

Introduction

Née d'un foisonnement d'idées mathématiques et physiques, l'homogénéisation s'est affirmée comme méthode permettant de dépasser le cadre usuel d'une description de phénomènes élémentaires en milieu homogène, pour atteindre l'objectif d'une description globale de phénomènes couplés en milieux hétérogènes. En donner, dans une synthèse pédagogique, les points-clefs méthodologiques et les apports aux sciences de l'ingénieur, tel est l'objectif de cet ouvrage.

Quelle est la problématique ? L'observation, même sommaire, des matériaux naturels ou industriels, montre qu'ils se présentent souvent sous la forme d'assemblage de différents constituants agencés selon des structures variées, et qu'ils sont donc hétérogènes.

A titre d'exemple, considérons le comportement des matériaux du génie civil. Les descriptions des phénomènes qui se déroulent en leur sein – et en conséquence les règles de conception des ouvrages construits avec ces matériaux – sont, pour l'essentiel, issues de la mécanique des milieux continus appliquée à des milieux homogènes. Cette théorie a largement fait ses preuves, comme l'atteste le bon fonctionnement d'un très grand nombre de réalisations conçues à partir de ces principes, ainsi que la pertinence des modélisations construites sur cette approche. Cette simple constatation, amène à penser que les matériaux hétérogènes peuvent, au moins dans certaines conditions de sollicitations, être assimilés à des milieux homogènes continus. Mais pour quelles raisons, et dans quelle mesure cette idée est-elle valable ?

Par ailleurs, si pour ce milieu apparemment continu, la nature hétérogène du matériau est masquée, il est clair en revanche, que son comportement dépend des caractéristiques des hétérogénéités. Comment alors procéder pour intégrer les propriétés des constituants, afin de construire le comportement du milieu continu homogène équivalent ?

Ces deux points sont d'importance pratique. D'une part, la maîtrise des limites d'une méthode joue dans le sens de la sécurité, d'autre part, la détermination du milieu

continu équivalent permet, pour les matériaux naturels, de mieux saisir les paramètres pilotant le comportement, et pour les matériaux artificiels, d'adapter les constituants selon les performances recherchées.

Les méthodes d'homogénéisation sont conçues pour répondre à ces questions. De fait, elles permettent – dans des conditions bien précises – d'obtenir le comportement de milieux hétérogènes à partir de celui des hétérogénéités.

La condition essentielle pour l'existence d'un continu équivalent est que le mécanisme physique étudié fluctue selon une échelle spatiale très grande devant celle des hétérogénéités.

Cette condition de séparation des échelles est à l'origine des dénominations « *méthodes de changement d'échelles* » ou « *méthodes des échelles multiples* ». Le terme d'« *homogénéisation* » en résulte également, car imaginer des hétérogénéités de taille infinitésimale vis-à-vis du phénomène conduit naturellement à percevoir le milieu comme un continu homogène, plus précisément, homogénéisé.

Relier le comportement observable à grande échelle à des mécanismes microscopiques est une préoccupation ancienne des physiciens.

Un exemple fameux est celui de l'élasticité de Navier (1821), et Poisson (1829), qui, à partir d'un modèle moléculaire particulier, obtiennent un comportement macroscopique élastique isotrope à un coefficient : les deux coefficients de Lamé sont égaux. Cauchy obtiendra en 1828, (Cauchy, 1828), un modèle élastique isotrope à deux coefficients à partir d'un modèle moléculaire plus sophistiqué. Parmi les grands noms, citons également les travaux précurseurs de Rayleigh (1892) sur la conductivité des milieux contenant des impuretés disposées en maille parallélépipédique, ou ceux d'Einstein (1906) sur la viscosité des suspensions et les vitesses de sédimentation.

Ces tentatives demeurent éparées jusqu'aux années 1950 où les nécessités du développement industriel requièrent une compréhension approfondie du comportement des matériaux naturels (secteur pétrolier), manufacturés (en particulier les aciers et alliages), ou la conception de nouveaux matériaux (principalement en aéronautique). Pour restituer l'importance des mécanismes à petite échelle dans le comportement global, les réponses scientifiques d'alors sont les modélisations micromécaniques phénoménologiques élaborées à partir de concepts thermodynamiques. Les travaux pionniers de Biot (1941) et de Hill (1965) s'inscrivent dans cette ligne.

C'est dans la décennie 1970 que naît une nouvelle école de pensée initiée par Keller où la question du changement d'échelle est abordée sous un angle assez différent. Il s'agit de la méthode des développements asymptotiques à échelles multiples. Initialement forgée par une approche plus mathématique que mécanicienne, cette méthode,

par la rigueur et le formalisme qu'elle apporte, constitue un véritable saut conceptuel. Les ouvrages de Bensoussan *et al.* (1978) et Sanchez-Palencia (1980) font toujours référence sur le sujet, des développements voisins ayant été menés en parallèle par l'école russe (Bakhvalov et Panasenko, 1989).

