seconde) sont dans le rapport de deux à un (1);

5° Une *probabilité* varie également entre 0 et 1 (entre 0 % et 100 %). La première limite est l'impossibilité, la seconde est la certitude (2);

6° Il existe une autre grandeur, fort importante, qui intervient dans toutes les statistiques des faits biologiques ou des faits sociaux. C'est le *coefficient de corrélation* (3) : il est égal à 0, quand deux phénomènes sont indépendants (non-influences de la forme du crâne, du poids du cerveau ou de la couleur des cheveux sur l'intelligence d'un homme; non-influence de la position apparente des astres sur la longévité d'un nouveau-né et, en général, « toutes les vaines fictions et légendes de l'esprit humain non éduqué »); il atteint la valeur 1, lorsque deux phénomènes obéissent à une loi précise (expression de la longueur d'une circonférence en fonction de son diamètre). Entre ces valeurs, zéro et un, le coefficient peut prendre une valeur quelconque (4); chaque valeur mesure l'écart à partir de l'indépendance, elle nous apprend de combien le lien entre les phénomènes considérés se rapproche d'une relation rigoureuse, comme celles qui font l'objet des sciences exactes. La vieille notion de *cause* ne peut plus satisfaire que des cerveaux enfan-

(1) Voir *Qu'est-ce que?...* (4e édition, p. 176 et suivantes).
(2) Voir *la Chance et les jeux de hasard* (2e édition, p. 13).
(3) Cette question délicate a été très clairement vulgarisée par le mathématicien anglais Karl Pearson, aux pages 109 et suivantes de *la Grammaire de la science* (1892; traduction Lucien March, 1912). « Une table de corrélation remplace le syllogisme stérile de la vieille logique d'Aristote » (§ **116**).
(4) Exemples empruntés à la biométrie humaine :
Entre le fémur droit et le fémur gauche, le coefficient de corrélation est 0,96.
Entre la taille d'un sujet et la longueur de son avant-bras, ce coefficient est seulement 0,37.

tins ou attardés dans le passé (1) : elle est remplacée par l'idée féconde et objective de « variables plus ou moins corrélatives » : une fois de plus, la rigueur de la quantité se substitue aux imprécisions de la qualité. Comme dit Émile Borel (1939), « la qualité se ramène à la quantité, dès qu'on veut bien regarder les phénomènes d'un peu près ».

Les quelques exemples, qui précèdent, nous font pressentir l'importance exceptionnelle des fractions comprises entre zéro et un. Mais nous restons encore en deçà de leurs possibilités, puisque toute grandeur variant entre zéro et l'infini (2) peut être remplacée, grâce à une substitution adéquate (§ **91**, note et **note AM**) par une autre grandeur, comprise entre zéro et l'unité.

22. Les extractions impossibles de racines. — Dernière de nos opérations inverses : l'extraction des racines.

Pour simplifier, nous nous occuperons de la racine carrée, qui comporte, comme exemples les plus simples :

$$1^2 = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \sqrt{1} = 1,$$
$$2^2 = 4, \qquad \text{d'où} \qquad \sqrt{4} = 2;$$

immédiatement, on tiendra à savoir ce que veulent dire les opérations « impossibles » : $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Le problème est analogue à celui qui se pose à propos de la division; l'extraction des racines (carrées) est une opération dont tout le monde a entendu parler, mais sur les détails de laquelle il n'y a aucun intérêt à insister ici. On obtient finalement :

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135624\ldots\ldots,$$
$$\sqrt{3} = 1{,}7320508076\ldots\ldots;$$

en vérifiant sur ces nombres « incomplets », on trouve :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2{,}0000000007609869376$$
$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3{,}0000000010781221776,$$

(1) Le « principe » de *causalité* n'est « nullement un énoncé portant sur un ensemble de phénomènes naturels; c'est plutôt une règle pratique, à l'usage de la vie de tous les jours » (Philipp Frank). On a également beaucoup parlé d'un prétendu « principe » de *finalité*, dans le sens d'une détermination du présent par l'avenir; or, il n'y a pas d'autre finalité que la *finalité intentionnelle*, qui ne peut se concevoir que chez des êtres doués d'un système nerveux très développé et qui s'explique parfaitement par le mécanisme de l'imagination (§ **114**).

