Pierre Wagner

LA LOGIQUE

Que sais-je ?

Pierre Wagner

LA LOGIQUE

Cinquième édition mise à jour
7e mille

Que sais-je ?

À lire également en
Que sais-je ?

COLLECTION FONDÉE PAR PAUL ANGOULVENT

Paul Deheuvels, *La Probabilité, le hasard et la certitude*, n° 3.
Olivier Houdé, *Le Raisonnement*, n° 1671.
Dominique Lecourt, *La Philosophie des sciences*, n° 3624.
Jean-Michel Besnier, *Les Théories de la connaissance*, n° 3752.

Mes remerciements
aux amis et collègues qui ont accepté
de lire une première version de ce livre.
Leurs commentaires m'ont permis
d'apporter de nombreuses améliorations
au texte initial.

ISBN 978-2-7154-2213-1
ISSN 0768-0066

Dépôt légal – 1re édition : 2007
5e édition mise à jour : 2024, janvier

170 *bis*, boulevard du Montparnasse, 75014 Paris

CHAPITRE PREMIER

La logique : directions, orientation

Qu'est-ce que la logique ? Quel est son objet ? Quelles sont sa fonction, ses frontières, son histoire ? Sur ces questions, il existe des opinions diverses dont plusieurs sont assez largement répandues.

Pour les uns, la logique est la science du raisonnement correct. Non une science empirique qui aurait pour objet de recenser, décrire et analyser les raisonnements réels, qu'ils soient écrits, exprimés verbalement ou pensés, mais une science des règles que tout raisonnement doit respecter afin d'être valide. À supposer qu'il existe de telles règles et que la logique en soit la science, elle est beaucoup plus qu'une science parmi les sciences. Car son but est alors d'étudier les présupposés communs à toutes les connaissances auxquelles on accède au moyen du raisonnement. Ainsi comprise, la logique n'a pas pour seule fonction de contrôler la validité des inférences ; elle a également pour tâche de structurer l'ensemble de notre savoir. Aussi lui accorde-t-on parfois une fonction constitutive pour la connaissance en général et pour notre système du monde.

Pour d'autres, la logique énonce les lois les plus générales de la pensée, en tant que celle-ci vise le vrai. Indépendantes de tout contenu, de tout objet particulier, ces lois valent alors non seulement pour tout ce qui est, mais également pour tout ce qui peut être pensé en général. Le principe du tiers exclu, par exemple, comme toutes les autres vérités logiques, s'applique à tout énoncé : selon ce principe, soit l'énoncé lui-même, soit sa négation, est vrai. Soit il pleut, soit il ne pleut pas, il n'y a pas de troisième possibilité. Selon un autre principe logique, le principe de non-contradiction, un énoncé et sa négation ne sont pas l'un et l'autre vrais. En sorte que si quelqu'un affirmait à la fois que le monde a une fin et que le monde n'a pas de fin, nous serions conduits à penser soit qu'il ne donne pas le même sens à « monde » ou à « avoir une fin » dans les deux énoncés, soit qu'il donne à l'expression « ne… pas », en cette occurrence, un sens différent du sens usuel.

Sur l'histoire de la logique voici ce qu'on entend souvent dire. La logique remonte à l'Antiquité, aux travaux d'Aristote et des stoïciens, et résulte d'un travail de codification des procédés d'argumentation et de raisonnement en usage à cette époque. Au Moyen Âge, elle a fait partie intégrante des études scolastiques, à côté de la rhétorique et de la grammaire. Entre les XIIe et XIVe siècles, Pierre Abélard, Guillaume d'Occam et Jean Buridan, par exemple, ont chacun une œuvre de logicien. Au XVIIe siècle, Descartes a critiqué son caractère formel et sa stérilité alors que Leibniz a cherché à en faire une science générale, applicable à tous les raisonnements, ainsi qu'un art d'inventer pour trouver la vérité dans les sciences. Au XIXe siècle, après les travaux logiques de Bolzano, des auteurs comme Boole ont commencé à lui appliquer les techniques de l'algèbre, avant que la crise des fondements des mathématiques ne précipite son évolution et ne lui fasse connaître une véritable révolution. Les pères fondateurs de la logique moderne – Frege, Peano, Russell et d'autres – ont alors fait d'elle une logique symbolique, d'une nature comparable à celle des mathématiques, dont elle a fini par constituer l'une des branches. Essentiellement orientée, dans la première moitié du XX[e] siècle, vers le problème du fondement des mathématiques, elle a ensuite trouvé des applications inattendues en informatique et dans l'étude des langues naturelles, domaines dans lesquelles elle fait aujourd'hui florès.

