

ECT

1^{re} année

Sylvain Rondy

Pierre Berlandi

Claude Huet

Gianfranco Niffoi

Anne-Sophie Pierson-Fertel

Nicolas Pierson

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai-faux
- Erreurs à éviter
- Exercices de base et d'approfondissement
- Énoncés de sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

Nouveau programme



PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques

ECT - 1^{re} année

nouveau programme

ouvrage coordonné par

Sylvain RONDY

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Pierre BERLANDI

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Claude HUET

Professeur à l'ENC Bessières (Paris)

Gianfranco NIFFOI

Professeur au lycée Saint Michel de Picpus (Paris)

Nicolas PIERSON

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Anne-Sophie PIERSON-FERTEL

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)



COLLECTION PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



ISBN 978-2-7298-9460-3
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2014
32, rue Bague 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir surveillé, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire toutes les notions à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir surveillé ou le passage d'une colle relative au thème traité. Les résultats sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthode » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révéler les mauvais réflexes à corriger. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi cet ouvrage vous accompagnera tout au long de l'année et vous guidera dans votre cheminement **vers le passage en deuxième année et la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Premier semestre

1. Raisonnements mathématiques.....	1
2. Ensembles - Applications	17
3. Calculs numériques - Calculs littéraux	35
4. Équations - Inéquations (1 ^{er} et 2 nd degré).....	61
5. Fonctions polynomiales - Fonctions rationnelles	87
6. Racine carrée	111
7. Suites usuelles - Premières sommes	129
8. Généralités sur les fonctions.....	149
9. Limites – Continuité - Branches infinies	169
10. Dérivabilité - Variations - Convexité	189
11. Espaces probabilisés finis	209
12. Conditionnement - Indépendance.....	233
13. Variables aléatoires finies	257
14. Statistique descriptive univariée	281

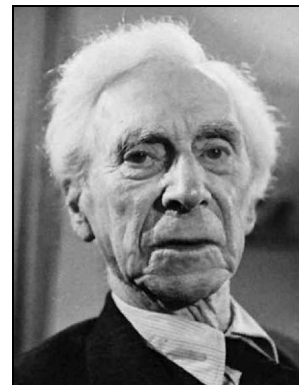
Deuxième semestre

15. Systèmes linéaires	303
16. Valeur absolue.....	323
17. Logarithme - Exponentielle	339
18. Suites : compléments	361
19. Limites des fonctions : compléments.....	385
20. Continuité sur un intervalle	403
21. Intégration sur un segment.....	421
22. Sommes - produits	451
23. Coefficients binomiaux.....	475
24. Variables aléatoires finies : compléments.....	489
25. Lois discrètes finies usuelles	505
26. Informatique.....	523
Index.....	561

Chapitre 1

Raisonnements mathématiques

Le mathématicien italien Giuseppe **Peano** était très soucieux d'exposer les mathématiques dans un cadre précis et rigoureux. Dans son *Formulaire mathématique* publié en 1895, il introduisit de nombreux symboles nouveaux. On lui doit en particulier \cap et \cup désignant respectivement l'intersection et la réunion. Il utilise la lettre grecque *epsilon*, abréviation du grec *esti, il est*, pour noter l'appartenance et introduit le quantificateur existentiel qu'il note \exists , renversant un E pour signifier l'initiale du mot italien *esiste*. Il propose aussi de supprimer les déclinaisons du latin pour obtenir une langue internationale, simple et comprise par tous, qu'il nomme *Latino sine flexione*. Le logicien anglais Bertrand **Russel** propose un paradoxe qui remet en cause la théorie des ensembles et nécessite de la fonder sur un système d'axiomes.



Bertrand Russel
1872-1970

■■■ Objectifs

■ Les incontournables

- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence.
- ▷ Savoir mettre en place un contre-exemple.

■ Et plus si affinités

- ▷ Savoir mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.
- ▷ Savoir manipuler les connecteurs logiques et les quantificateurs.

■ ■ Résumé de cours

■ Les éléments du raisonnement

□ Proposition

Définition 1.1. — On appelle proposition toute phrase \mathcal{P} dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable x , nous pourrions la noter $\mathcal{P}(x)$.

Remarque 1.1 — On écrira indifféremment " \mathcal{P} " ou " \mathcal{P} est vraie".

Exemple 1.1. — Pour tout réel x strictement positif, " $x-1 > 0$ " est une proposition dépendante de la variable x . Elle est vraie si $x > 1$, et fausse sinon.

Exemple 1.2. — Pour un dé lancé, "*le numéro sorti est pair*" est une proposition.

Exemple 1.3. — Pour tout réel x , " $(2x+1)^2$ " n'est pas une proposition.