(2) Ou même variant entre $-\infty$ et $+\infty$ (voir **note Y**, fin, et **note AM**, courbe en S).

Livres pour la jeunesse

Albums en couleurs (6 à 10 ans), illustrés par J. Hémard, Gérard Cochet, M.-M. Franc-Nohain, Malo-Renault, etc. *Deux séries :*

Première Série : *Contes de Perrault* (2 albums). — *Aventures du baron de Crac.* — *Le Cheval enchanté.* — *Le Renard nigaud.* — *Les Aventures de Frère Lapin.* — *Les plus belles Chansons de France.* — *Nouvelles Chansons.* — *Rémi en vacances.*

Seconde Série : *Alphabet en images.* — *Les Aventures de Pierrette.* — *Chansons bleues et roses.* — *La Vie des bêtes.* — *Tom et Tim.* — *Le Miroir magique.* — *Histoires enfantines.* — *Animaux domestiques et familiers.* — *Les Animaux sauvages.* — *Annick et sa fée.* — *La Fête foraine.* — *Histoires parisiennes.* — *Quelques Fables de La Fontaine.*

Les Livres roses pour la jeunesse. Pour les enfants de six à treize ans : contes, légendes, récits de la vie moderne, illustrés en couleurs. Près de 300 brochures, contenant chacune une histoire complète. (*Demander la liste détaillée.*)

Les *Livres roses* se vendent également en volumes reliés. Chaque volume contient huit récits complets, sous cartonnage artistiquement décoré.

Livres bleus illustrés. Les plus beaux récits de tous les pays et de tous les temps. *Dix-sept volumes* (18 × 25), illustrés d'artistiques dessins, riche reliure bleu et or :

Le Marchand de Bagdad. — *Le Roi des gnomes.* — *Le Château imaginaire.* — *Le Tapis enchanté.* — *La Conquête de la Toison d'or.* — *Le Géant aux cheveux d'or.* — *Voyage de Gulliver à Lilliput.* — *Le Coucou et l'Arbre de joie.* — *Contes régionaux.* — *Histoires d'animaux.* — *Les Écoliers des autres pays.* — *Contes du Maroc.* — *Inventions et Découvertes.* — *Voyages et Explorations.* — *Cinq grands savants.* — *Récits et légendes d'Angleterre.* — *Cinq grands inventeurs.*

Contes et Gestes héroïques. Les grandes œuvres de la littérature universelle, traditions et légendes. *Vingt-quatre vol.* (15 × 20), illustrés en noir et en couleurs :

Récits des temps bibliques (2 vol.). — *La Guerre de Troie* (*Iliade*). — *Le Retour d'Ulysse* (d'après l'*Odyssée*). — *La Légende d'Hercule.* — *Contes de la Louve.* (2 vol). — *Autour de l'Énéide.* — *Vercingétorix.* — *Roland, le vaillant paladin.* — *Les Infortunes d'Ogier le Danois.* — *Les Aventures de Huon de Bordeaux.* — *Flore et Blanchefleur.* — *Les Croisades.* — *Jeanne, la bonne Lorraine.* — *Bertrand Du Guesclin.* — *Les Infants de Lara.* — *Le Cid Campeador.* — *Guillaume le Conquérant.* — *Macbeth.* — *Rabelais,* en trois volumes. — *Le Conquérant du Mississipi.*

Initiation aux mots croisés, par R. Dontot et R. Touren. L'art de réussir les mots croisés enseigné en seize leçons et vingt-cinq exercices. Un volume (13 × 20). Cartonné.

A quoi jouons-nous ? 100 jeux variés, 22 gravures. Un volume, cartonnage artistique ou reliure toile, fers dorés.

Théâtre et Monologues pour la jeunesse. Un choix de pièces variées attrayantes, faciles à jouer. (*Demander la liste détaillée.*)

EN VENTE CHEZ TOUS LES LIBRAIRES

Imp. Larousse, 1 à 9, rue d'Arcueil, Montrouge (Seine). — R. C. Seine 84.426. — 694-4-41.