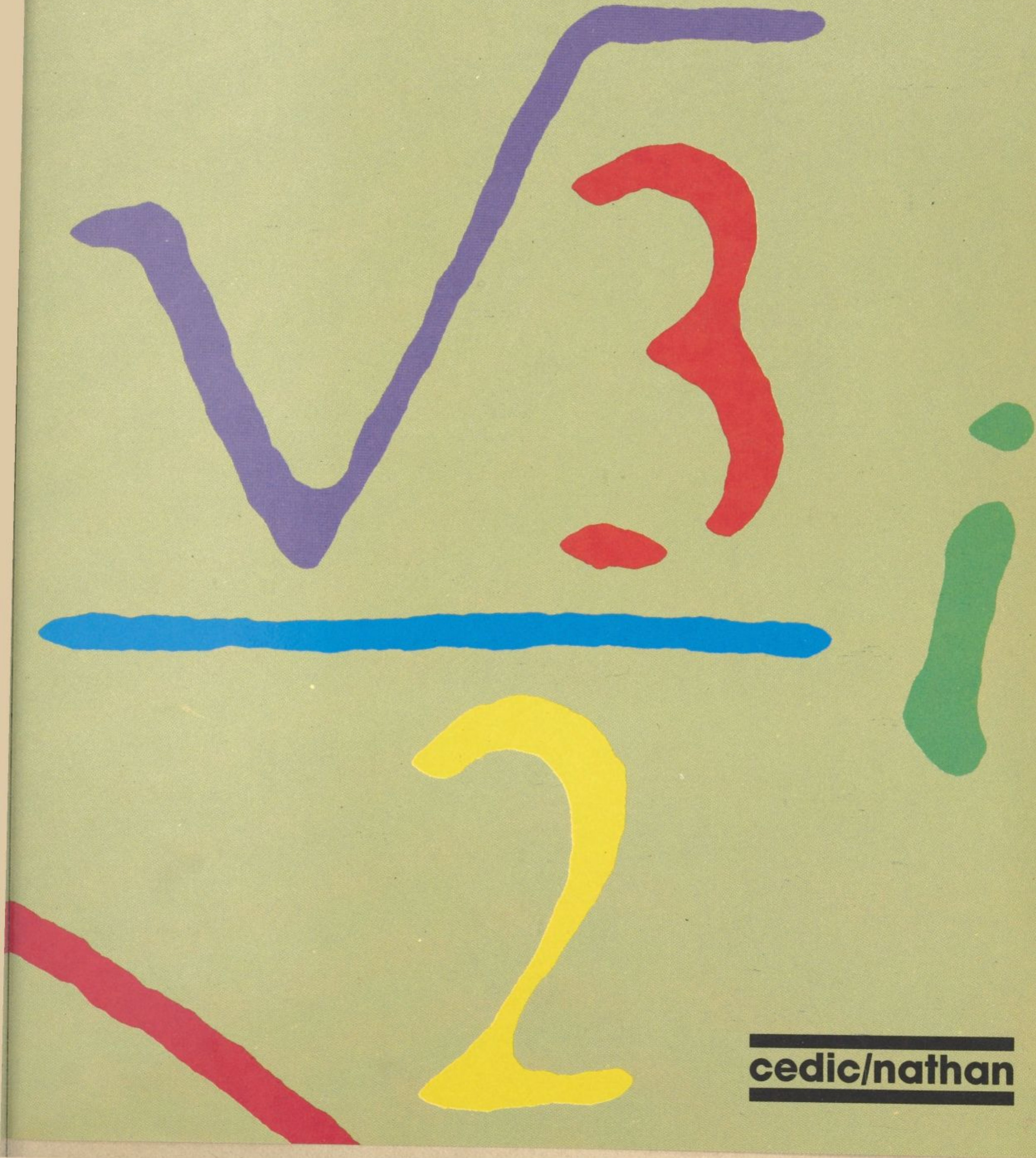
DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

LE DIRE ET LE FAIRE



cedic/nathan

DIDACTIQUE
DES MATHEMATIQUES
LE DIRE ET LE FAIRE

ont collaboré à cet ouvrage :

Claude Bapst, Benyounès Bemmouna, André Boileau, Claudine Bouvier, Nérée Bujold, Jean-Louis Chabert, Gisèle Chapiron, Christine Charretton, Jean-Louis et Josette Coulon, Michel Darche, Louis Duvert, Jane Edwards, Zahia Farsi, Michel George, Michel Gonnard, Mohamed El Guennouni, Yves-Charles Guenoun, Jacqueline Guichard, Jean-Paul Guichard, Yves Guichard, Joël Hillel, Equipe F. Jarente, Gérard Lepage, Robert Lhomme, Jacky Lumarque, Michel Mante, Alain Moissard, Gilles Mounier, Bernard Namian, Jacques Nimier, Georgette Nunziati, Peter O'halloran, Richard Pallascio, Guy Serge Pompilius, Claude Tisseron, Guy Wallet, David Wells.

Sous la direction d'Alain Bouvier

cedic/nathan
6-10, bd Jourdan - 75014 Paris - Tél. : (1) 45.65.06.06

Editions Cedic
6-10 Boulevard Jourdan, 75014 Paris
Tel: (1) 45-65-06-06

Ce volume porte la référence
ISBN: 2-7124-0165-4

"Si la plupart des pratiques restent un art de la mise en oeuvre peu systématisé et gouverné par l'empirisme, ... elles peuvent progresser à la fois dans leur capacité à dire ce qu'elles font et à faire ce qu'elles disent".

Jean Dubost

Préface

Au risque de paraître présomptueux, je voudrais, comme Michel Foucault, que cet objet, ce livre "presque imperceptiblement parmi tant d'autres, se recopie, se fragmente, se répète, se simule, se dédouble, disparaisse sans que celui à qui il est arrivé de le produire, puisse jamais revendiquer le droit d'en être le maître, d'imposer ce qu'il voulait dire, ni de dire ce qu'il devait être".

Pourquoi ce livre ?

Comme beaucoup de formateurs, je suis frappé par l'écart de plus en plus grand entre les recherches concernant l'enseignement (sciences de l'éducation, didactique, ...) et les préoccupations des praticiens. La multiplicité des comptes rendus de ces recherches laisse ces préoccupations entières. Peu d'enseignants en poste se sentent concernés par cette littérature spécialisée. D'ailleurs où et comment la majorité d'entre eux y auraient-ils accès ?
D'autre part, en intervenant en formation initiale ou continue d'enseignants de mathématiques, je constate la difficulté des formateurs à mettre à la disposition des participants des documents leur permettant de travailler pendant les stages et après.
Enfin, si le nombre des enseignants qui vont chaque année en formation peut paraître élevé, en réalité beaucoup ne bénéficient que d'actions dites courtes, de quelques heures, et d'autres ne demandent jamais - ou presque jamais - de formation.
Il manquait donc un ouvrage, produit et écrit spécialement pour les enseignants des collèges et du second cycle, qui mette à leur disposition, ainsi qu'à celle de leurs formateurs, des outils et les incite à entamer ou à poursuivre seuls un travail de formation hors des lieux et temps fixés institutionnellement. Il ne fait pas double emploi avec une littérature plus technique, plus spécialisée, à laquelle il voudrait donner accès.

Buts de ce livre

Concrètement, à partir des considérations précédentes, j'ai tenté de produire un livre qui soit, pour ses lecteurs, une "caisse à outils" pouvant les aider à *analyser leurs pratiques* et à *contrôler leur action pédagogique*.

Pour un formateur, la didactique des mathématiques n'apparaît pas comme un but en soi, mais comme un moyen. Par une démarche facilement accessible aux enseignants, elle incite à l'analyse de leurs actions, à démarrer et à poursuivre des formations et progressivement à connaître et développer d'autres types de recherches, pas seulement de nature didactique. Elle peut remplir le double rôle *d'analyseur des pratiques pédagogiques* et *d'analyseur des stratégies de formation*.

Plus précisément, prolongeant la ligne directrice de "La mystification mathématique" [45], ce livre voudrait favoriser chez ses lecteurs:
- *l'amorce de processus* en offrant des "points de départ". Il ne s'agit pas sur un sujet donné d'en faire une étude exhaustive. Après avoir sélectionné une cinquantaine de thèmes liés à l'enseignement des mathématiques, nous tentons thème par thème, d'exprimer de quoi il s'agit, d'indiquer où on en parle ailleurs dans ce livre, où l'on peut trouver des informations complémentaires dans d'autres...
- *une incitation à l'action réflexive:* l'analyse des pratiques, le contrôle de son action supposent des outils. On trouvera dans cet ouvrage, outre des informations, des idées de travaux, des outils méthodologiques et des aides à l'analyse des pratiques.

Certains s'étonneront de trouver dans ce manuel de didactique-action des textes dont les liens directs à la didactique des mathématiques au sens le plus strict du terme ne leur semblent pas clairs. Ce n'est que le reflet de mes rapports à la didactique, que je développe dans la troisième partie, et à la formation (voir l'article FORMATION). Je n'oublie pas que "c'est en forgeant que l'on devient musicien". Les enseignants ont des idées et désirent des outils pour les mettre en oeuvre. Ce livre se veut une caisse à "outils pour produire des outils". Les nombreuses recherches dites fondamentales traquent le "pourquoi" des choses. Ici, afin d'inciter à pratiquer des recherches-actions, nous nous adressons à tous ceux qui sont préoccupés par le "comment". Ce "comment", souvent négligé par les chercheurs, devient pour les praticiens-chercheurs un important objet de recherche.

Je parlerai plus en détail du fossé présent entre, d'un côté des chercheurs plus ou moins empreints parfois d'idéologie scientiste et, de l'autre, des praticiens innovateurs empiristes. Par ce livre, nous voulons tenter de contribuer à rompre l'incommunicabilité actuelle, en nous inscrivant clairement dans le courant recherche-action; la didactique-action tente d'offrir aux enseignants de mathématiques une approche en ce sens.

Collaborateurs

La quarantaine de collaborateurs et d'auteurs de ce livre, en poste dans huit pays différents, sont:
- des praticiens: professeurs de collèges et de lycées, à qui j'ai demandé de présenter des informations, leurs propres recherches, leur témoignage;
- des formateurs avec qui nous sommes en accord sur les stratégies de formation, sur l'éducation et sur l'enseignement des mathématiques.

Il ne m'est pas possible, en quelques mots, de dire ce que je leur dois à travers des discussions passionnantes et passionnées, des actions et travaux menés en commun, des rencontres, des échanges épistolaires qui durent, pour certains, depuis des années. Par la multiplicité et la qualité de ces échanges, cette entreprise aura été pour moi une extraordinaire aventure. La bibliographie des différents articles et la bibliographie générale sont là pour témoigner de tous les emprunts ou dettes que nous avons, notamment auprès des groupes de recherches en didactique.

Je dois enfin remercier ceux qui n'ont pas fourni de productions écrites pour ce livre, mais qui ont accepté de réagir à la lecture de certains passages et m'ont fait remarques, critiques et suggestions, en particulier Nicolas Balacheff, Michel Develay, Jean-Marie Dolle et Dominique Pichod, ainsi que mes nombreux collègues et amis des stages d'été.

Si ce livre atteint ses objectifs et montre que les enseignants désirent de tels outils "points de départ", il nous restera à en produire d'autres et en particulier à regrouper des exemples de travaux, aussi modestes soient-ils, menés par les enseignants dans leurs classes.

Je tiens à terminer par une note personnelle: l'idée de ce livre est née à Perpignan en 1982 durant un stage de didactique que j'avais organisé. Même si je n'en ai écrit qu'une fraction, son contenu, sa structure, qui se sont élaborés pendant les années qui suivirent, reflètent de près ce que fut alors ma trajectoire avec ses rencontres et interrogations. Pour moi, le voyage ne fait que commencer ...

A.B.

Organisation et Mode d'emploi

Ce livre, qui n'impose pas une entrée et un ordre de lecture, comprend trois parties principales.

La première partie : **Corpus** qui contient informations, témoignages, recherches, expériences, sur les mathématiques, leur histoire, leur épistémologie, leur présent..., sur les méthodes pédagogiques, les théories de l'apprentissage, l'utilisation et les effets de l'informatique, la formation des enseignants et des travaux de didactique-action.
Elle se présente comme une petite encyclopédie: on y trouve 125 *notions classées par ordre alphabétique :*
- deux tiers d'entre elles font l'objet d'articles, de longueur variable, signés par des initiales; une liste des articles, avec les noms des auteurs, se trouve à la fin de l'ouvrage;
- un tiers sont de simples entrées qui renvoient à des articles de cette partie, ou à une fraction des deux autres.

Par exemple, "TRANSPOSITION DIDACTIQUE" est une entrée qui ne comporte pas d'article, mais renvoie à l'article "HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES" de cette partie, à des outils contenus dans la seconde partie et codés II.2.a., et à un paragraphe de la troisième codé III.§7.
Si un mot ne se trouve pas dans cette première partie, il reste à consulter l'index des matières, à la fin de l'ouvrage.
A l'intérieur ou à la fin des principaux articles, les renvois à la bibliographie générale (seconde partie) permettent de se constituer une brève documentation dont les ouvrages, de préférence en langue française, sont en principe accessibles sur les lieux de travail ou de formation.

La seconde partie regroupe quelques outils :
- outils d'analyse (grilles, questionnaires, ...);
- outils de recherche d'informations : bibliographies thématiques, bibliographie générale, adresses utiles.

La troisième partie veut être une introduction à la didactique-action.

Le livre se termine par une *table des articles du Corpus et des outils de la seconde partie*, et par les *index des noms propres et des matières.*

Les renvois à l'intérieur de l'ouvrage sont faits de la façon suivante:
- pédagogie institutionnelle*, ou V. INSTITUTIONNELLE (pédagogie) renvoient à l'article INSTITUTIONNELLE (pédagogie) de la première partie.
- [V. II.1.b.] renvoie à la seconde partie, première rubrique, outils b.
- [V. III.§4] renvoie au paragraphe 4 de la troisième partie.
- [79] renvoie à ce numéro dans la bibliographie générale (seconde partie).

Petit conte imaginaire*

La Douche ... Quelle douche !

Et vint le moment où l'on décida de mettre des douches à la Cité.
Quelle marque? Quel modèle? A quel prix? Comment les choisir pour que leur emploi soit simple et convienne à tous?
Inquiets, dépassés par le problème - n'hésitons pas à le dire - les responsables décidèrent de s'adresser aux douchocrates.

Une première réunion avec eux permit de cerner le problème; les douchocrates qui parlaient "d'analyse des besoins", de "demandes d'équipement" avaient fait bonne impression auprès des responsables de la Cité. Après avoir posé grand nombre de questions, noté force réponses et fait preuve d'une grande attention, ils avaient proposé une nouvelle rencontre où, en réponse aux demandes exprimées, ils se livreraient à une "offre" pour qu'ensuite puissent se poursuivre "les négociations" qui permettraient de décider des actions futures.
"Un peu bizarres" ces douchocrates, déclarèrent les responsables de la Cité; "très gentils, disponibles, attentifs, mais inhabituels et un peu déconcertants" et d'ajouter "puisqu'ils savent, depuis le temps qu'ils posent des douches, faisons-leur confiance".

Aussi les responsables accueillirent-ils avec bienveillance l'offre qui leur fut faite lors de la seconde réunion : "Les systèmes habituels de robinetterie sont très coûteux et peu fiables. Nous allons mener une recherche pour tenter de déterminer la meilleure température pour une douche. Cette information obtenue, nous vous proposerons un dispositif simple, économique, fiable, fournissant de l'eau à cette température". Et ils poursuivirent en disant: "Nous avons déjà pensé quelques hypothèses; mais avant de les tester, nous voulons recueillir d'autres indices. Vous, par exemple, à quelle température aimez-vous prendre votre douche ?"
S'il en avait encore été besoin, ce dernier point acheva de convaincre les responsables de la Cité du sérieux des douchocrates : après avoir répondu à leur question, ils découvrirent que leurs réponses se situaient toutes - sans exception - à l'intérieur de la "fourchette de températures" préalablement prévue par les douchocrates sur des bases purement empiriques. "Nous allons, par prudence méthodologique, lancer une préenquête avant l'enquête. Retrouvons-nous d'ici quelques jours, que nous puissions vous rendre compte, vous associer à cette recherche."
Vraiment gentils ! Et pas prétentieux ! Nous associer à leur recherche!
La préenquête fournit des résultats plus que prometteurs : la température préférée des

---

* Publié dans les Cahiers Pédagogiques 210 (1983) p. 42

utilisateurs de douches, empiriquement conjecturée par les douchocrates semblait largement confirmée par la préenquête. Lors de la nouvelle réunion, toutes les parties prenantes tombèrent rapidement d'accord pour lancer l'enquête décisive.