□ Quantificateurs

Notation — Le signe " \forall " placé devant une variable x signifie "*quel que soit x ...*".

Le signe " \exists " placé devant une variable x signifie "*il existe (au moins) un x ...*".

Le signe " $\exists!$ " placé devant une variable x signifie "*il existe un unique x ...*".

" $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ " se lit : "*quel que soit le réel x , $x^2 + 1$ est strictement positif*" ou "*pour tout réel x , $x^2 + 1$ est strictement positif*".

" $\exists x \in]0, +\infty[, x^2 - 9 = 0$ " se lit : "*il existe au moins un réel x strictement positif tel que $x^2 - 9$ est égal à 0*" (il y en a d'ailleurs un unique : il s'agit de $x = 3$).

" $\exists! n \in \mathbb{N}^*, \frac{n(n+1)}{2} = 3$ " se lit : "*il existe un unique entier naturel n non nul tel que $\frac{n(n+1)}{2}$ est égal à 3*" (il s'agit du nombre 2).

Remarque 1.2. — Notons que, dans un énoncé, l'expression "*il existe un x* " signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

Propriété 1.1. — En général, la proposition $(\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x, y))$ est différente de $(\exists y, \forall x, \mathcal{P}(x, y))$.

Exemple 1.4. — La proposition " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$ " énonce que, quel que soit le réel x , il existe un entier n , tel que x soit compris entre n et $n+1$, cette dernière valeur étant exclue. C'est une proposition vraie (qui définit d'ailleurs ce que l'on appelle la partie entière de x). Elle est différente de la suivante : " $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x < n+1$ " qui affirme, quant à elle, que tous les réels sont compris entre deux entiers fixés. Elle est évidemment fausse.

Remarque 1.3. — Dans l'expression " $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \dots$ ", il faut noter que x dépend de y , on devrait en toute rigueur le noter x_y ou $x(y)$, ce que l'on ne fait presque jamais.

□ Connecteurs logiques

Définition 1.2. — La proposition contraire de \mathcal{P} , notée $\text{non } \mathcal{P}$ et appelée *négation* de \mathcal{P} , est la proposition qui est vraie lorsque \mathcal{P} est fausse et qui est fausse lorsque \mathcal{P} est vraie.

Propriété 1.2. — La négation de $(\forall x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\exists x, \text{non } \mathcal{P}(x))$.
La négation de $(\exists x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\forall x, \text{non } \mathcal{P}(x))$.

Exemples 1.5. — Pour un dé lancé trois fois, le contraire de "les trois numéros obtenus sont pairs" est "au moins un des numéros obtenus est impair".

La négation de " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$ " est : " $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, x < n$ ou $x \geq n+1$ ".

La première proposition est vraie puisqu'elle définit l'entier n qui est la partie entière de x (voir **exemple 1.4**) et la deuxième est fausse car il n'existe pas de réel x tel qu'aucun entier ne soit dans l'intervalle $]x-1, x]$.

Définition 1.3. — Soit \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux propositions. On appelle *disjonction* de \mathcal{P} et \mathcal{Q} la proposition $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q})$, le "ou" étant entendu ici inclusivement (soit \mathcal{P} , soit \mathcal{Q} , soit les deux).

Exemple 1.6. — Pour un dé lancé, on considère \mathcal{P} : "le numéro sorti est pair", et \mathcal{Q} : "le numéro sorti est supérieur ou égal à 3". Alors, $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q})$ est : "le numéro sorti est 2, 3, 4, 5 ou 6".

Définition 1.4. — Soit \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux propositions. On appelle *conjonction* de \mathcal{P} et \mathcal{Q} la proposition $(\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q})$ (les deux simultanément).

Exemple 1.7. — En reprenant l'**exemple 1.6**, $(\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q})$ est : "le numéro sorti est 4 ou 6".

Définition 1.5. — Soit \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux propositions. On dit que \mathcal{P} *implique* \mathcal{Q} , et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, lorsque, si \mathcal{P} est vraie, alors \mathcal{Q} est vraie (l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).

Vocabulaire — Lorsque \mathcal{P} implique \mathcal{Q} , on dit que \mathcal{P} est une condition suffisante de \mathcal{Q} , et que \mathcal{Q} est une condition nécessaire de \mathcal{P} .

⇒ **Méthode 1.1.** Comment montrer une proposition par implication ?

Exemple 1.8. — Pour tout réel x , on a : $(x = x^2) \Rightarrow (x \geq 0)$ (l'implication réciproque est fausse).