Jadis pensée et enseignée par les philosophes, la logique est donc, selon une opinion courante, devenue une science dont les théorèmes et les démonstrations sont tout aussi peu discutables que ceux de l'arithmétique ou de la géométrie, et son caractère technique la rend difficilement accessible au profane. Comme toute science, elle a ses revues spécialisées, sa communauté de scientifiques et ses programmes de recherche. La logique ainsi comprise est parfois divisée en quatre grandes orientations principales : la théorie de la démonstration, la théorie des modèles, la théorie des ensembles et la théorie de la calculabilité. Comme la plupart des sciences, ses bases sont exposées dans des manuels d'introduction dont les titres précisent, le plus souvent, qu'il y est question de la logique *mathématique*, *symbolique* ou *formelle*.

Que penser d'un tel tableau, qui regroupe quelques-unes des représentations les plus communes touchant la nature, la fonction et l'histoire de la logique ? Bien que les opinions de ce genre soient souvent exposées comme des vérités sur la logique, chacune soulève davantage de questions qu'elle n'apporte de réponse. Leur vraisemblance dépend tantôt de l'état des connaissances à une époque donnée, tantôt de convictions philosophiques qui méritent d'être discutées.

En parlant de *la* logique, par exemple, on sous-entend qu'elle possède une unité qui traverse l'histoire depuis l'Antiquité. Il existe certes une tradition logique dont certains auteurs font incontestablement partie ; mais on serait bien en peine de trouver une définition que chacun d'eux eût jugée acceptable. Aristote, Leibniz, Kant et Frege ne se sont pas seulement fait de la logique des idées très diverses ; ils ne la définissaient tout simplement pas à partir du même projet intellectuel. Aristote, du reste, utilisait l'adjectif *logikos*, mais il ne disposait d'aucun substantif pour désigner quelque chose comme *la* logique, et la question de savoir quels traités, parmi ceux dont il est l'auteur, il convient d'inclure dans ce que nous appelons « la logique aristotélicienne » n'est rien moins qu'évidente. Leibniz, pour sa part, ambitionnait de réaliser une langue logique qui permette non seulement de formaliser les raisonnements mais également de trancher les disputes métaphysiques et théologiques. Quant à la distinction kantienne entre logique formelle et logique transcendantale, elle trouve sa justification dans le projet d'une philosophie générale de la connaissance. Les travaux logiques de Frege ont un sens encore différent puisqu'ils ont pour origine le projet d'un fondement de l'arithmétique qui ferait l'économie de tout recours à l'intuition. La logique qu'on trouve aujourd'hui dans les manuels d'introduction, quant à elle, est éloignée, par son esprit comme par son contenu, de la logique telle que la comprenait chacun des auteurs qu'on vient de citer.

Si, pour la recherche d'une définition de la logique et de son unité, on laisse maintenant de côté la perspective historique pour se tourner vers la logique contemporaine, on s'aperçoit rapidement que les questions suivantes sont parmi les plus controversées : y a-t-il une ou plusieurs logiques ? Y a-t-il un critère de la « logicité », c'est-à-dire de ce qui relève de la logique proprement dite, par opposition à ce qui tombe en dehors de son domaine ? Comment définir le concept fondamental de *conséquence logique*, qui met en relation les prémisses et la conclusion d'un raisonnement ? Sur la question de la définition de la logique, on ne peut donc certainement pas se satisfaire de la réponse naïve qui consisterait à dire que la logique, c'est ce que font les logiciens « professionnels », membres d'une même communauté scientifique car, d'une part, la question de savoir qui fait partie de cette communauté n'admet pas de réponse simple, et, d'autre part, ceux qui en font indiscutablement partie ne sont d'accord entre eux ni sur la définition de la logique, ni sur son unité, ni sur la nature du projet intellectuel qui oriente leur travail, ni même sur l'intérêt qu'il pourrait y avoir à délimiter clairement la province de la logique.