Dès le départ, chacun put constater que de fantastiques précautions méthodologiques étaient prises et toute la population, informée des objectifs de la recherche, attendait avec impatience les résultats.

Le temps de recueillir les données, de les entrer sur ordinateur, de pratiquer différents types d'analyses des données, les résultats furent diffusés : avec une précision et une certitude dépassant toute espérance, l'existence d'une température moyenne à laquelle les habitants de la Cité aimeraient prendre leurs douches fut confirmée.

Aussitôt un grand constructeur de robinetterie fut chargé d'installer des mécanismes fournissant de l'eau à cette température idéale, ce qui fut fait rapidement. L'installation achevée, les douchocrates - on n'est jamais trop prudent - se livrèrent à des opérations de contrôle systématique et précis. Ils s'assurèrent que toutes les douches fournissaient l'eau à la température voulue et que d'éventuels écarts ne dépasseraient pas les taux admis dans les pays où la législation est la plus sévère.

Le jour tant attendu arriva enfin. Les responsables de la Cité avaient organisé une inauguration à la fois officielle et populaire.

Les discours furent brefs et peu nombreux. Puis un groupe d'habitants, choisi à la suite d'un concours amusant, fut autorisé à prendre la première douche.

A l'extérieur, la foule attendait les réactions et s'apprêtait à goûter à son tour au délice.

Mais? Que se passait-il? On entendait des "Oh", des "Ah", et puis des "Trop chaud", "Trop froid".

Le premier groupe ressortit rapidement. D'autres essayèrent à leur tour; leurs réactions furent analogues.

Les douchocrates déroutés se livrèrent alors à de nouvelles mesures. Incompréhensible! L'eau fournie arrivait exactement à la température idéale.

Le mécontentement populaire grandissait. Les responsables, sommés de s'expliquer par la population, créèrent une commission d'enquête qui reprit le problème à son début.

Elle ne tarda pas à rendre son rapport: pressée par les événements, elle avait travaillé nuit et jour, sans concession.

La conclusion, une fois connue de tous, sembla tellement évidente qu'on ne pouvait pas comprendre que les douchocrates ne s'en soient pas aperçus. Certes, la température moyenne obtenue avait été bien calculée, mais les goûts particuliers des uns et des autres faisaient qu'à peine 5% des habitants de la Cité prenaient plaisir à se doucher à cette température!

Un examen plus poussé révéla encore qu'une même personne apprécie de façon différente la température de sa douche suivant l'heure de la journée, la température extérieure, l'activité qu'elle vient de mener, les raisons pour lesquelles elle se douche, ...

Les responsables de la Cité, comme les douchocrates, qui pourtant ne voulaient que le bien des habitants, ne trouvèrent aucun moyen économique de réparer cette monumentale erreur et décidèrent de laisser définitivement les douches en leur état.

Depuis, les habitants de la Cité subissent avec plus ou moins de philosophie ces douches tantôt trop chaudes, tantôt trop froides et se méfient de la façon dont on décide pour eux.

Heureusement, dans l'enseignement, nous n'avons pas de douchocrates; chaque élève, chaque enseignant peut se doucher - pardon, peut apprendre, se former - au rythme qui lui convient.

A.B.

PREMIERE PARTIE

CORPUS

Informations
Témoignages
Recherches
Expériences

Affectivité

V. - MOTIVATION
- RELATION - NEL

En mathématiques, le terme d'affectivité renvoie à de nombreuses questions :
• *des questions d'ordre général* :
- Est-il possible de "motiver" des élèves pour les mathématiques?
- Peut-il y avoir des raisons d'ordre "affectif" aux échecs en mathématiques?
- Est-il possible, et comment, de tenir compte de l'affectivité dans une classe de mathématiques?
- Comment moi, prof de maths, ai-je pu choisir ce métier, m'y maintenir, y trouver du plaisir ou m'y ennuyer?
• *des questions plus précises* :
- Peut-on considérer l'affectivité comme une locomotive et les structures mathématiques comme des wagons? Dans l'utilisation de ces structures, l'élève serait "poussé ou tiré" par l'affectivité à moins qu'il y ait entre les deux une relation plus subtile.
- Y a-t-il une "spécificité" de l'affectivité véhiculée par les mathématiques ou les phénomènes sont-ils les mêmes d'une discipline à l'autre?
- Peut-on se former dans ce qui touche à l'affectivité ou bien s'agit-il d'un "don" qu'il suffit d'entretenir ?
- La fonction de l'enseignant est-elle d'enseigner? De former [V. FORMATION] celui qu'il a en face de lui? De faire un choix entre les deux? Est-ce un faux choix?

Préliminaire

Les termes d'affectivité, de motivation, d'échec sont des termes commodes parce qu'utilisés couramment mais ils ont l'inconvénient de manquer de précision et de définition. J'utiliserai donc plus volontiers les deux concepts d'*investissement* et d'*imaginaire*. Si "être motivé" est une forme passive, "investir" est actif. L'origine latine en suggère bien le sens et surtout le mécanisme sous-jacent: recouvrir d'une parure, d'un vêtement. On dira, par exemple, investir quelqu'un de sa confiance, investir de l'argent... C'est de toute façon donner à quelqu'un ou parer un objet de quelque chose qui vient de soi: sa confiance, son argent, pour en attendre un bénéfice sous une forme ou sous une autre. Autrement dit, il n'est possible de s'intéresser à une matière comme les mathématiques, d'être motivé pour les mathématiques que si ces dernières sont revêtues de quelque chose qui vient de nous et qui leur donne une coloration personnelle mais très subjective. Ainsi investir les mathématiques, c'est s'arranger pour que cet ensemble de lettres, de chiffres prenne un sens pour soi, un sens non seulement rationnel mais aussi un sens affectif signe d'autre chose que ce qu'elles sont: signe de puissance, de plaisir, de combat, de territoire personnel, etc. Sens qui peut être tout à fait individuel et unique, sens qui peut faire que cet objet mathématique nous devienne indispensable pour vivre (voir à ce sujet l'exemple de cet élève de terminale C assurant qu'il se suiciderait s'il ne suivait plus en mathématiques) [433].

Cet aspect très subjectif dont on revêt les mathématiques est façonné à partir des fantasmes que chacun projette sur elles. Ces fantasmes font partie de l'univers de chaque individu, ils en font même sa singularité, ils suscitent sa créativité, ils orientent ses intérêts. Ils ne sont pas comme certains pourraient le croire signe de "maladie".
Cet aspect subjectif des mathématiques n'enlève rien à son caractère scientifique.

Comment "motiver" les élèves? (L'élève et les maths)

L'élève investit donc les mathématiques par le biais de ses fantasmes personnels. Il peut par exemple les craindre pour diverses raisons : peur d'être mécanisé, peur de la rigueur, etc. Toutes ces craintes ne sont que les expressions de craintes qu'il vit en lui-même et dont il projette le sentiment sur les mathématiques. Chaque élève entre ainsi en relation avec les mathématiques selon différents types de mécanismes privilégiés [V. II.1.d: GRILLE D'ANALYSE].
Ces diverses "représentations" peuvent être analysées et regroupées suivant certaines tendances: les mathématiques et l'ordre, les mathématiques en tant qu'objet dangereux, les valeurs attribuées aux mathématiques, les mathématiques et le sentiment de création [171].
Il paraît évident alors que "motiver" un élève aux mathématiques n'est pas un problème de "techniques" mais ne peut se faire que par une relation à établir avec lui, au moyen de ce canal que sont les mathématiques. Une technique (faire de l'histoire* des mathé - matiques, trouver des exemples d'application, utiliser des problèmes* ouverts, faire des fiches, faire du travail de groupe, etc.) n'aura d'efficacité qu'en fonction de ce que le professeur qui l'utilise fait passer comme communication* à travers elle. Un travail par fiche peut aussi bien passer le message* : "Fichez-moi la paix chacun dans votre coin", que le message : "Je désire m'intéresser à chacun d'entre vous". Ces messages ne transi - tent pas seulement par des phrases exprimées, mais par le mode de réponse du professeur aux questions mathématiques des élèves.

L'affectivité en classe : Le prof., les maths et les élèves

Certains enseignants pensent qu'un choix s'offre à eux:
- être simplement "enseignant" en classe, c'est-à-dire avoir pour fonction d'apporter des informations aux élèves, de mettre en oeuvre des moyens techniques pour leur permettre de comprendre et d'assimiler ces informations et enfin de contrôler ces divers processus.
- être des formateurs de jeunes aussi soucieux de leur "éducation" que de leur savoir.

Dans le premier cas, l'affectivité n'aura pas sa place, elle sera même envisagée comme une gêne des processus, l'enseignant devant veiller à rester continuellement dans sa seule fonction d'informateur. Dans le deuxième cas, l'affectivité est envisagée comme étant au centre des préoccupations de l'enseignant.

Ce choix me paraît être un faux choix. Qu'on le veuille ou non, l'imaginaire, l'aspect fantasmatique est au centre des processus intellectuels. Dans tout énoncé de mathématiques exprimé en classe par un enseignant, il y est présent et il y communique quelque chose de lui-même. Par son ton à l'égard de l'élève, par le moment qu'il choisit pour apporter sa phrase mathématique (trop tôt, trop tard, au moment désiré par l'élève, etc.), par le choix de la méthode proposée (facile, difficile, etc.), par le lieu où il porte son attention (le résultat de l'exercice, la rigueur du raisonnement, l'écriture, la représentation, etc.); par tout cela, l'enseignant communique avec l'élève au niveau de son imaginaire, c'est-à-dire au niveau de ses propres fantasmes projetés sur les mathématiques, ses désirs à utiliser cet objet mathématique pour une fonction ou pour une autre.
L'enseignant va ainsi, qu'il en ait conscience ou non, participer à la formation de ses élèves, à la formation de leur propre imaginaire; il n'est pas équivalent pour un élève de vivre un ou deux ans de son existence avec un professeur de mathématiques pour qui cette discipline est avant tout un ensemble de règles dont il faut respecter la rigueur, ou avec un autre pour qui les mathématiques sont avant tout pur jeu gratuit de l'esprit.
Ainsi, dans la classe, c'est une partie à trois qui se joue: le prof, les maths et les élèves. Comment l'enseignant et chaque élève vont-ils se servir des mathématiques dans ce dialogue? Comment ces trois éléments vont-ils se situer l'un par rapport aux autres?

qu'il accepte de distribuer aux élèves? Va-t-il s'en servir comme d'une muraille pour limiter les débordements affectifs des élèves? Va-t-il se faire un allié des élèves pour "combattre" les maths? etc.; autant de positions possibles que de professeurs. De même, pour l'élève, les mathématiques seront-elles le "truc" du prof qu'il faut "avaler", "encaisser", "admirer", pour avoir en retour la bonne note? Est-ce l'objet du désir du prof impossible à s'approprier de peur de se sentir coupable de rapt? Est-ce l'objet-don d'amour du prof? Celui dont on a plaisir à contourner les règles comme on peut avoir un plaisir à brûler un feu rouge? Là encore autant de positions possibles que d'élèves. C'est cela l'affectivité dans une classe de mathématiques. Ce sont ces multiples jeux (JE) présents dans la classe. C'est dans ces jeux (JE) que s'enracinent la "motivation", les possibles succès ou difficultés en mathématiques. Alors comment un enseignant de mathématiques peut-il ne pas tenir compte de cette "affectivité" dans sa classe?

Pourquoi prof de maths? Le prof et les maths

La seule façon de pouvoir en tenir compte, c'est déjà de savoir où chacun se situe dans ce jeu à trois. Autrement dit, d'avoir quelques idées sur ce que représentent les mathématiques pour soi-même. Quels plaisirs j'y trouve? Ou quel ennui? Qu'ai-je envie de "faire passer" aux élèves? En quoi mes mathématiques sont-elles différentes de celles de mon collègue avec qui je suis si souvent en désaccord?
Pour l'un, il s'agit d'un lieu sûr, d'un havre de paix où l'on sait ce que l'on fait, où on est sûr de soi, c'est un bien, parfois durement acquis, et qui permet de supporter d'autres lieux, d'autres faits bien moins satisfaisants. Il pourra ainsi être utile de faire découvrir à certains élèves qu'il existe un lieu où l'on peut se réfugier et reprendre souffle dans des moments difficiles [121]. Pour un autre, les mathématiques sont une règle de vie, la seule méthode permettant d'accéder à la vérité et à une certaine cohérence dans l'action. Il montrera à ses élèves comment ses maths fournissent des "modèles" d'analyse et de

compréhension du monde. Il permettra ainsi à certains élèves, parfois déboussolés par l'absence de valeurs de notre monde, de trouver un fil conducteur dans leur existence. Pour un autre encore, les mathématiques sont un instrument puissant d'action sur le monde, un moyen de maîtrise d'eux-mêmes et de ce qui les entoure. Il aura plaisir à fournir cet instrument à ses élèves pour les aider dans leur lutte pour la vie [172]. On pourrait ainsi continuer de donner des exemples car chaque enseignant a sa propre représentation* des mathématiques dans son propre univers imaginaire. Chaque enseignant désire communiquer à ses élèves quelque chose de cet univers imaginaire qui fait sa singularité et sa richesse. Chaque enseignant communique ainsi à ses élèves ce pour quoi il est devenu prof de maths au-delà des hasards et des événements circonstanciels qui ont pu accompagner son choix.

Ce fantasme propre à l'enseignant pourra entrer en résonnance avec ceux de certains de ses élèves et ainsi favoriser leur "intérêt". Il pourra pour d'autres au contraire leur faire peur et entraînera alors un certain retrait de leur part.

Un professeur pour qui la rigueur mathématique est fondamentale (à cause de la fonction que cette rigueur joue pour lui dans la structuration de sa personnalité) "intéressera" certains de ses élèves qui ont "besoin" de cette même rigueur; mais s'il a conscience de l'aspect subjectif de cette rigueur, il aura la souplesse de ne pas l'exiger pour tous ses élèves. Il saura repérer ceux pour qui cette rigueur risque au contraire d'être ressentie comme un "enfermement" par exemple et pour qui elle fera obstacle à un apprentissage* des mathématiques. L'enseignant qui n'a pas conscience de son propre fantasme, de la subjectivité de sa représentation des mathématiques ne pourra au contraire envisager que les mathématiques soient autrement que "rigoureuses". Sa façon de voir les mathématiques lui paraît être la seule "objective". Il cherchera donc à l'imposer à tous ses élèves. Certains l'accepteront car cette vision correspond à la leur, ils s'épanouiront avec cet enseignant et ce dernier sera rassuré du succès qu'il a avec eux; d'autres l'accepteront par docilité, ils y perdront leur autonomie et resteront dépendants du désir de l'autre. Ce seront les élèves appliqués, bien sages mais dont les "étourderies" et les "erreurs" de calcul seront les derniers retranchements de leur propre désir d'autonomie, la manifestation de leur propre jeu (JE). Enfin, il y aura ceux qui refuseront et qui

Comment pouvoir tenir compte de cet imaginaire?