Définition 1.6. — Soit \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux propositions. On dit que \mathcal{P} *équivalent* à \mathcal{Q} (ou que \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Vocabulaire — Lorsque \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont équivalentes, on dit que \mathcal{P} est vraie si, et seulement si, \mathcal{Q} est vraie. On dit aussi que \mathcal{P} est une condition nécessaire et suffisante de \mathcal{Q} .

Exemple 1.9. — $\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+, (\sqrt{a} < \sqrt{b}) \Leftrightarrow (a < b)$.

Exemple 1.10. — Pour tout entier n , n est multiple de 6 si, et seulement si, n est multiple à la fois de 2 et de 3.

■ Différents types de raisonnements

□ Démonstration par contre-exemple

Théorème 1.1. — Pour montrer qu'une propriété n'est pas toujours vraie, on trouve un contre-exemple, c'est-à-dire un exemple pour lequel la propriété est fausse.

⇒ **Méthode 1.2.** Comment utiliser le contre-exemple ?

□ Démonstration par l'absurde

Théorème 1.2. — Quelles que soient les propositions \mathcal{P} et \mathcal{Q} , pour montrer que \mathcal{P} implique \mathcal{Q} , on suppose que \mathcal{P} est vraie et que \mathcal{Q} est fausse. Ensuite on tente d'en déduire une contradiction.

⇒ **Méthode 1.3.** Comment montrer une proposition par l'absurde ?

□ Démonstration par récurrence

Théorème 1.3. — Pour un entier naturel n , considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$.

Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si, pour un entier naturel n **fixé supérieur ou égal à n_0** , la proposition $\mathcal{P}(n)$ implique la proposition $\mathcal{P}(n+1)$, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 .

⇒ **Méthode 1.4.** Comment montrer une proposition par récurrence ?

Vocabulaire. — La preuve de $\mathcal{P}(n_0)$ s'appelle l'*initialisation* de la récurrence. La vérité de l'implication ($\mathcal{P}(n)$ est vraie) \Rightarrow ($\mathcal{P}(n+1)$ est vraie) s'appelle l'*hérédité* de la proposition.

Attention ! Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n . C'est pour un entier n **fixé** que l'on montre que, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Remarque 1.4. — La plupart du temps, on a $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

■ ■ Méthodes

■ Différents types de raisonnement

□ Méthode 1.1. Comment montrer une proposition par implication ?

La plupart du temps, pour prouver une proposition, on procède par implication (sans se sentir obligé d'utiliser le symbole \Rightarrow) en construisant un raisonnement "direct".

\Rightarrow Exercice 1.3

Exemple. Montrer que, si $x < 1$, alors $(x-4)^2 > 9$.

Si $x < 1$, alors on a : $x - 4 < -3$.

Par décroissance de la fonction "carré" sur \mathbb{R}_- , on en déduit que : $(x-4)^2 > 9$.

Avec des notations plus symboliques, on vient de montrer que : $x < 1 \Rightarrow (x-4)^2 > 9$.

□ Méthode 1.2. Comment utiliser le contre-exemple ?

Pour montrer qu'une implication est fausse, il suffit de trouver un exemple qui montre que c'est le cas.

\Rightarrow Exercices 1.1, 1.2

Exemple. Montrer que si l'on a $x^2 = y^2$, alors on ne peut pas en déduire que $x = y$.

En effet, avec $x = 2$ et $y = -2$, on a bien $x^2 = y^2$ et pourtant, on a : $x \neq y$.

□ Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par l'absurde ?

Pour montrer qu'une implication est vraie, il suffit de supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse, puis d'en déduire une contradiction.

\Rightarrow Exercice 1.4

Exemple. Montrer que pour tout nombre réel x différent de -3 , on a : $\frac{x+1}{x+3} \neq 1$.

Par l'absurde, si l'on avait $\frac{x+1}{x+3} = 1$, alors on en déduirait $x+1 = x+3$, ce qui équivaut à $1 = 3$.

Ceci étant manifestement faux, on en déduit que : $\forall x \neq -3, \frac{x+1}{x+3} \neq 1$.

□ **Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par récurrence ?**

n_0 est ici un entier naturel fixé.

On veut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n à partir de n_0 .

- Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Hérité : on considère un entier n fixé supérieur ou égal à n_0 tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. En utilisant $\mathcal{P}(n)$, on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0 .

⇒ Exercices 1.5, 1.6

Exemple. On pose $u_0 = 1$ et on suppose que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n^2$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$ est constante égale à 1.

On commence par noter, pour n entier naturel, $\mathcal{P}(n) : "u_n = 1"$.

- Initialisation : on a bien $u_0 = 1$.
- Hérité : on suppose que $u_n = 1$ pour un entier naturel n fixé dans \mathbb{N} .

On a alors : $u_{n+1} = 1^2 = 1$.

Ceci montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- En conclusion, on a bien montré, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$.