La logique est souvent définie comme la science de l'inférence formellement valide. Mais cette expression est tellement générale qu'elle ne nous apprend pratiquement rien tant qu'on n'a pas expliqué ce qu'on entend par « inférence », par « formel » et par « valide » et tant qu'on n'a pas dit à quoi pourrait ressembler une telle science. Or, il s'agit là de questions qui dépassent la logique en tant que science, car toute esquisse de réponse présuppose qu'une solution a déjà été apportée à d'autres problèmes touchant la pensée, le langage, le jugement, la signification, la psychologie ou l'esprit. La logique telle que la concevaient Descartes, Leibniz ou Kant était non seulement indissociable de leur philosophie de la connaissance mais également ancrée dans leur système philosophique tout entier.

Il pourrait sembler, à première vue, qu'il en va différemment de la logique telle qu'on la trouve introduite dans les ouvrages contemporains de logique mathématique car ceux-ci se présentent souvent comme l'exposé d'une science indépendante de tout engagement philosophique. En réalité, cela vient seulement de ce que la plupart de ces ouvrages évitent tout simplement de discuter ce genre de question ; tout au plus mentionnent-ils, dans quelques paragraphes liminaires, un ensemble de présupposés qu'ils demandent au lecteur d'accepter. Fort heureusement, tous les logiciens ne sont pas partisans de ce genre d'économie intellectuelle, et les fondateurs de la logique moderne ont même consacré des ouvrages entiers à des recherches logico-philosophiques par lesquelles ils exposaient et justifiaient les travaux et programmes dans lesquels ils s'engageaient. Ce que montrent ces textes, cependant, comme ceux des auteurs contemporains qui traitent des mêmes sujets, c'est qu'il n'existe pas, aujourd'hui, de conception de la logique sur laquelle la communauté des logiciens soit entièrement d'accord, pas de définition universellement acceptée. Il existe au contraire des vues divergentes touchant son extension, son unité, son but et son orientation.

Corrélativement, l'époque contemporaine connaît une prolifération de ce qu'on appelle *des* logiques, auxquelles sont attribués des noms plus ou moins évocateurs : logique intuitionniste, logique modale, logique déontique, logique temporelle, logique quantique, logique pertinente, logique IF, etc. Elles se présentent souvent comme des systèmes de signes qui permettent de former des expressions, de leur donner une interprétation, de définir un concept de conséquence logique et surtout de formaliser certains types de raisonnements afin d'en caractériser les règles. Mais l'usage du mot « logique » au pluriel suggère que ce mot reçoit ici une signification différente de celle qu'il a lorsqu'il est question de *la* logique, car l'article défini suppose évidemment qu'il y en a une et non plusieurs. Lorsqu'on donne à cet article son sens le plus fort, on ne pense pas à un ensemble de techniques de formalisation des raisonnements dans des domaines circonscrits ; ce qui est visé, ce sont les règles qui, au-delà des apparences du langage ordinaire, structurent la pensée ou le système de nos connaissances. Il reste à savoir s'il existe effectivement de telles règles universelles – et dans ce cas, quelles sont ces règles – ou si les recherches logiques ainsi comprises ne relèvent pas d'un mythe universaliste.

S'il existe de telles différences de points de vue et de sens, comment la logique peut-elle être couramment considérée comme une science, qui plus est comme l'une des branches de la science la plus assurée de toutes : les mathématiques ? Paradoxalement, l'absence d'accord sur la définition de la logique, sur son orientation générale et ses principes fondamentaux n'enlève rien au caractère scientifiquement contraignant des théorèmes qu'elle démontre, qui ne sont pas moins certains que des théorèmes mathématiques. Il existe effectivement quelque chose comme une doctrine logique commune dont la plupart des manuels exposent les concepts, les techniques et les résultats de base sous des formes variables. On y trouve généralement une définition de ce que les logiciens entendent aujourd'hui par variable, constante, connecteur, quantificateur, relation, fonction, formule, axiome, système formel, dérivabilité formelle, structure d'interprétation, vérité dans une structure, satisfaisabilité, théorie formelle, modèle d'une théorie, conséquence logique, cohérence, complétude, compacité, décidabilité, définissabilité, syntaxe, sémantique, métalangage, logique du premier ordre, logique d'ordre supérieur, pour ne citer que quelques-uns des concepts de base de la logique contemporaine ; on y trouve également la démonstration d'une série de théorèmes fondamentaux : théorèmes de complétude, de compacité, de Löwenheim-Skolem, etc. Mais que penser d'un tel appareillage conceptuel, si hautement technique ? Est-il de nature à répondre aux questions que nous nous posons touchant ce qu'est fondamentalement la logique ?