La première condition est de connaître en partie sa propre représentation des mathématiques. La deuxième de permettre que d'autres représentations puissent s'exprimer dans la classe; c'est enfin de pouvoir entendre ce qui est dit par un élève, sous un mode souvent symbolique, recelant sa propre représentation. Entendre sans y faire obstacle soit par la peur qu'elle provoque en nous (peur dont on a peu conscience tellement nous sommes habiles à arrêter l'expression de ce qui ne nous convient pas chez l'autre), soit par le jugement que l'on peut porter sur sa valeur (ma représentation est plus "vraie" que la sienne). Connaître sa représentation, laisser s'exprimer celles des autres, entendre ce qui est dit; tout ceci n'est pas un "don" mais le résultat d'une formation. On admet qu'il faille plusieurs années pour apprendre les mathématiques nécessaires à un enseignant; on admet paradoxalement beaucoup moins facilement qu'il faille une formation pour les aspects relationnels. Cette formation est possible dans certaines académies (formation continue des enseignants) ou dans certains organismes à but non lucratif (loi 1901) (a). Ces formations valent évidemment ce que valent leurs animateurs.

Conclusion : ce que je ressens

- Je sais que les problèmes de "motivation" ne trouvent pas leur solution dans l'utilisation de techniques, même si ces dernières peuvent être utiles comme support d'une relation.
- Je sais que ce ne sont pas mes connaissances de la psychologie de l'enfant ou d'autre chose qui me sont utiles, même si ces connaissances peuvent parfois m'aider à me rassurer, à prendre mes distances quand c'est utile.
- Je sens que je ne sais rien sur l'élève ou l'enseignant que j'ai pour fonction de former et qui est devant moi. Je sais que ce n'est que cet élève ou cet enseignant qui sait quelque chose de lui-même et qu'il est le seul à pouvoir me le communiquer s'il le désire.
- Je sais encore que mon attitude peut faciliter ou faire obstacle à cette communication; que ma curiosité trop grande peut lui faire peur et l'empêcher de dire ce qu'il voulait m'exprimer, que de même mon indifférence à son égard ou mes préoccupations intérieures empêchent que naisse en lui ce désir de communication. Il faut que je me situe à bonne distance, ni trop près, ni trop loin, pour lui et pour moi.
- J'ai enfin expérimenté sur moi-même, comme formé, et sur d'autres comme formateur que le seul fait de pouvoir exprimer ce que l'on ressent, de faire l'effort quels que soient les balbutiements par lesquels on passe, "de mettre en mot" notre imaginaire, nos fantasmes, permet de ne plus en avoir peur, de ne plus être programmé entièrement par eux, mais de pouvoir s'en servir de façon constructive pour créer, inventer, irriguer toutes nos actions.

J.N.

Bibliographie complémentaire : [162], [163].

a) ASSOCIATIONS (Loi de 1901) assurant des formations psychosociologiques :
IFEPP : 140 bis, rue de Rennes - 75006 PARIS. Tél. 42 22 90 70
OFREPS : 34, avenue Reille - 75014 PARIS. Tél. 45 89 18 50
ARIP : 6 bis, rue Bachaumont - 75002 PARIS. Tél. 42 36 40 56
FOREP : BP 11 - 21801 QUETIGNY CEDEX (près de Dijon). Tél. 80 23 03 26.

Algébrique (nombre)

V. - FRACTIONS CONTINUES
- FLOU

Analyse

V. - NOMBRE ET ANALYSE
- NON STANDARD

Analyse des pratiques

V. - II.1

A.P.O.

V. - E.A.O.

Apprentissage

V. - AUTONOME (TRAVAIL)
- DIDACTICIEL
- GUIDANCE
- P.P.O.
- PROJET
- III. § 2

Se trouve employé dans des expressions telles que : situations* d'apprentissage, théorie de l'apprentissage.
L'apprentissage est le processus qui permet à un individu d'acquérir un certain savoir-faire*; en situation scolaire, l'apprentissage suppose des séquences* organisant l'activité de l'individu et une certaine durée pendant laquelle le savoir-faire s'acquiert petit à petit. En cela, il semble ne pas pouvoir se réduire à la simple transmission d'un savoir par le discours d'un maître.

JP.G.

Bibliographie : [134], [30].

Approximations

V. - ATTRACTEURS
- CONSTRUCTIONS
- FRACTIONS CONTINUES

Aptitude

V. - CAPACITÉ
- COMPÉTENCE
- HABILETÉS

Etre apte à faire une tâche, c'est être capable de la faire. La notion d'aptitude se confond donc souvent avec celle de capacité. Par exemple, le CAPES (Certification d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second degré) est bien ce qui certifie la capacité à enseigner en Lycée ou Collège; c'est le diplôme dont l'enseignant peut se prévaloir pour justifier de sa compétence. Mais dans des évaluations* du type : "élève ayant des aptitudes, mais dont le travail est insuffisant", on emploiera plus volontiers "aptitude" que "capacité" pour signifier l'idée d'une disposition naturelle, la capacité renvoyant à l'idée d'un savoir-faire* acquis. Par exemple, Piéron définit l'aptitude comme "la condition *congénitale* d'une certaine modalité d'efficience". Il ne faudrait cependant pas minimiser l'influence du milieu sur les performances* qui permettent de parler de ces capacités virtuelles, souvent considérées comme héréditaires, que sont les aptitudes d'un individu.

JP.G.

Arithmétique

V. - CRYPTOGRAPHIE
- FRACTIONS CONTINUES
- NOMBRE DE MERSENNE
- NOMBRE ET ANALYSE
- NOMBRE ET GÉOMÉTRIE

Atelier de didactique-action

V. FORMATION. 3 : Une expérience de formation par la didactique-action.

Attitude

Manière de réagir faite de sensations, de sentiments et d'idées qui se traduisent dans un comportement*.

Développer certaines attitudes fait partie, parfois implicitement, des objectifs* de l'enseignement : c'est en tout cas le but de l'éducation. Certains pensent même qu'il est plus important de développer des attitudes que des connaissances. En pédagogie par objectif [V. P.P.O.], les attitudes font partie des objectifs du domaine socio-affectif. En tant qu'enseignant, on peut fixer à l'élève des objectifs d'attitude sociale: être capable de prendre des initiatives, être tolérant..., ou d'attitude cognitive*: chercher à comprendre, savoir conjecturer [V. CONJECTURE], savoir vérifier des calculs...
D'autre part, l'observation des attitudes d'un individu [V. OBSERVATION DIDACTIQUE] ou de plusieurs individus dans un groupe*, à partir des comportements, permet d'analyser une situation*, d'analyser les pratiques d'un élève ou d'un enseignant.

JP.G.

Bibliographie : [230]

Attracteurs

Suites divergentes et nombre de Feigenbaum

Pour étudier et tenter d'expliquer l'évolution dans le temps de certains systèmes physiques (turbulence dans les fluides, bruits dans les circuits électriques,...) une théorie récente est en plein développement: il s'agit de la théorie des **attracteurs.**

Dans [493], R. Thibault en donne une première idée. Cette théorie étudie les solutions de certains systemes d'équations différentielles ainsi que le comportement de suites définies par une relation de récurrence de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$.
C'est l'étude de telles suites que nous allons développer ici en nous inspirant des travaux de Feigenbaum [356] qui nous ont paru intéressants à plusieurs titres :

— Les suites divergentes sont souvent jugées peu intéressantes ; or l'observation des termes de certaines d'entre elles réserve de nombreuses surprises.

— Sans l'aide de l'ordinateur, Feigenbaum n'aurait pas pu mener ses travaux aussi loin ; en particulier il n'aurait certainement pas pu déceler l'existence d'une certaine constante que nous définirons à la fin de l'article.

Suites définies à partir d'une fonction

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x(1-x)$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
Prenons un réel quelconque dans $[0, 1]$ (0,8 par exemple) et calculons les images par f des réels suivants :

$$f(0{,}8)=0{,}16; \quad f(0{,}16)=0{,}134\,4; \quad f(0{,}134\,4)=0{,}116\,336\,6... \text{ etc.}$$

Nous créons ainsi une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ qui est définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1] & (\text{ici } x_0=0{,}8) \\ x_{n+1}=f(x_n) & \text{pour tout } n\geqslant 0. \end{cases}$$

En calculant les 15 premières valeurs de la suite (x_n) on constate que cette suite semble décroissante et minorée par 0.
L'exercice suivant apporte la preuve* de l'exactitude de ces observations.

Exercice

1) Montrer que si $x\in[0, 1]$ alors $f(x)\in[0, 1]$.
En déduire que tous les termes de la suite (x_n) appartiennent à $[0, 1]$ et ceci quelle que soit la valeur x_0 choisie au départ.

2) Montrer que $f(x)-x$ est négatif.
En déduire que pour tout entier n, $x_{n+1}-x_n$ est négatif.
Autrement dit : la suite (x_n) est décroissante.

Conséquence

La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0; elle est donc convergente et ceci quel que soit x_0 choisi au départ.

Vers quelle limite la suite (x_n) converge-t-elle?

Expérimentalement on peut se faire une certaine opinion en calculant un très grand nombre de termes. Le programme suivant écrit en BASIC permet d'obtenir les valeurs de x_n. Vous devrez interrompre son exécution quand vous le jugerez utile.

```
10  PRINT «Quelle valeur initiale XO choisissez-vous?»
20  INPUT X
30  PRINT X
40  LET X=X*(1-X) : GOTO 30
```

On observe que la suite converge vers 0 et ceci quelle que soit la valeur initiale x_0. En voici une preuve.

Preuve

Nous savons que la suite (x_n) est convergente. Appelons a sa limite.
Pour tout entier n on a $x_{n+1}=f(x_n)$, soit $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} [x_n(1-x_n)]$,

c'est-à-dire : $a=a(1-a)$, égalité équivalente à :

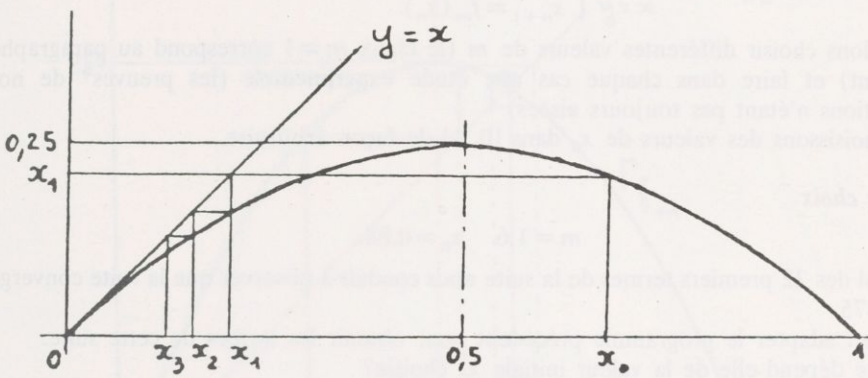
$$0=-a^2.$$

Finalement $a=0$.

Représentation graphique

Représentons dans un repère orthonormé le graphe de f ainsi que la droite d'équation $y=x$.
Une construction simple permet de trouver x_{n+1} à partir de x_n.
Nous avons ainsi une visualisation de la convergence de (x_n) vers 0.

x	0		0,5		1
$f'(x)=1-2x$	1	+	0	−	−1
$f(x)=x(1-x)$	0	↗	0,25	↘	0



D'autres familles de suites

Nous allons introduire des suites à l'aide du procédé précédent mais en utilisant des fonctions $f_m : x \longmapsto mx(1-x)$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, m étant un réel positif.
Prenons par exemple $m=10$. Peut-on définir par récurrence une suite (x_n) telle que :

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_{n+1} = f_{10}(x_n) = 10\, x_n\,(1-x_n)? \end{cases}$$

Choisissons $x_0 = 0{,}3$ par exemple.
$x_1 = f_{10}(0{,}3) = 2{,}1$; nous ne pouvons aller plus loin car $2{,}1 \notin [0, 1]$.
Choisissez d'autres valeurs de x_0 dans $[0, 1]$. Vous constaterez que les calculs successifs de x_1, x_2, ... fournissent à partir d'un certain rang des valeurs en dehors de $[0, 1]$.

L'exercice suivant a pour but de déterminer les valeurs de m pour lesquelles ce phénomène ne se produit pas.

Exercice

1) Montrer que l'inégalité $f_m(x) \leqslant 1$ est équivalente à $-mx^2 + mx - 1 \leqslant 0$.
En utilisant les résultats sur le signe du trinôme du second degré, montrer que pour $m \in [0, 4]$ on a $-mx^2 + mx - 1 \leqslant 0$ pour tout réel x.

2) Montrer que si $x \in [0, 1]$ alors $f_m(x) \geqslant 0$ (rappelons que m est positif).

3) Déduire des questions précédentes que pour $m \in [0, 4]$ et $x \in [0, 1]$ on a $f_m(x) \in [0, 1]$.

4) Montrer que pour $m > 4$ on a $f_m(0,5) > 1$.

Conséquences

Les valeurs de l'intervalle $[0, 4]$ sont les seules valeurs de m pour lesquelles nous pouvons envisager de créer des suites (x_n) telles que :

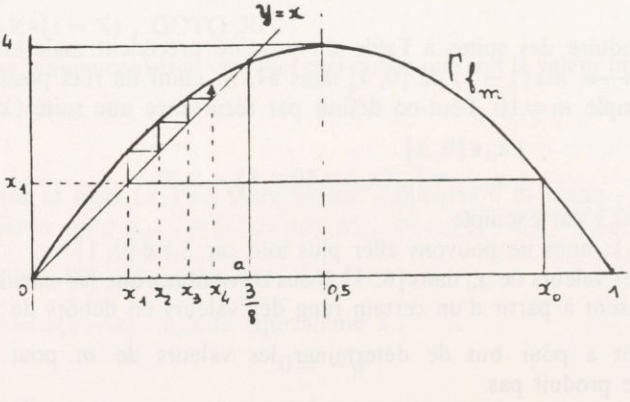
$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_{n+1} = f_m(x_n). \end{cases}$$

Nous allons choisir différentes valeurs de m (le choix $m = 1$ correspond au paragraphe précédent) et faire dans chaque cas une étude **expérimentale** (les preuves* de nos observations n'étant pas toujours aisées).
Nous choisissons des valeurs de x_0 dans $[0, 1]$ de façon arbitraire.

Premier choix

$$m = 1{,}6 \quad x_0 = 0{,}88.$$

Le calcul des 22 premiers termes de la suite nous conduit à observer que la suite converge vers 0,375.
Exercice : adapter le programme précédent pour obtenir les termes de cette suite.
La limite dépend-elle de la valeur initiale x_0 choisie?
Comment la trouver par un calcul à partir de la fonction f_m?
En représentant graphiquement f_m dans un repère orthonormé, nous visualisons l'évolution des termes de la suite (x_n).
Vérifier que pour toute valeur $x_0 \in]0, 1[$ la suite converge vers le réel a tel que $a = f_m(a)$.
$\left(\text{La résolution de cette équation fournit } a = \frac{3}{8} = 0{,}375.\right)$



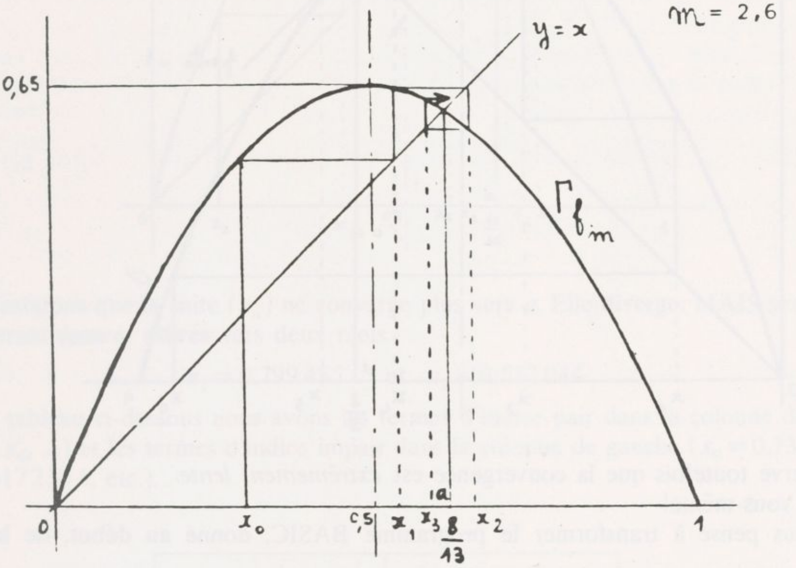
Deuxième choix

$$m = 2{,}6 \qquad x_0 = 0{,}3.$$

Les résultats de l'ordinateur montrent une convergence vers 0,615 384 6...
La figure suivante montre que la convergence se fait (pour toute valeur $x_0 \in]0, 1[$) vers a tel que $a = f_m(a)$.

Le calcul donne $a = \dfrac{8}{13} = 0{,}615\,384\,6...$

On observe que la convergence n'a pas lieu de la même manière pour $m = 1{,}6$ et pour $m = 2{,}6$.
Dans le premier cas, la suite (x_n) est monotone à partir d'un certain rang.
Dans le second cas, à partir d'un certain rang, les suites extraites (x_{2p}) et (x_{2p+1}) sont croissante pour l'une et décroissante pour l'autre.

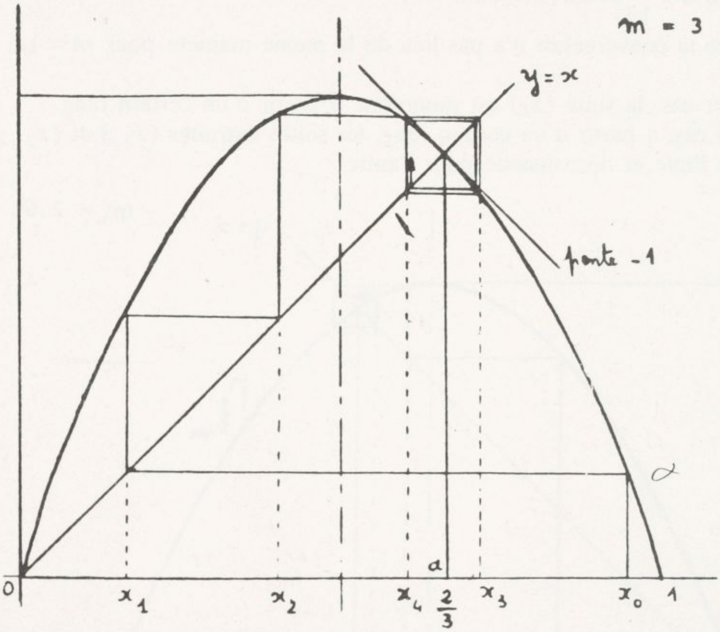


Troisième choix

$$m = 3 \qquad x_0 \in]0, 1[.$$

Comme précédemment la suite converge vers la solution de $a = f_m(a)$.

Ici $a = \frac{2}{3} = 0{,}666\,6...$ (voir graphique ci-après).



On observe toutefois que la convergence est *extrêmement lente.*
Essayez vous-même!
Avez-vous pensé à transformer le programme BASIC, donné au début, de la façon suivante :

— ajouter deux lignes :

```
5 PRINT «Quelle est la valeur de m»?
6 INPUT M;
```

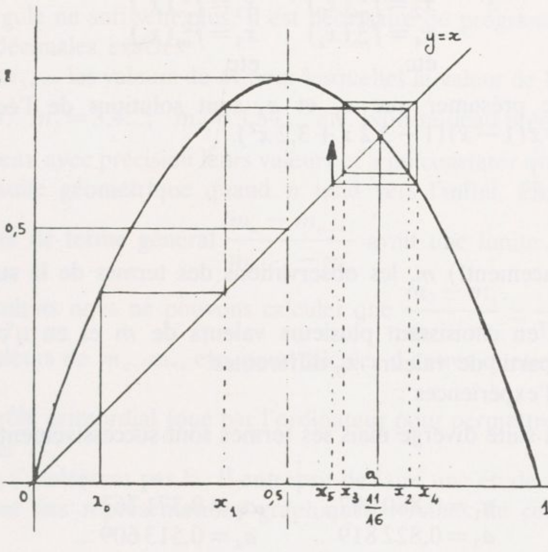
— remplacer la ligne 40 par :

```
40 LET X=M*X*(1-X) : GOTO 30.
```

Quatrième choix

$$m = 3{,}2 \qquad x_0 \in \,]0,\, 1[.$$

Une première surprise!



Nous constatons que la suite (x_n) ne converge plus vers a. Elle **diverge.** MAIS ses termes sont alternativement **attirés** vers deux réels :

$$a_1 = 0{,}799\,455\ldots \quad \text{et} \quad a_2 = 0{,}513\,044\ldots$$

Dans le tableau ci-dessous nous avons les termes d'indice pair dans la colonne de droite (x_0, x_2, x_4, ...) et les termes d'indice impair dans la colonne de gauche ($x_0 = 0{,}738\,988\,5$, $x_1 = 0{,}617\,230\,4$, etc.).

x_{2p+1} $(p \geq 0)$	x_{2p} $(p \geq 0)$
0,738 988 5	0,617 230 4
0,756 022 5	0,592 479 0
0,773 937 0	0,559 867 3
0,788 530 9	0,533 599 7
0,796 387 4	0,518 894 4
0,798 857 6	0,514 189 2
0,799 355 7	0,513 235 7
0,799 439 4	0,513 075 4
0,799 452 9	0,513 049 5
0,799 455 1	0,513 045 3
0,799 455 4	0,513 044 7
0,799 455 5	0,513 044 5
0,799 455 5	0,513 044 5

Essayez vous-même en partant d'une autre valeur initiale $x_0 \in]0, 1[$.
Nous constatons que les suites extraites $(x_{2p})_{p\geqslant 0}$ et $(x_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ convergent respectivement vers a_1 et a_2 et ceci quelle que soit la valeur initiale x_0.
En notant f_m^2 la fonction $f_m \circ f_m$ nous observons que :

$$\begin{array}{ll} x_2 = f_m^2(x_0) & x_3 = f_m^2(x_1) \\ x_4 = f_m^2(x_2) & x_5 = f_m^2(x_3) \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Nous pouvons donc présumer que a_1 et a_2 sont solutions de l'équation $x = f_m^2(x)$ c'est-à-dire $x = 3{,}2^2\, x(1-x)(1-3{,}2\,x+3{,}2\,x^2)$.

Autres choix

En augmentant (doucement!) m, les observations des termes de la suite (x_n) réservent d'autres surprises.
Essayez vous-même en choisissant plusieurs valeurs de m et en n'oubliant pas, pour chacune d'elles, de partir de valeurs x_0 différentes.
Voici des résultats d'expériences :

• Pour $m = 3{,}523$ la suite diverge mais ses termes sont successivement **attirés** par quatre réels :

$$\begin{array}{ll} a_1 = 0{,}880\,097\ldots & a_2 = 0{,}371\,767\ldots \\ a_3 = 0{,}822\,819\ldots & a_4 = 0{,}513\,609\ldots \end{array}$$

Chacune des suites extraites (x_{4p}), (x_{4p+1}), (x_{4p+2}) et (x_{4p+3}) converge vers l'un des quatre réels.

• Pour $m = 3{,}55$ les termes de la suite (x_n) sont **attirés** par huit réels :

$$\begin{array}{ll} 0{,}354\,800\,45 & 0{,}812\,655\,67 \\ 0{,}540\,474\,63 & 0{,}881\,684\,35 \\ 0{,}370\,325\,56 & 0{,}827\,805\,12 \\ 0{,}506\,030\,51 & 0{,}887\,370\,9. \end{array}$$

Le tableau suivant indique quelques valeurs du nombre N de réels vers lesquels sont attirés les termes de la suite (x_n) selon les valeurs de m.

m	2	2,6	3	3,01	3,1	3,4	3,45	3,5	3,54	3,55
N	1	1	1	2	2	2	4	4	4	8

Nous suggérons au lecteur d'essayer de déterminer avec plus de précision la valeur de m pour laquelle a lieu le saut de $N = 2$ à $N = 4$ puis celle pour laquelle a lieu le saut de $N = 4$ à $N = 8$, etc.

Les observations de Feingenbaum

Le lecteur qui a suivi nos consignes a pu se rendre compte des difficultés qui se présentent pour détecter avec précision les valeurs de m pour lesquelles se produisent les sauts. Huit chiffres après la virgule ne suffisent plus; il est nécessaire de programmer en exigeant un grand nombre de décimales exactes.
Appelons m_1, m_2, m_3, ... les valeurs de m pour lesquelles la valeur de N subit un saut :

$$m_1 = 3; \quad m_2 = 3{,}4...; \quad m_3 = 3{,}54...; \text{ etc. (voir tableau précédent).}$$

Feingenbaum a obtenu avec précision leurs valeurs et a pu constater que la suite (m_n) a un comportement de suite géométrique quand n tend vers l'infini. Plus précisément, il a constaté que la suite de terme général $\dfrac{m_n - m_{n-1}}{m_{n+1} - m_n}$ avait une limite $A = 4{,}669...$

A l'aide de nos résultats nous ne pouvons calculer que $\dfrac{m_2 - m_1}{m_3 - m_2} \simeq \dfrac{3{,}4 - 3}{3{,}54 - 3{,}4} \simeq 7{,}14$. Il nous manque les valeurs de m_4, m_5, etc. pour calculer d'autres quotients et observer s'ils s'approchent de A.
Nous constatons le rôle primordial joué par l'ordinateur pour permettre à Feingenbaum de détecter et d'évaluer A.
Ses observations ne s'arrêtèrent pas là. Il entreprit de faire une étude analogue en partant de fonctions f ayant des représentations graphiques voisines de celle que nous avons utilisée.
Pour qu'il en soit ainsi, f doit être une fonction :

a) continûment dérivable par morceaux sur $[0, 1]$;

b) qui vérifie $f(0) = f(1) = 0$;

c) qui admet un unique maximum $M < 1$ atteint pour $x = \dfrac{1}{2}$;

d) qui est croissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et décroissante sur $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

C'est le cas par exemple de :
$f : x \longmapsto \sin \pi x$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ (attention : x est une mesure en radians);
f_m est alors la fonction $x \longmapsto m \sin \pi x$.
Pour ne pas sortir de l'intervalle $[0, 1]$, il est nécessaire de faire varier m entre 0 et 1.
Des observations semblables peuvent être faites sur les suites (x_n) définies par :

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_{n+1} = m \sin \pi x_n \quad \text{pour } n \geqslant 0. \end{cases}$$

Par exemple :
pour $m = 0{,}4$ et $x_0 \in]0, 1[$ la suite converge vers $0{,}364\,088...$
pour $m = 0{,}75$ et $x_0 \in]0, 1[$ la suite est attirée par deux valeurs $a_1 = 0{,}744\,033...$ et $a_2 = 0{,}540\,176...$
En appelant, comme précédemment, m_1, m_2, ..., m_n, les valeurs de m pour lesquelles se produit un saut, Feingenbaum a constaté que la suite $\dfrac{m_n - m_{n-1}}{m_{n+1} - m_n}$ avait encore une limite et que cette limite était égale à la limite A précédente.

Cette dernière observation est remarquable : le réel A semble indépendant du choix de la fonction *f*. Une preuve* a pu être apportée à cette observation.
A est appelé depuis le *nombre de Feingenbaum.*

Conclusions

1) Le premier paragraphe constitue un exemple intéressant d'une étude expérimentale pouvant être proposée à des élèves de Première ou Terminale. Parmi les conjectures* détectées certaines peuvent être démontrées.

2) L'étude globale de Feingenbaum illustre de quelle manière l'ordinateur peut être créateur de problèmes*.

Bibliographie : [483], [457]. M. G.

Auto-évaluation

V. - AUTONOME (TRAVAIL)
- GUIDANCE
- P.P.O.

Autonome (travail)

V. - GUIDANCE

Travail autonome en mathématiques

Dans l'abondante documentation réunie par N. Leselbaum [135], les pages concernant les mathématiques sont rarissimes. Cela peut paraître paradoxal, étant données d'une part l'essence même de l'activité mathématique, et d'autre part la tendance actuelle des manuels qui réduisent très sensiblement l'aspect axiomatique, pour ne pas dire dogmatique*, des activités proposées aux élèves par leurs professeurs, surtout si l'on compare avec ce qui se passait il y a seulement cinq ans.

Nous allons rappeler ici *quelques-unes* des modalités, préoccupations, possibilités d'*un* Travail autonome en mathématiques. Bien que tout à fait distinctes de la stricte relation active à la documentation ou au manuel [435], elles n'auront pas grand'chose d'inédit pour ceux qui ont gardé quelques liens avec les spécialistes de l'Enseignement de notre discipline - et leur APMEP -, la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - et les IREM [V. II - 4] - voire les mouvements pédagogiques divers - ou les Sciences de l'Education et les théories de l'apprentissage*.

Autonomie et "Travail autonome".

Pour éviter tout malentendu éventuel, distinguons d'emblée "travail autonome" et "autonomie". Cette dernière se situe au niveau des finalités, d'ailleurs plurielles, de l'Enseignement, évoquées dans les programmes et les instructions. Elle est largement renforcée dans les directives récentes. Il semble toutefois que l'Autonomie ne soit pas descendue au rang d'objectif d'enseignement pour chaque professeur, dans chaque classe, même si certains en font le "critère" d'une évaluation* plutôt favorable en parlant de certains élèves qui ont mûri...; n'en parlons pas. Et ne parlons pas non plus de la relation au pouvoir - construite? subie? entretenue? - instaurée par le Maître à l'intérieur des murs de "sa" classe... ou du couloir qui y mène... Sur l'Autonomie, le débat - si débat il y a - reste institutionnel voire politique. Et s'il a lieu, il a lieu ailleurs.
Revenons plus simplement à cette modalité pédagogique qu'est le "travail autonome", dans laquelle l'Enseignant ne relègue pas l'apprenant au statut d'Auditeur - voyeur d'une connaissance cristalline, mais l'instaure *artisan de la construction de son savoir*.
Dans l'hypothèse où certains lecteurs auraient à s'approprier le concept de "travail autonome" ("T.A.") - mais nous continuons à préférer penser qu'ils le feront mieux à partir d'un vécu en classe, construit, critiqué, théorisé - qu'il nous soit quand même permis de ne pas renvoyer un exemple à plus tard ou plus loin, mais de l'incorporer à cette présentation.

La fiche

Notre premier exemple s'appuie sur une fiche de Cinquième, vécue en octobre 83 à Marseilleveyre et titrée "ESP 4" car trois autres fiches sur l'"Espace" avaient déjà été travaillées. Sans entrer dans trop de détails, rappelons qu'en T.A. on pratique beaucoup, mais pas seulement, la *Fiche*, et plus précisément la *"feuille de tâche"*, parfois baptisée *"feuille de guidage"*.
Les fiches, moins volatiles que la poussière de craie et moins légères que le vent, sont le LIEU DE L'EXPLICITE - mais il demeure du non-dit... - d'une certaine PERMANENCE - non définitive, bien sûr - d'une production personnelle du professeur ou d'autrui, d'un geste de DON personnalisé (ce qui fait toujours un peu plaisir...).
Rappelons qu'il existe des fiches de multiples fonctions (Enoncé, Collectes, Documentation, Evaluation, Classification, etc.). Celle de l'exemple 1 est une fiche "MENU" ou mieux encore une fiche "CARTE" puisque cela peut évoquer l'idée de *"Carte d'Etude"* [V. GUIDANCE] que l'on peut, avec raison, préférer au "programme de travail" trop behavioriste [V. BEHAVIORISME].

Ajoutons que la meilleure des fiches est *"pédagodégradable"* et remplacée par l'utilisateur, après passation, par une ou plusieurs autres fiches... Mais lisons donc, enfin, la fiche "ESP 4" ci-après.

OCT 83 ESP 4
5ème 10

Modalités de travail

- 6 équipes de 4
- Temps : 4 heures en classe (professeur présent)
  plus "temps libre" entre les séances.
- Tous documents autorisés.