D'un côté, les résultats qui ont été obtenus en logique mathématique par la voie démonstrative laissent ouvertes un grand nombre de questions, notamment celles qui sont relatives à l'unité de la logique, à son fondement, à sa fonction dans le système du savoir ou à l'interprétation épistémologique des vérités logiques ; d'un autre côté, ces résultats sont si contraignants qu'ils ont effectivement mis en échec les conceptions de la logique qui avaient été défendues par certains des plus grands logiciens ; on pense au logicisme de Frege, à celui de Russell, ainsi qu'au programme de Hilbert dont la réalisation possible fut rendue extrêmement peu vraisemblable par les théorèmes d'incomplétude que Gödel publia en 1931. Aucune réflexion sur la logique ne peut donc ignorer les développements techniques de la logique contemporaine, bien qu'une connaissance de ces développements ne suffise certainement pas à répondre à toutes les questions susceptibles d'être soulevées relativement à ce qu'est la logique.

Ces quelques remarques devraient suffire à convaincre le lecteur qu'il est aujourd'hui difficile de prétendre connaître ne serait-ce qu'une petite partie de la logique si l'on ne maîtrise pas au moins certains de ses concepts de base et si l'on ignore tout de résultats comme les théorèmes de complétude, d'incomplétude, de compacité, de Löwenheim-Skolem, d'indécidabilité et d'indéfinissabilité du prédicat de vérité, pour ne citer que quelques exemples, parmi les plus fondamentaux. D'un autre côté, une étude non critique des bases de la logique mathématique dans un manuel qui en introduit les concepts, les méthodes et les théorèmes ne permet généralement pas d'apercevoir ce qui fait de la logique une discipline non seulement ouverte, vivante et féconde, mais également indéterminée dans sa définition, sa signification et son orientation générale.

Dans ce livre, nous n'aurons l'ambition ni de donner une définition dogmatique de la logique ni d'ajouter, sur cette question, une nouvelle opinion à celles qui existent déjà. Il ne s'agit pas non plus d'une introduction à la logique mathématique ni d'une histoire de la logique des origines à nos jours. Nous nous proposons plutôt de donner au lecteur une idée du genre de questions que se posent ou que se sont posées les logiciens, du genre de certitudes qu'ils ont acquises, des projets qui animent leurs recherches, des problèmes sur lesquels ils s'opposent et des raisons pour lesquelles il n'est pas facile de s'entendre sur ce qu'est la logique. On aura compris qu'un tel programme exige l'impossible : sans présupposer aucune connaissance de la part du lecteur, sans l'entraîner non plus dans une exposition formelle des techniques que les logiciens ont mises au point ou des résultats que leurs méthodes leur ont permis d'obtenir, lui donner une idée aussi précise que possible des bases de la logique contemporaine et de ses origines historiques, afin qu'il puisse distinguer quelques-unes des certitudes acquises et des questions ouvertes, et s'interroger lui-même sur ce qu'il est permis d'entendre par « logique ». L'exposition rigoureuse des concepts et théorèmes fondamentaux de la logique contemporaine exigerait un degré de précision et donc une prolixité qu'il est impossible de satisfaire dans un ouvrage de cette nature, qui n'a pas pour vocation de se substituer aux ouvrages d'introduction à la logique proprement dits[1].

1. On pourra consulter F. Lepage, *Éléments de logique contemporaine*, Montréal, Presses de l'université de Montréal, 1991 ; P. Wagner,

Nous ne pourrons évidemment pas discuter tous les usages qui sont faits du mot « logique » aujourd'hui, et certains de ces usages seront délibérément ignorés, par exemple dans des expressions comme « logique de l'économie de guerre », « logique de la découverte scientifique » ou même « logique inductive ». L'examen des cas de ce genre nous entraînerait dans des questions trop éloignées de la logique en général. Nous ne pourrons pas non plus espérer donner un panorama des recherches menées dans la logique contemporaine. Nous présenterons tout au plus quelques questions choisies parmi celles qui peuvent être rendues accessibles au néophyte en un nombre limité de pages, en commençant par quelques-unes des transformations qui ont conduit à la logique contemporaine. Les concepts et théorèmes qui seront introduits appartiennent tous aux connaissances communes des logiciens contemporains. Sans qu'il soit question d'en retracer l'histoire, nous indiquons, autant que possible, le contexte dans lequel ils se sont imposés comme tels.