Production des apprenants

- Chaque équipe produit trois objets O1, O2, O3 (Voir "Sujet" ci-dessous) et un "dossier" global sur les trois objets.
- Chaque élève est responsable d'un objet ou du dossier global.

Evaluation

- Pour chaque objet construit :
  . netteté des arêtes [-1 / 0 / 1 / 2]
  . stabilité du solide [-1 / 0 / 1 / 2]
  [-1 : insuffisant; 0 : passable; 1 correct; 2 : bien]
- Pour le dossier d'accompagnement :
  . format 21 x 29,7 [0 / 1]
  . mise en page (Cf consignes du professeur de dessin)
  . "développements" de solides, de remarques...

Sujet

En désignant comme précédemment les six faces d'un pavé parallélépipédique par
B pour Bas, A pour Avant, G pour Gauche,
H pour Haut, F pour Fond, D pour Droite,
et en convenant que "...rect..." veut dire "...est rectangle..." et que "...p..." veut dire "...est parallélogramme..."

	B	H	A	F	G	D
Dans l'objet O1	rect.	rect.	rect.	rect.	p.	p.
Dans l'objet O2	rect.	rect.	p.	p.	p.	p
Dans l'objet O3	p.	p.	p.	p.	p.	p.

Objectifs de l'enseignant
- Faire distinguer le parallélisme de la non-perpendicularité,
- (à partir de réalisations, en bristol, de constructions* géométriques)
- (en débat) [V. PROBLEMES 5]

Voici, avant relecture, quelques informations nécessaires :

Au départ, un "problème".

La lecture des *"objectifs"* - d'ailleurs *"non opérationnels"* - tels qu'ils sont communiqués ([135], [103], [124]) impose de préciser les prévécus:

1. A la demande du collègue de physique, le programme de mathématiques a été attaqué par "L'Espace"; cela aura plus tard des répercussions sur l'approche de l'arithmétique avec une certaine antériorité accordée aux dessins de treillis et simplexes. Aucun ordre n'est jamais imposé au professeur dans l'agencement des chapitres.

2. D'autres activités sur l'Espace ont déjà eu lieu depuis quatre semaines. En particulier, lors de manipulations antérieures de pavés droits, j'avais diagnostiqué chez certains ce que A. Bouvier appellerait un théorème-élève [45] [V. ERREURS]: "Deux arêtes sont parallèles puisqu'elles ne sont pas perpendiculaires" (ou de directions "orthogonales", distinction avec "perpendiculaires" encore partiellement éludée, début octobre).

3. Il faut donc *déclencher un problème* au sens heuristique* du terme, (et non pas seulement obligation hebdomadaire), qui *déstabilise* cette connaissance: "parallèles = non perpendiculaires" et permette après dépassement du *conflit* [45] [V. CONFLIT DE CONNAISSANCES], une restructuration plus fine: "non parallèles = perpendiculaires ou non".

4. La communication des objectifs, même partielle, pose une série de difficultés qui seront évoquées en d'autres pages [V. P.P.O.]. Toutefois en T.A. elle est le LIEU DU CHOIX des priorités retenues pour la séance ou la séquence considérée. Et de toute manière, elle nous paraît moins néfaste et obscurantiste que la non-communication de non-objectifs...; d'ailleurs, en T.A., elle est rendue nécessaire par la décentralisation de l'activité.

En parler

Pour la séquence examinée les élèves travaillent en *"équipes"* de quatre exactement. Ceci est lié à la nature spécifique de la tâche proposée [246]. A d'autres moments, ils pourront être quatre au plus, ou par deux, ou même isolés seuls, s'il faut tester les acquisitions des connaissances.

Mais rappelons [224] que pour avoir des chances d'être approprié, il est établi qu'un concept doit être :

1. engendré par un problème;
2. ancré dans des manipulations*;
3. révélé par la verbalisation (externe, puis interne);
4. fixé par l'application voire le transfert.

Et l'équipe est le LIEU DE LA VERBALISATION, rendue possible et même systématique en T.A. d'équipes.
Ceci nous amène naturellement à évoquer la question du *bruit*: Oui! six équipes qui travaillent, réfléchissent, débattent, produisent, le font dans un certain bourdonnement, qui d'ailleurs, n'est pratiquement jamais gênant.. Que l'une des personnes (élèves) fasse une remarque "hors sujet" à ses partenaires, et cela crève le bruit de fond comme un avion le mur du son: il est très facile de distinguer un bruit de travail d'un bruit de dissipation, même minime. Un "bon" bruit *d'activité* nous paraît préférable au silence systématique et morbide de certaines autres séances... Exception faite, bien sûr, pour un cours magistral, ou un exposé, centralisés, désirés, consécutifs à un problème rencontré, et qui y trouvera des éléments de solution.

Agir

Nous distinguons l'*"énoncé"* mathématique parfois dénommé sujet, de *l'énoncé des consignes des tâches* à réaliser. Il arrive, surtout dans notre discipline, que dans certains textes, mêmes classiques, il y ait un chevauchement de ces deux aspects et que l'énoncé classique assure plus ou moins bien ce que J. Nunziati étudie ailleurs sous le nom de *guidage* [V. GUIDANCE]; notamment par la présence de verbes et en particulier de verbes d'action. Mais attention! tout verbe d'action ne déclenche pas forcément une activité *réalisable*; alors il faudra veiller à ne pas soumettre à évaluation n'importe quelle activité!...
Voici, au passage, une liste double de verbes traduisant une palette d'*activités de première urgence*, sans la pratique desquelles un concept a toute chance d'être *mal formé* (du moins en situation d'apprentissage). Mais, sauf exception, ces verbes n'induisent pas de consignes de tâches d'apprentissage :

1. Sentir / Bouger
2. Manipuler / Construire
3. Représenter / Dessiner
4. Rédiger / Ecrire
5. Observer / Lire
6. Parler / Dire
7. Ecouter / Suivre
8. Compter / Calculer
9. Transposer / Appliquer (un algorithme)
10. Comparer / Repérer
11. Traduire / Coder
12. Conjecturer / Subodorer
13. Convaincre / Prouver
14. Réduire / Simplifier
15. Tester / Evaluer

Leur ordre n'est pas immuable; pédagogie différenciée oblige! mais il y a au plus 15! façons de préparer l'approche d'un concept pour un apprenant considéré.

Tâtonner - Créer

La *Tâche* de l'élève aboutit à une *production* (personnelle dans le cas de l'exemple choisi "ESP 4" : un objet distinct ou un dossier). Cette idée de production est difficilement dissociable de celle d'apprentissage*. Usuellement, elle est réduite, essentiellement, à la remise du "devoir" hebdomadaire, d'un exercice d'application de la leçon, à la récitation de la leçon, ou au remplissage pertinent du tableau, en "public", qui mélange les genres...
Le T.A. des équipes d'élèves, lors de l'accomplissement des tâches d'apprentissage, permet l'expression d'une grande *diversité* ou *différenciation*. Et l'on verra dans la confrontation ou restitution au groupe, suivant les équipes, les fiches, ou bien même suivant les modes ou les besoins, fleurir, en plus des feuilles du classeur quotidien personnel, des affiches, des maquettes, des photos, des mini-exposés et nous n'écartons pas l'éventualité d'envisager comme dans d'autres disciplines des montages audio ou diapo ou d'autres réalisations audiovisuelles ou informatiques... Ici pour "ESP 4", ce fut la "Première FOIRE GÉOMÉTRIQUE de Cinquième", installée sur un tréteau au fond de la salle de classe et où chaque équipe eut son stand d'exposition de trois objets et un dossier d'accompagnement...
Par ailleurs, l'accomplissement de la tâche est le LIEU de l'ERREUR SURMONTÉE, qui est donnée depuis G. Bachelard comme passage obligé de tout apprentissage [V. PROBLEME]. Et l'on trouvera dans d'autres pages que l'erreur révélée porte sur des pré-requis qui n'étaient pas des pré-acquis. D'où un approfondissement régulateur des situations* d'apprentissage antérieures avec l'aide du professeur devenu à l'occasion *personne ressource-documentaire*.

Evaluer

La production réalisée peut être l'OBJET D'UNE ÉVALUATION* (Co-évaluation? Inter-évaluation? Auto-évaluation?) RÉGULATRICE et FORMATIVE [272], [435], [472].

Disons simplement que pour "ESP 4", l'exposition étant réalisée, chacun n'avait plus qu'à la visiter avec pour nouvelle tâche de proposer une évaluation de chaque objet ou dossier en fonction des *critères* initialement proposés, convenus et appropriés; toutes les appréciations ont été rassemblées dans un grand tableau de 24 x 24 entrées affiché en classe : "l'élève x, sur l'objet y, propose la note z". Cela peut avoir lieu très calmement, à tour de rôle pendant que le reste de la classe commence à étudier les fiches suivantes(*a*) :
. DES IND 1 (dessin industriel 1 documentation)
. ESP 5 VOL 2 (Espace 5. Volume 2)
qui permettent de voir si l'objectif initialement annoncé ("parallèles", "perpendiculaires" ou "rien") est effectivement atteint. Il le sera pour une partie des élèves et pour une partie des activités décrites au cinquième paragraphe. Pour eux, commencera alors l'OUBLI, que seule peut combattre une progression en SPIRALE, recouvrant des champs didactiques multiples, sur lesquels se retrouveront avec profit ceux qui n'ont pas résolu le conflit initial au cours de cette séquence.

Au cours de ces activités *amples et différenciées, périodiques et conviviales*, les retombées cognitives* sont plus riches que lors du déroulement linéaire, même vivant, de notions dont le programme réclame la présentation, ou mieux encore la rencontre (la fréquentation?). Jamais aucun de mes élèves de cinquième n'avait autant "construit" de rectangles, de parallélogrammes, de carrés, de losanges, ou de trapèzes refusés en cours de route; nous avons même eu des quadrilatères gauches ou mixtilignes!... ce qui n'est pas sans rebondissements mathématiques ou didactiques!
Quelques tests(*a*) réalisés quelque temps plus tard ont donné :

0% d'erreurs d'identification de figures;

14% d'erreurs de lecture de figures (liées à une erreur de repérage-plan subtil dont l'objectif n'avait pas été communiqué);

0% d'erreurs de construction de figures (sur papier quadrillé);

60% environ d'erreurs de caractérisation des figures (qui n'avait pas fait l'objet d'un apprentissage) d'où une inflexion donnée et acceptée aux objectifs d'expression écrite rigoureuse pour les activités qui suivront: constructions géométriques sur papier uni avec les instruments de dessin, à dicter au téléphone, ou sur cassette,...).

Remarque : Au passage et à la demande (miniproblème?) ont été dictées (mais oui!) deux définitions de l'objet O1 qui une fois construit peut être vu "droit" ou "penché":
"tronc de prisme droit à base parallélogramme"
"tronc de prisme oblique à base rectangle et à sections parallèles".

Transférer

La séquence présentée touche à sa fin. Les six fiches retenues (ESP 4 et les cinq suivantes) ne sont que les photos jaunies de ces huit heures en cinquième :
ESP 4 : 4 heures
Les deux suivantes ESP 5, VOL 2 : 3 heures
Les trois dernières : FIG1, FIG2, FIG3 : 1 heure.
Réservons au prochain ... manuel de "Didactique-évaluation" l'examen des inconvénients de la stratégie pédagogique qui sous-tend la mise en place de cette séquence.
En attendant, et pris dans le feu de l'action, le lecteur,
... qui aurait un problème pédagogique,
... pourrait, en équipe,
... transposer la technique suggérée par les titres d'"ESP 4",
... à tout autre chapitre, ou niveau :
A savoir, sur une fiche de format 21 x 29,7 ...

1. Comment vont faire les élèves?
   Que vont-ils produire? Quand?
2. Que pourrons-nous évaluer?
3. Qu'apprennent-ils?
4. Quels sont les objectifs du professeur?

(En particulier désire-t-il rendre plus autonomes, *sans tarder*, les élèves sur tel comportement mathématique?).

(*a*) L'auteur se tient à la disposition du lecteur pour lui communiquer ces documents.

Un seul conseil : Ne pas tenter trop longtemps de séparer l'un des alinéas des trois autres, le pupitre ne tient que sur ses quatre pieds...

YC.G.

Bibliographie complémentaire : [331], [146], [153], [162].

Behaviorisme

V. - COMPORTEMENT
- P.P.O. 1 - C.a.
- PROGRAMMÉ (ENSEIGNEMENT)

La psychologie du comportement ou behaviorisme naît en Amérique avec Watson qui introduit le terme en 1913. Elle apparaît comme une réaction contre la psychologie dominant jusqu'alors, orientée vers l'étude de la vie intérieure et fondée sur l'examen intérieur de soi : l'introspection. L'objet pas plus que la méthode, ne pouvaient satisfaire aux exigences d'une connaissance scientifique.
En faisant du comportement (behavior, en anglais) l'objet d'étude de la psychologie, Watson accomplissait une véritable rupture épistémologique : il donnait à la psychologie un objet susceptible d'observations, de manipulations* et de mesures expérimentales, lui conférant du même coup le statut d'une science. Sa définition du comportement, jusque dans ses excès, est révélatrice de cette rupture :
"L'ensemble des réactions objectivement observables qu'un organisme généralement pourvu d'un système nerveux oppose aux stimuli, eux aussi observables dans le milieu dans lequel il vit."
Dès lors, la tâche de la psychologie est rigoureusement déterminée : "Le stimulus étant donné, la psychologie doit prédire la réponse, ou inversement la réponse étant donnée la psychologie doit spécifier la nature du stimulus."
Programme intenable, parce qu'outrancièrement réducteur. Les psychologues behavioristes qui suivront se rendront compte de la nécessité de faire intervenir l'état du sujet : maturité, exercice antérieur, degré de vigilance ou de fatigue..., sous la forme de variables intermédiaires entre la perception du stimulus et la réaction. Cependant, le sujet est encore considéré seulement comme un organisme.
Malgré son aspect réducteur, le behaviorisme n'est pas dépourvu d'applications pédagogiques. Le privilège qu'il accorde au milieu, source des stimuli, sur l'hérédité le conduit à concevoir l'apprentissage* comme fondamental pour le comportement et à le fonder sur une théorie du conditionnement, à l'origine de l'enseignement programmé*. D'autre part, la constitution de la pédagogie par objectifs [V. P.P.O.] n'est pas séparable du contexte behavioriste qui a dominé la psychologie américaine pendant la première moitié du XX^{e} siècle : c'est la détermination des savoirs en termes de comportements observables qui permet d'opérationnaliser* des intentions pédagogiques sous forme

d'objectifs*. Le soubassement behavioriste fait que la P.P.O. a à faire face aux questions que suscite toute perspective behavioriste et que D. Hameline résumait ainsi en 1978: "L'opérationnalisation des intentions pédagogiques conduit-elle à un surcroît d'encadrement et de domestication? En particulier, l'opérationnalisation en termes de comportements observables (Behavioral objectives) n'est-elle pas, dans sa rigueur anti-mentaliste, une arme matérialiste et totalitaire au service de la productivité? ...".

J.G.

Buñuel

L'effet Buñuel

Le grand public connaît bien Luis Buñuel pour son talent cinématographique si personnel. A. de Peretti lui a fait pénétrer le domaine de la formation en donnant son nom à un "effet de fermeture" que l'on peut fréquemment repérer non seulement dans des situations de formation* mais dans beaucoup d'autres :

"Dans *l'Ange exterminateur*, des nobliaux ou de grands bourgeois vont s'investir dans une somptueuse demeure où ils sont venus souper au sortir d'un opéra. Le personnel de la maison, à l'exception du maître d'hôtel, les a abandonnés: poussé par le sentiment d'une différence ségrégative et menaçante.