Malgré les réserves émises dans ce premier chapitre, nous n'hésiterons pas à faire précéder le mot « logique » de l'article défini, en gardant présent à l'esprit que ce présupposé d'unicité n'est rien moins que problématique.

Logique et philosophie, Paris, Ellipses, 2014 ; ou (d'un niveau plus avancé) R. Cori et D. Lascar, *Logique mathématique* (1993), Paris, Dunod, 2003.

CHAPITRE II

Les débuts de la logique moderne

Frege est souvent considéré comme le père fondateur de la logique moderne[1]. Son *Idéographie*, publiée en 1879, offre le premier exemple d'un système formel effectivement réalisé, et son œuvre introduit plusieurs innovations si importantes que l'histoire de la logique est souvent divisée en deux parties principales : la logique moderne et la logique « préfrégéenne ». Pourtant, la logique telle que la comprend Frege est, à maints égards, fondamentalement différente de la logique qui est communément enseignée et pratiquée aujourd'hui. Cela tient, en partie, à ce que les recherches logiques de Frege étaient orientées par un projet philosophique qui se révéla irréalisable dans sa forme initiale, en sorte qu'il y a peu de logiciens qui travaillent encore, aujourd'hui, dans le prolongement de ce projet dit « logiciste ». Frege occupe donc une position tout à fait particulière puisqu'il est généralement reconnu comme l'un des principaux fondateurs de la

1. En affirmant cela, on néglige cependant l'apport de Bolzano et de sa *Théorie de la science*, parue en 1837 (traduction française partielle, Paris, Gallimard, 2011). Voir aussi Bolzano, *Premiers Écrits*, Paris, Vrin, 2010. Sur la place de Bolzano dans l'histoire de la logique, voir G. Sundholm, « A century of judgment and inference (1837-1936) : Some strands in the development of logic », in L. Haaparanta (dir.), *The Development of Modern Logic*, Oxford, Oxford University Press, 2009.

logique moderne bien que sa conception de la logique ne soit pratiquement plus partagée par personne[1].

Le but de Frege n'était pas de réformer la logique mais d'établir les fondements de l'arithmétique, ce mot étant pris en un sens plus large que la théorie des nombres entiers, sens qui inclut notamment toute l'analyse mathématique. Aux yeux de Frege, le manque de clarté touchant les principes de l'arithmétique et le caractère tout à fait insatisfaisant de la définition du nombre que pouvaient proposer les mathématiciens et les philosophes de son époque constituaient un véritable scandale pour l'esprit humain. Cela étant, le problème n'était pas d'affermir les bases d'une science qui n'aurait pas été suffisamment assurée, mais de mettre en lumière ses fondements. Pour y parvenir, Frege se proposa d'établir par la voie démonstrative la thèse selon laquelle l'arithmétique n'est pas essentiellement différente de la logique et il n'y a pas d'objet propre à l'arithmétique qui ne soit de nature logique ni aucune méthode de preuve spécifique dont l'arithmétique puisse se prévaloir ou à laquelle elle doive nécessairement avoir recours. L'un des sens du mot « logicisme » est celui d'une déduction de l'arithmétique à l'intérieur de la logique, ce qu'on exprime couramment en parlant d'une « réduction » de l'arithmétique à la logique.

Le projet de Frege se comprend plus aisément s'il est comparé à d'autres conceptions des rapports entre logique et arithmétique. Le contraste est particulièrement frappant avec celle de Kant, pour qui la logique générale est la science des règles de l'entendement, science formelle qui, en tant que telle, ne nous donne la connaissance d'aucun domaine d'objets. Parce que,

1. Sur la conception frégéenne de la logique, voir P. Blanchette, *Frege's Conception of Logic*, New York, Oxford University Press, 2012.

selon Kant, les mathématiques constituent, *a contrario*, un corps de connaissances et supposent que des concepts soient construits, c'est-à-dire représentés *a priori* dans l'intuition, les raisonnements mathématiques ne peuvent pas être déduits des règles logiques de l'entendement. De telles règles ne permettent, à elles seules, ni de construire les concepts ni de démontrer les théorèmes de l'arithmétique, qui est donc irréductible à la logique.