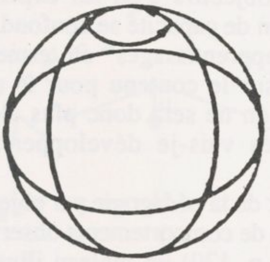
Après le souper froid, à la suite de nombreux échanges frivoles ou sournois, une femme chante. Les applaudissements terminés, les uns et les autres prennent congé et s'apprêtent à partir. Mais c'est alors que se produit l'effet symbolique de la fermeture: chaque personne s'évertue à convaincre chaque autre que les portes sont closes et qu'il est impossible de sortir. Personne ne va vérifier : toute initiative est arrêtée tant on s'empresse d'assurer que quelqu'un y est allé. Chacun se rapproche de tous et devient complice de l'enflure de l'assujettissement. L'accointance se resserre de façon paroxystique: on est entre soi, entre gens du monde, emmurés, aux perceptions closes, aux sensations faussées.

La demeure est mythiquement fermée. Mais les gens du dehors, voyant que nul n'en sort, jugent pour leur part qu'il est impossible d'y entrer. Par suite, ils renoncent à voir si les portes sont ou non réellement closes. Il semble qu'une puissance (ou impuissance) magique interdise le passage des seuils et l'apport de quelques secours concrets." [185].

Face à un problème mathématique, il nous arrive aussi de nous enfermer, de bloquer dès son apparition toute idée nouvelle et de la sorte de n'entrevoir aucune solution.

En voici un exemple : Gérard Lepage nous a communiqué des extraits d'un ouvrage dont un chapitre "Enigmes pour apprendre à raisonner" présente une question classique que j'ai fréquemment proposée à des groupes d'enseignants en formation. Je livre ici le texte tel qu'il est imprimé.

"Raisonnez avec imagination :
Un chasseur qui suit un ours à la trace fait un kilomètre vers le sud, puis un deuxième vers l'est et un troisième vers le nord..., pour se retrouver à sa position de départ. De quelle couleur est l'ours?
Nous avons l'habitude de raisonner en fonction de notre expérience, ce qui restreint le champ de nos hypothèses. Ainsi, dans ce problème, on a tendance à voir les directions comme perpendiculaires à un point, en partant de l'idée qu'il s'agit d'une surface parfaitement plane.
Or *si le point de départ se confond avec le point d'arrivée, c'est que le chasseur a suivi un itinéraire triangulaire*. Réfléchissez un peu à la géographie et à la surface du globe. *Le seul endroit sur terre* où cela pourrait se produire est le pôle Nord. L'ours est donc blanc, c'est un ours polaire".



Aux lecteurs qui liraient cette énigme pour la première fois, nous suggérons de la relire *attentivement*. Le raisonnement semble convaincant, n'est-ce pas? Pourtant *le problème posé admet* - contrairement à ce qui est imprimé - *une infinité d'autres solutions*. Pour les trouver, il faut d'abord vaincre "l'effet Buñuel" et admettre qu'il peut effectivement posséder d'autres solutions que la solution "triviale" présentée ici. Ensuite, on peut, par exemple, reprendre point par point la démonstration rédigée ci-dessus. Bien que particulièrement convaincante, *elle est fausse*, inexacte. Comme nous le reprochons parfois à nos élèves, elle introduit une hypothèse supplémentaire. L'avez-vous trouvée? Relisez bien le texte.
Cherchez cette énigme. Toute personne qui cherche suffisamment longtemps finit par trouver d'autres solutions; une infinité d'autres.
Et en cherchant encore vous trouverez d'autres infinités : une infinité d'infinités!
Finalement, pouvez-vous trouver *toutes* les solutions?
Ensuite, posez ce problème à différents groupes et à différentes personnes. Vous pouvez faire de remarquables observations.
Et dans vos classes, voyez-vous fonctionner "l'effet Buñuel"? Comment le décelez-vous?

A.B.

Capacité

V. - APTITUDE
- COMPÉTENCE
- HABILETÉS
- PERFORMANCE
- P.P.O.

D'une façon générale, une capacité est un ensemble de facultés nécessairement requises pour l'accomplissement d'une tâche et qui se manifestent dans un comportement* adapté qui exprime la compétence.
Lorsque l'on opérationnalise* des objectifs*, on les exprime souvent en termes de capacité : "être capable de". La notion de capacité se confond alors parfois avec celle de compétence. Le fait de définir des apprentissages* en termes de capacités rompt avec l'enseignement traditionnel centré sur le contenu pour le centrer sur l'élève ou plus généralement l'apprenant. La question ne sera donc plus alors : quel contenu vais-je enseigner? mais : quelles capacités vais-je développer et quels comportements témoigneront de ce développement?
C'est un des problèmes fondamentaux de la pédagogie par objectifs [P.P.O.] que de définir les objectifs en termes de capacités et de comportements observables.
On trouvera dans Hameline ([103], p. 120) un tableau illustrant, sur un exemple, les articulations entre capacités et comportements.

JP. G.

Catastrophes

V. - RUPTURES
- II 2 h
- III § 4

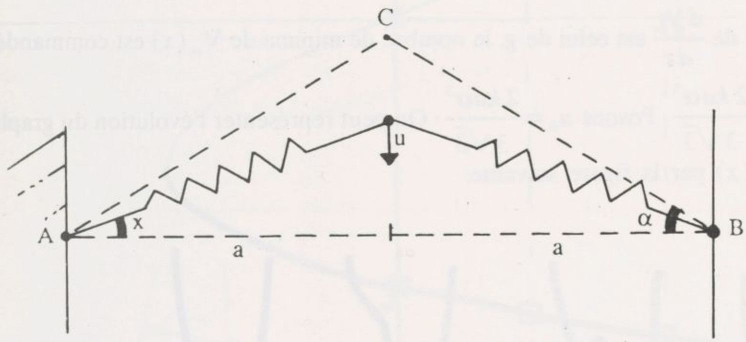
Regard sur la théorie des catastrophes

"Il faut savoir que le conflit est universel, que la justice est une lutte et que toutes choses s'engendrent selon la lutte et la nécessité."
Héraclite

La théorie des catastrophes, apparue en 1972 avec STABILITE STRUCTURELLE ET MORPHOGENESE de René Thom [229], connaît un grand succès public mais suscite aussi d'âpres polémiques. Le terme même de catastrophes semble avoir été choisi pour provoquer l'intérêt des cercles les plus larges, bien au-delà du monde des mathématiciens. Son auteur a reconnu depuis qu'il aurait pu l'appeler théorie des discontinuités. Plus fondamentalement, le projet et l'ambition de cette théorie sont à la hauteur de son succès: puisant ses idées essentielles dans des théories mathématiques très sophistiquées, elle propose une méthode absolument nouvelle pour étudier et modéliser les discontinuités physiques et plus généralement la notion de forme ou de morphologie.

Un exemple mécanique : le flambage.

On considère l'arche représentée par la figure 1.



Il s'agit de deux ressorts dans un plan vertical, articulés en A et B à un support fixe, et liés entre eux par l'autre extrémité. La distance de A à B est $2a$, et lorsqu'aucune charge n'est appliquée en C, chaque ressort fait avec l'horizontale un angle α. Lorsqu'on augmente le poids u placé en C, en partant de $u=0$, le point C descend peu à peu, de sorte qu'à chaque valeur de u correspond un angle x pour lequel le point C se stabilise. Puis, pour une certaine valeur u, une catastrophe se présente : le point C fait un saut brutal pour se placer de l'autre côté du segment AB. On dit que l'arche « flambe ».
Pour simplifier la modélisation de ce phénomene, on suppose que l'angle α est petit, ce qui permet d'écrire l'énergie V du système en fonction du poids u et de l'angle x :

$$V = V_u(x) = aux + \frac{1}{4} k a^2 (\alpha^2 - x^2)^2$$

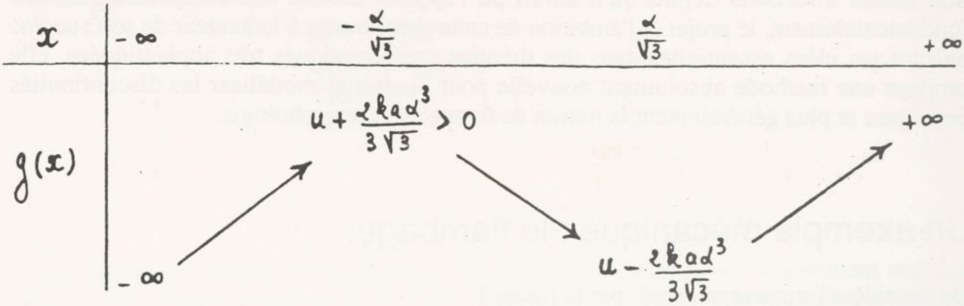
où le premier terme est attribué au poids placé en C et le deuxième à la compression des ressorts. Un tel système évolue de façon à maintenir son énergie aussi basse que possible. Ainsi, pour chaque valeur de u, la position de C est donnée par un angle $x(u)$ correspondant à un minimum local de la fonction $V_u(x)$.

Donc $x(u)$ est une solution de l'équation $\frac{dV_u}{dx}(x) = 0$.

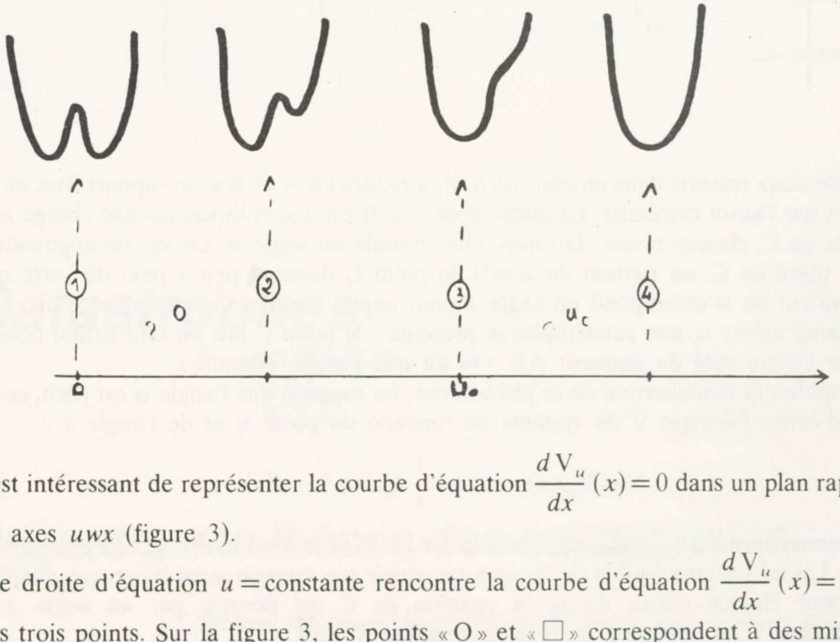
Or : $$\frac{dV_u}{dx}(x) = ag(x),$$

avec : $g(x) = u - kax(\alpha^2 - x^2)$ et $g'(x) = ka(3x^2 - \alpha^2)$.

On obtient ainsi le tableau de variation suivant pour la fonction g :

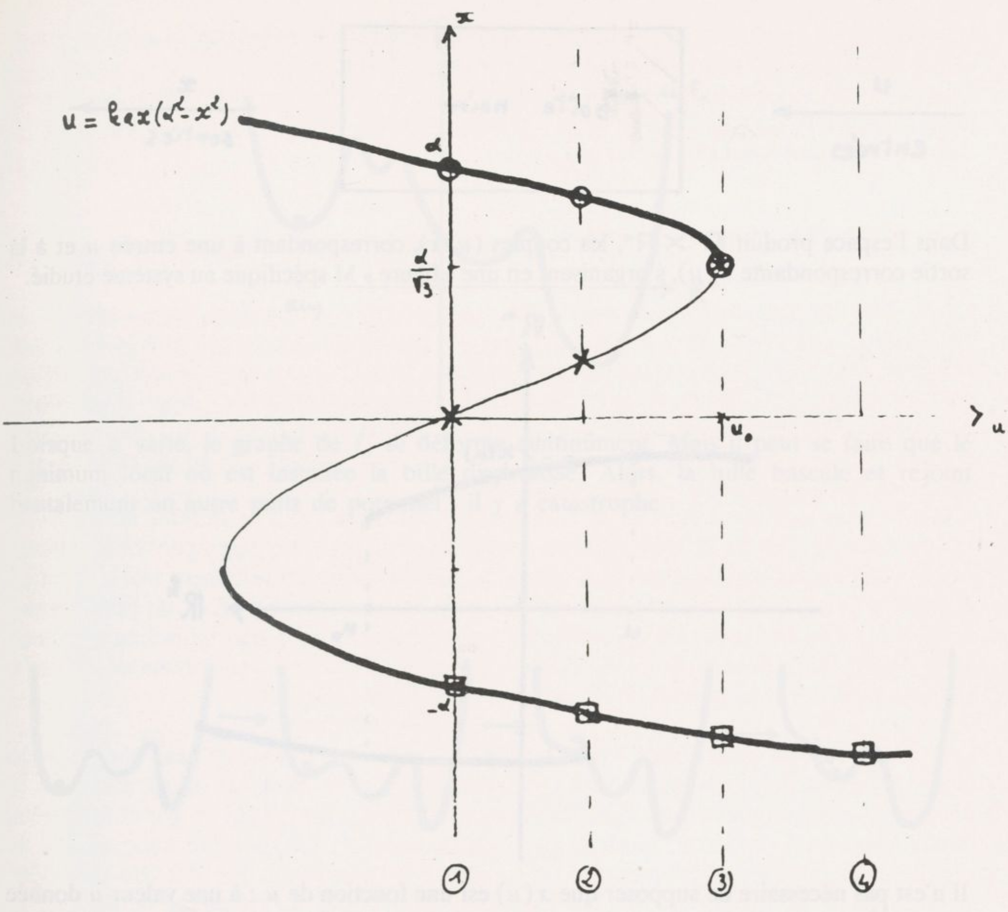


Puisque le signe de $\dfrac{d\mathrm{V}_u}{dx}$ est celui de g, le nombre de minima de $\mathrm{V}_u(x)$ est commandé par le signe de $u - \dfrac{2\,ka\alpha^3}{3\sqrt{3}}$· Posons $u_0 = \dfrac{2\,ka\alpha^3}{3\sqrt{3}}$· On peut représenter l'évolution du graphe de la fonction $\mathrm{V}_u(x)$ par la figure suivante.



Il est intéressant de représenter la courbe d'équation $\dfrac{d\mathrm{V}_u}{dx}(x) = 0$ dans un plan rapporté à des axes uwx (figure 3).

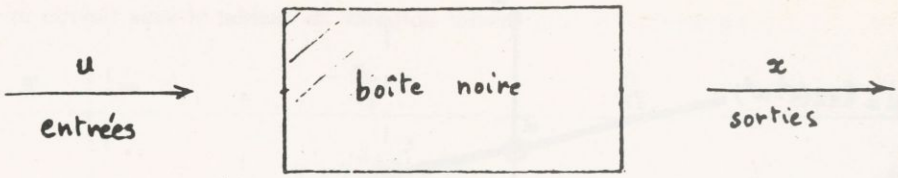
Une droite d'équation $u =$ constante rencontre la courbe d'équation $\dfrac{d\mathrm{V}_u}{dx}(x) = 0$ en au plus trois points. Sur la figure 3, les points « O » et « □ » correspondent à des minima de $\mathrm{V}_u(x)$, alors que « X » est associé à un maximum. Lorsque u varie dans l'intervalle $[0,\ u_0[$, l'état de l'arche est décrit par l'angle x associé à « O ».
Mais quand u traverse en croissant la valeur u_0, les points « O » et « X » se rencontrent et disparaissent. C'est alors que se produit « la catastrophe de flambage » : la solution $x(u)$ passe brutalement de $\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$ à une valeur inférieure à $-\alpha$.