Pour préciser, il convient d'ajouter que Kant donne au mot « logique » des sens différents selon qu'il est question de la logique générale, transcendantale, spéciale, pure ou appliquée. Laissons de côté les cas d'une logique spéciale ou d'une logique appliquée et retenons les deux sens principaux. La logique *générale pure* contient les règles absolument nécessaires de la pensée ; elle fixe les normes de l'usage de l'entendement et de la raison d'un point de vue formel, indépendamment de toute référence à des objets particuliers. La logique *transcendantale*, quant à elle, donne les lois de la raison et de l'entendement en tant qu'elles se rapportent *a priori* à des objets. Elle ne fait donc pas abstraction de tout contenu de connaissance, bien qu'elle n'ait en elle-même le pouvoir de nous faire connaître aucun objet parce que son usage suppose que des objets nous soient donnés dans l'intuition. Ces deux définitions suffisent à indiquer pourquoi en aucun de ces sens, selon Kant, l'arithmétique ne peut être déduite des principes de la logique. Elle ne peut l'être à partir des principes de la logique générale pure parce que celle-ci est entièrement formelle et n'exprime aucun contenu de connaissance, ni à partir des principes de la logique transcendantale parce que celle-ci n'a pas d'usage en dehors de l'intuition. Pour Kant, notre esprit ne peut recevoir de représentations que par cette faculté qu'il nomme « sensibilité », et nos pensées sont sans contenu si elles n'ont aucun rapport à l'intuition sensible. Toute possibilité de déduire les jugements arithmétiques – qui expriment un contenu de connaissance – à partir de jugements logiques est donc exclue.

Le projet de Frege est de montrer au contraire que pour les démonstrations arithmétiques, aucun recours à la construction de concepts dans l'intuition n'est requis et que la pensée pure est capable, par elle-même, de définir les objets et de produire les connaissances de l'arithmétique. L'entreprise de formalisation qui est engagée et exposée dans l'*Idéographie* vise à atteindre ce but.

Que l'arithmétique se déduise de la logique et qu'il soit possible de faire l'économie de tout recours à l'intuition dans l'écriture d'une preuve ne signifie évidemment pas que les mathématiciens puissent se passer de cette intuition dans leur pratique scientifique. Cela signifie seulement qu'en rendant parfaitement explicites toutes les étapes d'un raisonnement arithmétique, on peut montrer que celles-ci ne requièrent que des moyens purement logiques, tant pour la définition ou la donnée initiale des objets – les nombres – que pour la conduite ultérieure des preuves. Un tel programme suppose que soient indiquées non seulement l'intégralité des propositions utilisées dans les démonstrations, sans qu'aucun présupposé ne demeure implicite, mais également les règles d'inférence selon lesquelles s'effectue, dans le cours de la démonstration, le passage d'une ou plusieurs propositions à une proposition ultérieure. Voilà précisément en quoi consiste la formalisation de l'arithmétique qui est entreprise par Frege, d'abord dans l'*Idéographie* en 1879 puis dans *Les Lois fondamentales de l'arithmétique* dont les deux volumes sont publiés, respectivement, en 1893 et en 1903.

Or, lorsqu'il tente de réaliser cette entreprise de formalisation, Frege constate que le langage usuel est tout à fait inadéquat. Cette difficulté est présentée dans la préface de l'*Idéographie* :

« Pour que rien d'intuitif ne puisse s'introduire ici subrepticement, tout devait reposer sur l'absence de lacune dans la chaîne d'inférence. Comme j'essayais de satisfaire à cette exigence le plus rigoureusement, je trouvai un obstacle dans l'inadéquation du langage : en dépit des lourdeurs de l'expression, plus les relations devenaient complexes, moins la précision que mon dessein exigeait pouvait être atteinte. De cette déficience surgit l'idée de la présente idéographie. »

L'idéographie est une langue auxiliaire spécialement conçue afin que puissent être exprimés en toute clarté les rapports logiques entre des contenus de pensée. Pour expliquer la fonction de cette « écriture conceptuelle » (tel est le sens littéral du mot allemand *Begriffsschrift*), Frege a recours à l'analogie suivante : l'idéographie est à la langue courante ce que le microscope est à l'œil. Si celui-ci, comme la langue usuelle, est mieux adapté aux multiples circonstances de la vie, le microscope, comme l'idéographie, répond beaucoup mieux aux exigences scientifiques de précision et de distinction. Car Frege conçoit son idéographie comme une langue de la pensée pure qui fait usage de signes et de formules spécifiques et qui, à la différence des langues naturelles, ne laisse place à aucune sorte d'ambiguïté.

Pour atteindre un tel but, réaliser un tel instrument pour l'expression de la pensée pure, il ne suffisait pas de rendre parfaitement explicites toutes les propositions présupposées et de veiller à ce que les chaînes déductives ne comportent aucune lacune. Il fallait également préciser quels étaient les signes dont la langue de la pensée autorisait l'usage et comment ces signes devaient être compris et utilisés ; quels étaient, en quelque sorte, les éléments de la pensée pure ; et il fallait proposer, corrélativement, une méthode d'analyse logique des propositions qui permette d'en révéler la structure, non en suivant les suggestions de la grammaire, qui sont toujours relatives à une langue particulière, mais dans le respect du sens de ces propositions et en montrant quelles sont leurs parties les plus élémentaires du point de vue logique.

C'est peut-être sur ce dernier point que les réformes introduites par Frege sont les plus radicales, mesurées à l'échelle de cette histoire de la logique qu'on fait habituellement remonter à l'Antiquité. Car l'ancienne analyse d'Aristote, selon laquelle toute proposition déclarative (par exemple « Socrate est musicien ») peut être analysée comme l'attribution d'un prédicat (musicien) à un sujet (Socrate) avait traversé les siècles. À cette analyse particulièrement peu éclairante pour les énoncés et les raisonnements mathématiques, Frege substitue une méthode dans laquelle il distingue deux catégories logiques fondamentales : les *objets* (par exemple Socrate, le fleuve qui traverse l'Égypte, la Seine) et les *fonctions*, dont l'expression linguistique (« … est musicien », « … est plus long que… », etc.) comporte une ou plusieurs places vides. C'est en comblant ces places vides qu'on forme des propositions déclaratives. « Socrate est musicien » peut alors être vu comme l'application de la fonction « … est musicien » à l'argument « Socrate », et « le fleuve qui traverse l'Égypte est plus long que la Seine » comme l'application de la fonction « … est plus long que… » aux deux arguments « le fleuve qui traverse l'Égypte » et « la Seine », pris dans cet ordre.

Contrairement à la logique traditionnelle issue d'Aristote, cette méthode d'analyse logique a recours aux relations (qu'elles soient à une place, comme « … est musicien », à deux places, comme « … est plus long que… », ou davantage comme dans « … préfère…

Poggiolesi F., Wagner P. (dir.), *Précis de philosophie de la logique et des mathématiques*, vol. 1 : *Philosophie de la logique*, Paris, Éditions de la Sorbonne, 2021.
Quine W.V.O., *Méthodes de logique* (1952), trad. M. Clavelin, Paris, Armand Colin, 1973.
–, *Du point de vue logique* (1953), trad. C. Alsaleh, B. Ambroise, D. Bonnay *et alii*, Paris, Vrin, 2003.
–, *La Philosophie de la logique* (1970), trad. J. Largeault, Paris, Aubier, 2008.
Read S., *Thinking about Logic*, Oxford, Oxford University Press, 1995.
Rivenc F., *Introduction à la logique*, Paris, Payot, 1989.
–, *Introduction à la logique pertinente*, Paris, Puf, 2005.
Rivenc F., Rouilhan Ph. de (dir.), *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914)*, Paris, Payot, 1992.
Rivenc F., Sandu G., *Entre logique et langage*, Paris, Vrin, 2009.
Russell B., *Écrits de logique philosophique*, Paris, Puf, 1989.
–, *Introduction à la philosophie mathématique* (1919), trad. F. Rivenc, Paris, Payot, 1991.
Smullyan R., *Le Livre qui rend fou* (1982), trad. J. Marthon, Paris, Dunod, 1984.
–, *Logical Labyrinths*, Wellesley, AK Peters, 2009.
Tarski A., *Logique, sémantique, métamathématique*, 2 vol., Paris, Armand Colin, 1972 et 1974.
Van Dalen D., *Logic and Structure*, Berlin, Springer, 1980 ; rééd. 2004.
Van Ditmarsch H. *et alii*, *Handbook of Epistemic Logic*, College publications, 2015.
Van Heijenoort J. (dir.), *From Frege to Gödel : A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge (Massachusetts), Harvard University Press, 1967.
Vernant D., *Introduction à la logique standard*, Paris, Flammarion, 2001.
Wagner P., *Logique et philosophie*, Paris, Ellipses, 2014.

TABLE DES MATIÈRES