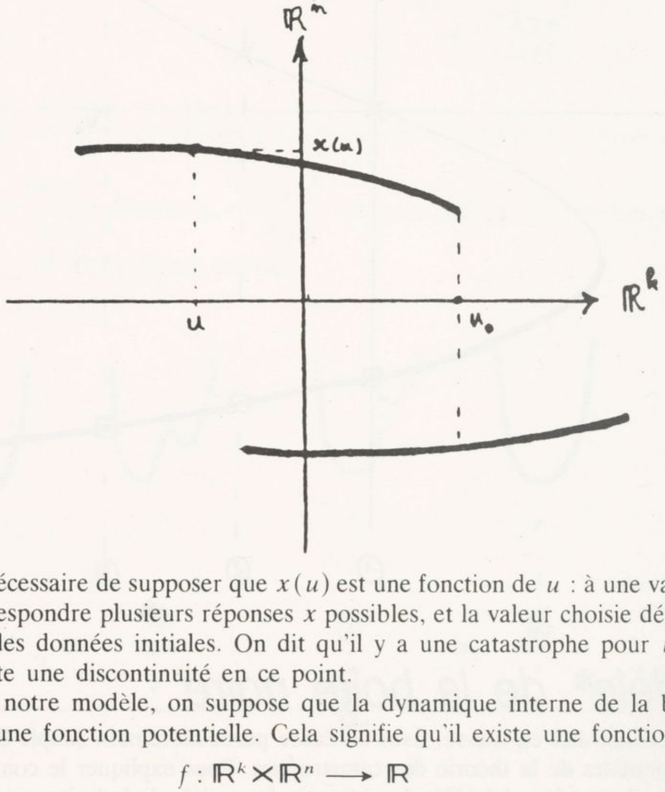
Le modèle* de la boîte noire

L'exemple précédent met en œuvre, dans un cadre particulièrement simple la plupart des notions fondamentales de la théorie des catastrophes. Pour expliquer le contexte général de cette théorie, il peut être éclairant de présenter le modèle de la boîte noire. Une boîte noire est un système qui ne communique avec le monde extérieur que par l'intermédiaire des entrées (inputs) et des sorties (outputs).

A tout instant, pour des entrées fixées, le système répond par des sorties. On se place dans le cas où les entrées et sorties sont des suites de valeurs numériques : une entrée est représentée par un point $u=(u_1, ..., u_k)$ de $\mathbb{R}^k$, une sortie par un point $x=(x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$.



Dans l'espace produit $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, les couples (u, x), correspondant à une entrée u et à la sortie correspondante $x(u)$, s'organisent en une « figure » M spécifique au système étudié.



Il n'est pas nécessaire de supposer que $x(u)$ est une fonction de u : à une valeur u donnée peuvent correspondre plusieurs réponses x possibles, et la valeur choisie dépend du passé, c'est-à-dire des données initiales. On dit qu'il y a une catastrophe pour $u = u_0$ lorsque $x(u)$ présente une discontinuité en ce point.

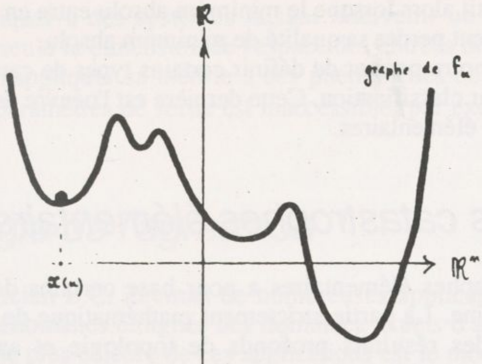
Pour affiner notre modèle, on suppose que la dynamique interne de la boîte noire est donnée par une fonction potentielle. Cela signifie qu'il existe une fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, x) &\longmapsto f(u, x) \end{aligned}$$

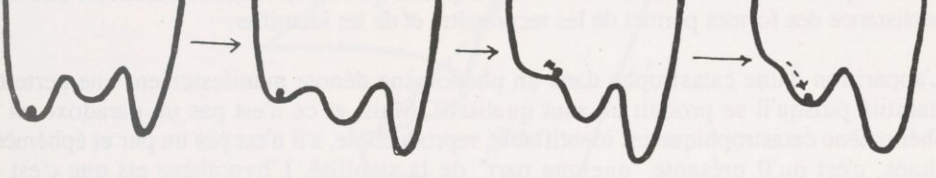
qui est telle que, pour chaque u, la réponse $x(u)$ correspond à un minimum local de la fonction partielle :

$$\begin{aligned} f_u : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_u(x) = f(u, x). \end{aligned}$$

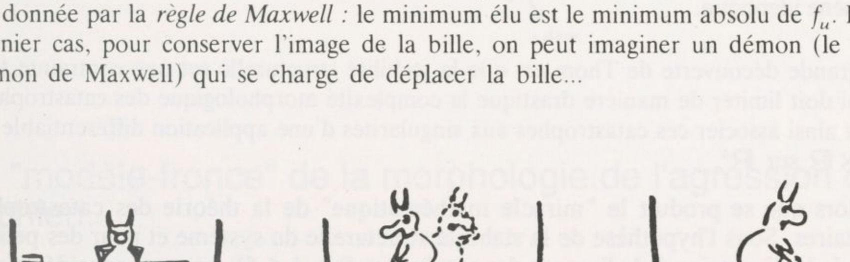
On peut imaginer une bille se déplaçant sur le graphe de f_u. Pour chaque valeur de u, la bille se stabilise en un point d'abscisse $x(u)$ et d'ordonnée U_n minimum local de f_u (« un puits de potentiel »).



Lorsque *u* varie, le graphe de f_u se déforme continûment. Mais il peut se faire que le minimum local où est installée la bille disparaisse. Alors, la bille bascule et rejoint brutalement un autre puits de potentiel : il y a catastrophe.



Le système représenté par la bille obéit à la *règle du retard :* la catastrophe ne se produit que lorsque le minimum où elle est installée disparaît. Mais une autre situation fréquente est donnée par la *règle de Maxwell :* le minimum élu est le minimum absolu de f_u. Dans ce dernier cas, pour conserver l'image de la bille, on peut imaginer un démon (le célèbre démon de Maxwell) qui se charge de déplacer la bille...



La catastrophe se produit alors lorsque le minimum absolu entre en conflit avec un autre minimum pour finalement perdre sa qualité de minimum absolu.
Le modèle de la boîte noire permet de définir certains types de catastrophes. Ensuite se pose le problème de leur classification. Cette dernière est l'oeuvre de René Thom avec sa théorie des catastrophes élémentaires.

La théorie des catastrophes élémentaires

La théorie des catastrophes élémentaires a pour base certains développements de la géométrie contemporaine. La partie strictement mathématique de cette théorie est très ardue et fait appel à des résultats profonds de topologie et analyse différentielle, essentiellement l'étude des singularités d'applications différentiables. Mais il se trouve qu'au-delà des techniques mathématiques sophistiquées, la théorie des catastrophes élémentaires est fondée sur des notions géométriques simples qui en permettent une description peu formalisée et largement accessible.
L'idée de base consiste à associer au concept de *catastrophe* celui de *stabilité structurelle*. Un système du type de la boîte noire ne peut exister, ne peut être perçu par l'observateur, ne peut être reproductible expérimentalement, que s'il est structurellement stable, c'est-à-dire s'il a *la capacité de résister à des petites perturbations*. En effet, un phénomène concret est toujours soumis à des influences perturbatrices de la part du milieu extérieur et le simple fait que ce phénomène existe suppose qu'il résiste à ces influences. Seule la persistance des formes permet de les reconnaître et de les identifier.

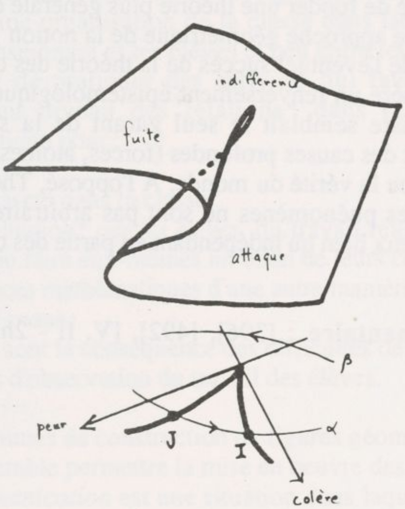
L'apparition d'une catastrophe dans un phénomène dénote manifestement une perte de stabilité puisqu'il se produit un saut qualitatif. Mais, et ce n'est pas un paradoxe, si le phénomène catastrophique est identifiable, reproductible, s'il n'est pas un pur et éphémère chaos, c'est qu'il présente "quelque part" de la stabilité. L'hypothèse est que c'est le processus évolutif du phénomène au voisinage de la catastrophe qui doit être considéré comme structurellement stable. Par exemple, dans le cas du flambage de l'arche, la catastrophe correspond à une perte de stabilité d'un équilibre mécanique, mais le processus qui consiste à provoquer cette catastrophe par augmentation graduelle d'une charge est stable : des modifications infimes des conditions de l'expérience conduisent à un phénomène identique.

Or, la grande découverte de Thom est que la stabilité structurelle est une contrainte très forte qui doit limiter de manière drastique la complexité morphologique des catastrophes. On peut ainsi associer ces catastrophes aux singularités d'une application différentiable π_f de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^k$.

C'est alors que se produit le "miracle mathématique" de la théorie des catastrophes élémentaires. Sous l'hypothèse de la stabilité structurelle du système et pour des petites valeurs de la dimension k de l'espace des entrées (en fait, $k \leq 5$), on peut considérer que les singularités de π_f appartiennent localement à un ensemble *fini* de singularités modèles dont Thom a dressé le catalogue. Ces singularités types sont appelées *catastrophes élémentaires*. Par exemple, pour $k \leq 2$, il n'y a que deux types possibles de singularité: le pli et la fronce dont on trouvera la description par exemple dansııı [339]. L'application de cette classification ne nécessite pas la connaissance précise de la fonction potentielle, seule son existence est exigée. Enfin, la dimension n n'intervient pas: cette théorie est susceptible de s'appliquer à des systèmes faisant intervenir un très grand nombre de paramètres de sortie; seule la dimension de l'espace des entrées doit être contrôlée. D'où l'ambition de Thom d'appliquer sa théorie à des phénomènes complexes pour lesquels l'analyse précise des paramètres de sortie est inaccessible (par exemple, l'évolution d'un être vivant).

La morphologie de l'agression

On doit au mathématicien E.C. Zeeman de nombreuses applications de la théorie des catastrophes à des phénomènes éloignés des domaines usuels d'application des mathé - matiques. L'exemple le plus célèbre de ces applications est le modèle du comportement agressif d'un chien, comportement qui a été décrit par Konrad Lorenz. On considère deux paramètres d'entrée: la peur et la colère. Le paramètre de sortie est le comportement du chien qui va de la fuite à l'agression en passant par l'indifférence. Le modèle proposé par E.C. Zeeman est celui de la fronce et peut donc être schématisé par la figure suivante.



Le "modèle-fronce" de la morphologie de l'agression chez le chien.

Les catastrophes possibles sont une attaque soudaine ou une fuite soudaine.
Le chemin ı montre comment, à partir d'un état initial de fuite, la croissance du facteur colère conduit à une bifurcation comportementale d'agression: passage soudain de la fuite à l'attaque au point I. Le chemin ı parcouru en sens inverse conduit à une catastrophe symétrique (passage de l'attaque à la fuite) mais qui se situe au point J: le modèle obéit à la règle du retard. Le chemin ß correspond à un changement comportemental continu de l'attaque à l'indifférence puis à la fuite.

Vers une théorie générale des catastrophes

L'application de la théorie des catastrophes élémentaires n'est rigoureusement fondée que pour les systèmes dont la loi d'évolution est donnée par les minima d'une fonction potentielle. Les sciences dites exactes donnent de nombreux exemples de tels phénomènes. Dans ce cas, l'utilisation de la théorie des catastrophes se conforme aux rapports habituels entre les modèles mathématiques et les faits expérimentaux: adéquation quantitative rigoureuse, possibilité de prédiction. Le flambage de l'arche correspond à cette situation.
Mais que penser de l'application de la théorie des catastrophes aux morphologies de l'agression, de la perception des formes, des mutineries de prisonniers? Il est clair que dans ces cas, il est douteux de postuler l'existence d'une fonction potentielle et le caractère numérique des paramètres est problématique. Aussi les critiques ne manquent pas qui font remarquer l'arbitraire du modèle catastrophique, sa précision illusoire, son absence d'intérêt (il ne fait que retrouver la description usuelle du phénomène en langue naturelle).
A cela, Thom réplique que ces modèles n'ont qu'une valeur locale, qu'ils concentrent en un concept topologique une information dont la valeur qualitative et analogique est indéniable. Ce sont "des véhicules de l'imaginaire, de l'imagination scientifique".
De plus, Thom a la volonté de fonder une théorie plus générale que celle des catastrophes élémentaires. Il s'agit d'une approche géométrique de la notion *phénomène*. S'il est sans doute trop tôt pour juger de l'éventuel succès de la théorie des catastrophes, il est certain qu'à ce propos Thom a opéré un renversement épistémologique de taille. Jusqu'alors, le point de vue réductionniste semblait le seul garant de la scientificité: au-delà des apparences, on recherchait des causes profondes (forces, atomes, classes sociales, ...) dont les lois révélaient peu à peu la vérité du monde. A l'opposé, Thom nous enseigne que les apparences, les formes des phénomènes ne sont pas arbitraires mais susceptibles d'un déterminisme aussi rigoureux bien qu'indépendant en partie des causes profondes.

G.W.

Bibliographie complémentaire : [396], [492], [V. II - 2h.].

Cognitif

V. - CONFLIT DE CONNAISSANCES

Le domaine cognitif est celui de la connaissance et est souvent opposé au domaine affectif [V. AFFECTIVITÉ]. Les objectifs* cognitifs sont donc des objectifs de connaissance. Par exemple : savoir résoudre une équation, connaître les formules trigonométriques dans le triangle rectangle, ... Alors qu'un objectif affectif pourrait être : développer la confiance en soi.

JP.G.

Situations de communication en géométrie

Dans notre pratique quotidienne des classes du premier cycle, nous constatons les difficultés des élèves pour comprendre et utiliser les énoncés géométriques.
Une part importante de notre action d'enseignant dans la classe, est de décider si le langage utilisé par les élèves est conforme au langage géométrique habituel, puis de corri - ger les erreurs ainsi relevées. Nos exigences de rigueur apparaissent souvent aux élèves comme inutiles dans la mesure où chacun estime se comprendre lui-même et où chacun admet difficilement que les autres (élèves ou enseignant) ne le comprennent pas.
C'est la conséquence d'une organisation de la classe dans laquelle les échanges se font essentiellement entre l'enseignant et les élèves et peu entre les élèves eux-mêmes. Aussi, il me semble important de pratiquer des activités qui favorisent un autre mode de fonctionnement, tant au niveau des relations* dans la classe qu'au niveau de l'apprentissage mathématique pour :
1) *à l'intention des élèves* :
- améliorer la communication dans la classe,
- mettre en place une évaluation* *par les élèves* du travail réalisé par eux ou par d'autres élèves et leur permettre de faire eux-mêmes un bilan de leurs connaissances géométriques,
- acquérir des connaissances mathématiques d'une autre manière.
2) *à l'intention de l'enseignant* :
- déceler les erreurs* qui sont la conséquence des difficultés de communication,
- se donner des moments d'observation du travail des élèves.

La rédaction des programmes de construction de figures géométriques dans des situations de communication me semble permettre la mise en oeuvre des objectifs précédents.
Une situation de communication* est une situation dans laquelle un élève ou un groupe d'élèves (appelé *émetteur*) transmet à un autre élève ou groupe d'élèves (appelé *récepteur*) des informations à propos d'une situation mathématique. Cet échange se fait ici par un message* écrit.
Un programme de construction est une liste d'instructions permettant la réalisation des tracés d'une figure géométrique.
Le programme de construction et le dialogue écrit entre les élèves sont les *messages** de la situation de communication.
Le travail suivant a été réalisé dans une classe de Quatrième.

Description des activités réalisées

Le travail se déroule en trois phases prenant place dans une série de plusieurs séances de cinquante minutes environ. Ces trois phases correspondent à des niveaux de communication différents dans la classe : d'abord entre deux élèves, puis entre deux groupes* d'élèves, enfin entre tous les élèves de la classe.

Première phase :

Les élèves sont groupés par deux. Ils disposent des instruments de dessin et de mesure habituels (compas, règle graduée, équerre, rapporteur). Chaque groupe reçoit une figure géométrique de l'un des deux types suivants :

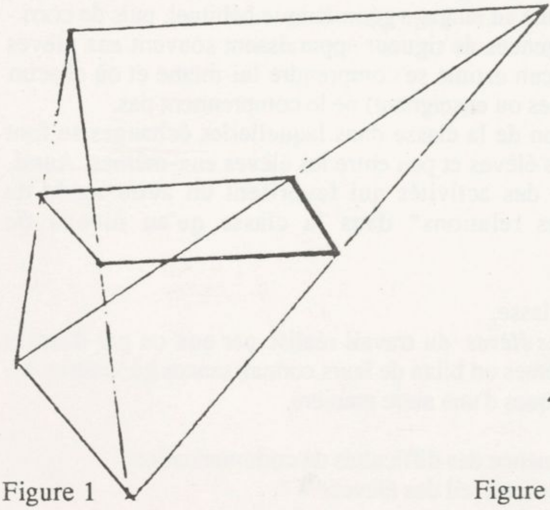


Figure 1

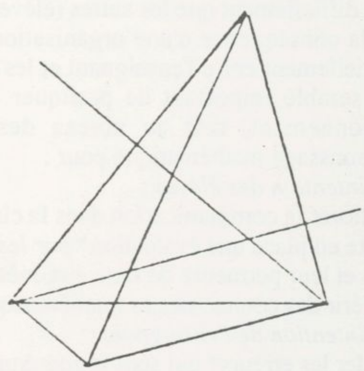


Figure 2

Les figures ne comportent aucun chiffre ni lettre.
Chaque groupe doit rédiger pour le dessin reçu un programme de construction respectant *les consignes suivantes* :

- Rédiger pour la figure donnée un progamme de construction le plus court possible.
- Le programme écrit doit permettre de reproduire une figure superposable à la figure donnée.
- Le programme doit être sans information superflue.
- Il doit être sans ambiguïté, c'est-à-dire le plus précis possible.
- Il ne doit pas contenir plusieurs fois la même information.
- Le programme ne doit comporter aucun dessin.

Il est spécifié aux élèves que le programme de construction sera donné à un autre groupe qui devra essayer de reconstituer le dessin correspondant.
La première phase s'achève quand tous les groupes ont terminé la rédaction des programmes. La deuxième phase commence immédiatement après, par l'intervention de l'enseignant.

Deuxième phase :

Chaque groupe dispose d'une feuille de papier calque et du programme rédigé par un autre groupe. De *nouvelles consignes* sont données :
• Reproduire sur la feuille de papier calque la figure correspondant au programme reçu.
• Chaque groupe peut poser des questions, uniquement par écrit, au groupe qui a rédigé le programme reçu.
• Les réponses sont données aussi par écrit.
• Les questions et les réponses ne doivent pas comporter de dessin.
Les échanges se font entre deux groupes déterminés. Pour éviter une communciation orale entre eux, les échanges de messages se font par l'intermédiaire de l'enseignant qui joue ainsi le rôle de "facteur". Il est précisé aux élèves que le jeu des questions-réponses est destiné à améliorer la compréhension des programmes.
La deuxième phase s'achève pour chaque groupe quand il estime avoir reproduit le dessin. La vérification est faite alors par les rédacteurs du programme qui décident si la reproduction est exacte ou non et indiquent les parties du dessin correctement reproduites.

Troisième phase :

Elle se déroule au cours d'une nouvelle séance indépendante des premières. Chaque élève dispose de tous les programmes rédigés dans la première phase (éventuellement modifiés par la suite) pour une même figure (Figure 1). Chacun doit essayer de réaliser tous les programmes. Un débat s'instaure dans la classe pour:
• Déterminer parmi les programmes ceux qui permettent la réalisation d'une figure conforme à celle du départ.
• Classer les programmes suivant leur degré de réussite.
• Préciser si les programmes respectent les consignes données au départ.
• Essayer de rédiger un programme minimum.

Quelques observations sur le travail réalisé par les élèves.

Dix programmes sur onze utilisent des lettres pour désigner les éléments des figures (points, droites, segments, ...).
Sept programmes comportent des mesures d'angles.
La première instruction indique un tracé :
- du "contour" de la figure (quadrilatère ou cercle)
- ou d'un segment
- ou d'une partie du dessin: triangle ou parallélogramme.
Plusieurs programmes contiennent des informations superflues, en particulier des expressions du type "cela forme un parallélogramme".
Cette redondance des informations semble traduire un manque d'assurance des élèves-émetteurs. Mais ceux-ci fournissent ainsi aux "récepteurs" des moyens de vérification.
La notion de "programme minimum" est difficilement perçue par les élèves et ils ne le recherchent pas spontanément.

Une consigne pourrait être donnée pour amener les élèves émetteurs à fournir le moins de mesures possible.
La rédaction des programmes est une activité demandant beaucoup de temps. Il est possible de limiter la durée de la première phase.
Pour la figure 1, deux programmes ont été jugés corrects complètement par les élèves, trois partiellement corrects et un faux.
Pour la figure 2, trois ont été considérés comme partiellement corrects et deux comme faux.
Il est nécessaire de se mettre d'accord avec les élèves sur le choix des critères de réussite des programmes et des figures reproduites. Dans l'échange entre les groupes, les questions ou les réponses sont des remarques mathématiques, mais souvent aussi des remarques personnelles ("tu ne sais pas lire", "merci du conseil", "tu n'as qu'à deviner" ...).

En quoi ce travail permet-il la mise en oeuvre des objectifs* décrits dans l'introduction?

1. Dans la *première phase*, l'activité des élèves dans chaque groupe comporte deux aspects :
- *mathématique* : Il s'agit d'analyser les différents éléments d'une figure, de les coder et de les mettre en relation. Pour cela, il leur faut utiliser certaines de leurs connaissances en géométrie et éventuellement en faire apparaître de nouvelles. Pour certains élèves, la rédaction du programme se présente comme une résolution de problème*.
Pour faciliter la rédaction des programmes, des indications peuvent être données par l'enseignant: observer la figure, faire une liste de toutes les propriétés observées, choisir parmi ces observations celles qui sont les plus importantes, classer ces observations.
- *relationnel**: La nécessité de rédiger *un seul* programme amène une confrontation entre les deux élèves d'un même groupe. En jouant les rôles d'émetteur et de récepteur, ils procèdent à une première vérification et à une correction de leur programme.

Au cours de la *deuxième phase*, la confrontation se fait entre deux groupes. Ce sont les groupes qui jouent alternativement les rôles d'émetteur et de récepteur. A l'intérieur de chaque groupe, les élèves doivent organiser les tâches à accomplir (comprendre le programme reçu, dessiner sur le calque, poser des questions à l'autre groupe, répondre à ses questions, ...). Le jeu des questions-réponses est l'occasion d'un travail d'évaluation par les élèves eux-mêmes. Il s'agit de déceler et de corriger les erreurs rencontrées dans les programmes. Ce sont les élèves qui décident eux-mêmes de la conformité du dessin avec l'original. La non-conformité de la figure reproduite avec le dessin original peut résulter d'un message *mal rédigé* par le groupe émetteur, mais aussi d'un message bien rédigé, mais *mal compris* par le groupe récepteur.
Pour chaque question ou réponse, les élèves doivent prouver leurs remarques, les simplifications proposées, etc. auprès de leurs camarades. Ce qui est également l'objet d'un *débat* scientifique entre eux [V. PROBLEMES - 5]. L'argumentation utilisée fait alors apparaître des propriétés mathématiques et une redéfinition de certaines notions par les élèves. Les programmes sont modifiés en fonction des remarques faites par les élèves "récepteurs".

2. Le *rôle de l'enseignant* dans ces deux premières étapes est de donner les consignes et de les faire respecter. Il est également le facteur entre les deux groupes mais sans intervenir sur le contenu des messages qu'il transmet, il relance l'activité des groupes, en particulier pour les inciter à procéder à des vérifications.

Au cours de la *troisième phase*, l'enseignant est l'animateur de la discussion entre élèves. Il reformule les questions mal comprises. Le débat est l'occasion :
- de préciser les propriétés mathématiques de la figure,
- de se poser des problèmes pratiques de constructions géométriques,
- de déterminer quelles informations minimales il faut transmettre pour reproduire différentes figures (parallélogramme, triangle, ...).

L'évaluation du travail (ici les programmes de construction) n'est pas fait par l'enseignant, mais elle est l'un des objets du débat instauré dans la classe.

J'ai utilisé les situations de communication de figures géométriques, avec quelques modifications, à tous les niveaux du premier cycle : en demandant aux groupes d'élèves d'inventer eux-mêmes un dessin et de rédiger un programme, ...; en les faisant travailler sur une ou plusieurs propriétés géométriques : Thalès par exemple(*a*).

Quelques conséquences de l'utilisation de situations de communication

1. La pratique de ces activités m'a amené à faire *plusieurs constatations* :
Les élèves perçoivent *de différentes manières* les figures qui leur sont proposées (globalement pour certains, par éléments ou par parties pour d'autres).
Beaucoup de notions géométriques simples (segment, droite, angle, ...) supposées connues, ne le sont pas réellement.
Le *codage* des éléments d'une figure est un moyen pour les élèves de s'approprier un problème géométrique.
Les élèves apprennent à lire *complètement* les phrases des énoncés alors que souvent ils ne le font que partiellement.
Ils deviennent *plus actifs* et *plus autonomes*; en voici quelques exemples :
- utilisation spontanée du livre,
- travail d'auto-correction et d'évaluation,
- augmentation des échanges entre les élèves indépendamment de l'enseignant,
- formulation par eux-mêmes de problèmes de constructions géométriques ou d'énoncés mathématiques.

2. Ce travail m'a permis de *modifier mon enseignement* :
- en favorisant tout ce qui va dans le sens de l'autonomie des élèves, en particulier en intervenant moins, de manière plus sélective et en encourageant les échanges entre élèves;

(*a*) L'auteur se tient à la disposition du lecteur pour lui fournir des précisions sur ces travaux.

- en explicitant le plus clairement possible les consignes pour le déroulement d'une activité ou plus généralement pour le fonctionnement de la classe;
- en prenant du temps pour observer le travail et le comportement des élèves;
- en approfondissant la signification de leurs erreurs* et en recherchant comment les exploiter;
- en acceptant de modifier, à tout moment, en classe les objectifs fixés par moi, de manière à utiliser les interventions ou les questions des élèves.

Les situations de communication de figures géométriques sont suffisamment ouvertes pour être employées dans de nombreuses directions souvent non prévues au départ.

Y.G.

Bibliographie : [354], [381], [382], [5314].

Compétence

V. - APTITUDE
- CAPACITÉ
- HABILETÉ
- OPÉRATIONNEL (OBJECTIF)
- PERFORMANCE
- P.P.O.
- SAVOIR-FAIRE

La compétence, c'est la maîtrise d'une capacité qui se manifeste, dans la réalisation d'une tâche, par l'ensemble des comportements* qui prouvent que cette capacité est acquise.
La définition d'un objectif* passe donc de la définition de capacités à celle de la tâche puis à l'évaluation des compétences.

On peut schématiser ainsi ces différents liens :

	définition		*opérationnalisation*		*évaluation*	ce qui montre que l'objectif est atteint
OBJECTIF	———	CAPACITÉ	———	TACHE	———	COMPÉTENCE
		ce qui est à acquérir		ce qui est à accomplir		ce qui prouve la capacité accomplir la tâche

Exemple :
- reconnaître un nombre premier OBJECTIF
- être capable dans une liste de nombres entiers de cocher ceux qui sont premiers CAPACITÉ

- cocher dans une liste donnée de nombres entiers
  ceux qui sont premiers — TACHE
- l'élève est capable de cocher sans erreur dans toute liste
  de nombres entiers ceux qui sont premiers — COMPÉTENCE

On pourra remarquer que cette problématique est essentiellement orientée vers l'évaluation et ne dit rien des stratégies à mettre en jeu [V. SITUATION] pour développer la capacité en question.

JP.G.

Compétitions

V. - PROBLEM SOLVING
- Q.C.M.

Des avantages d'une compétition nationale de mathématique traitée par ordinateur.

"Un problème mathématique devrait être difficile pour nous séduire et cependant pas totalement inaccessible, afin de ne pas rendre nos efforts ridicules. Il devrait être pour nous un poteau indicateur sur les chemins tortueux des vérités cachées, nous récompensant à la fin par le plaisir de la bonne solution."

David Hilbert (Paris 1900)

Introduction

Ces dernières années, la popularité des compétitions de mathématiques a largement progressé dans le monde entier. Ceci prouve que l'on reconnaît l'importance des mathématiques et la nécessité de stimuler les étudiants, de les encourager à s'impliquer dans les procédés de résolution de problèmes mathématiques (problem-solving). On estime à plus de trois millions le nombre d'étudiants ayant participé à de telles compétitions en 1983.

Ces compétitions varient depuis de petits tests locaux jusqu'aux grands concours nationaux; ils peuvent s'adresser à des élèves du primaire ou du secondaire ou à des étudiants d'Université. Certains sont des questionnaires à choix multiples [V. Q.C.M.] traités par ordinateurs, d'autres sont des compétitions de résolution de problèmes (problem-solving), sous forme d'Olympiades. Non seulement ils stimulent l'intérêt pour la résolution de problèmes, mais ils sont un bon moyen pour développer les capacités mathématiques et identifier les jeunes talents.

La compétition australienne de mathématiques (A.M.C.), que nous allons décrire, compétition nationale traitée par ordinateur, est, compte tenu de la population, la plus grande du monde. En 1983, sur 275 000 inscriptions, 250 000 provenaient des écoles australiennes, ce qui constitue 23% de la population des écoles secondaires ou 1,8% de la population totale de l'Australie, près d'un Australien sur 55. Le reste provenait de dix pays du Pacifique Sud et comprenait 2 800 étudiants de la Polynésie Française qui ont concuru dans leur langue

Croissance de l'A.M.C.

En 1976, des mathématiciens du collège d'enseignement supérieur de Canberra (C.C.A.E.) ont créé, avec les professeurs de l'Association de Canberra pour les mathématiques (C.M.A.), une compétition de mathématiques pour les élèves des écoles secondaires locales. A l'origine de cette création, le désir commun de ranimer l'intérêt pour les mathématiques, de mettre leur importance en relief.

Les buts étaient plus précisément : d'encourager les élèves de toutes les classes de l'école secondaire à mettre en oeuvre le meilleur de leurs capacités*, d'encourager la maîtrise des savoir-faire* (skills) de base en calcul, de créer au fil des années un réservoir de pro - blèmes intéressants, stimulants et gratifiants pour compléter et enrichir le travail scolaire régulier. En 1980-81 s'est ajouté un autre but: développer les liens culturels, éducatifs et professionnels entre l'Australie et les pays du Pacifique Sud, y compris le Pacifique francophone où nous avons reçu l'assistance et les encouragements de l'Ambassadeur de France à Canberra.

Conformément à ces buts, les textes des compétitions ne sont pas conçus spécialement pour des élèves doués en mathématiques, mais pour que des élèves consciencieux ayant des capacités normales puissent trouver de nombreuses questions à leur portée et d'autres pour les stimuler.

Le succès remporté par la compétition au fil des années peut être facilement évalué par l'accroissement des inscriptions depuis 1976 :

Tableau I :

Année	Inscriptions		Total	Nombre d'écoles	Moyenne par école
	Australie	Autres pays			
1976	1 300		1 300	33	39
1977	4 600		4 600	73	63
1978	60 854	890	61 744	708	87
1979	101 236	917	102 153	1 283	80
1980	141 057	14 246	155 303	1 776	87
1981	180 775	16 547	197 322	2 007	98
1982	210 021	20 823	230 844	2 112	109
1983	248 034*	27 423+	275 457	2 222	124

* Soit environ 23% d'élèves venant de 80% d'écoles secondaires d'Australie, ce qui fait une moyenne de 133 élèves par école.
+ Inclut 2 800 élèves de la Polynésie Française.