Confinées dans des cercles très spécialisés à leur début, ces méthodes connaissent un très grand essor depuis les années 1990. Durant cette période leurs domaines d'application se sont largement diversifiés à tous les secteurs de l'ingénierie classique, mais aussi aux sciences du vivant, notamment la biomécanique. Ce succès indéniable tient à l'efficacité des méthodes asymptotiques à traiter des physiques complexes à l'échelle microscopique et à leur capacité d'intégrer des couplages entre phénomènes.

Cependant si leur utilisation est devenue presque routinière pour des groupes de chercheurs, elle reste actuellement peu expliquée sous une forme adaptée aux ingénieurs et chercheurs travaillant dans des domaines périphériques. Ces considérations nous ont persuadé de l'intérêt de réaliser un ouvrage qui trace une vision cohérente de ces approches et les rendent accessibles à une audience plus large que celles des spécialistes de ce domaine de recherche.

Plutôt qu'être exhaustif (ce qui serait d'ailleurs désormais difficile), nous avons choisi de sélectionner quelques problèmes où les points essentiels peuvent être présentés de manière simple. L'objectif est également – au travers d'un traitement unifié – de dessiner ainsi une ligne de pensée commune à l'ensemble des questions abordées. Dans cet esprit, la bibliographie n'a pas pour but d'être exhaustive, mais de donner au lecteur les principales clés de la littérature et les références qui correspondent aux grandes étapes des problèmes traités.

Ce livre, pensé à partir du cours de Mécanique de Milieux Hétérogènes dispensé à l'université de Grenoble par J.-L. Auriault, est conçu pour être un cours de base en méthodes de changement d'échelles, s'adressant à des étudiants avancés, ingénieurs, doctorants. Dans un but pédagogique, nous avons adopté une démarche progressive sur chaque sujet, revenant dans un premier temps sur des problèmes classiques, les accompagnant ensuite de développements récents. D'autre part il nous a semblé utile d'illustrer le potentiel d'application des résultats issus de l'homogénéisation. Ainsi, dans chacun des thèmes traités, les résultats théoriques sont suivis d'un exemple de développement en aval de l'homogénéisation concrétisant les avancées dans un domaine particulier d'application.

L'ouvrage est structuré en deux tomes de deux parties chacun, elles-mêmes numérotées de 1 à 4.

La première partie (tome 1) est une introduction à la philosophie des méthodes d'homogénéisation. Les méthodes dédiées aux milieux périodiques et aléatoires sont

exposées en insistant sur leur signification physique et leur potentiel d'application aux matériaux réels, souvent ni parfaitement périodiques ni parfaitement aléatoires.

Les exemples élémentaires exposés au chapitre 1 donnent un aperçu des outils essentiels des deux méthodes. Le chapitre 2 en détaille l'esprit et éclaire les liens qui les unissent et les spécificités qui les séparent. Les conditions d'application font l'objet d'une discussion approfondie qui cerne le champ de validité de ces approches. Ce panorama sur les méthodes souligne la puissance de la méthode asymptotique à échelles multiples pour traiter des physiques complexes à couplages multiples, dans des milieux de morphologie simple ou hiérarchique. En associant rigueur du formalisme et considérations intuitives, le chapitre 3 présente la méthodologie de l'approche en échelle multiple qui sera utilisée dans la suite de l'ouvrage. L'accent est mis sur l'usage systématique de l'analyse dimensionnelle en lien avec la séparation d'échelles. Est également précisée la manière de transcrire un problème concret concernant des matériaux réels dans le cadre de l'homogénéisation. Ce socle méthodologique est mis en oeuvre dans les parties suivantes où sont traités spécifiquement des mécanismes physiques impliquant des phénomènes couplés.

La deuxième partie (tome 1) présente un premier champ d'application de l'homogénéisation. La physique étudiée est celle des transferts par diffusion, convection et advection, phénomènes qui permettent d'introduire sur des cas concrets les atouts essentiels des méthodes de changement d'échelle.

Le chapitre 4 se focalise sur les transferts thermiques en milieu hétérogène. Au-delà du modèle classique de transfert thermique dans un composite, une diversité de modèles macroscopiques est obtenue résultant du niveau de contraste des propriétés de conduction des constituants et de leur interface. En particulier des effets de mémoire apparaissent du fait du non-équilibre local d'une phase de très faible conductivité, et des modèles à deux températures sont atteints pour des interfaces quasi isolantes. Les transferts de solutés en milieu poreux sont examinés au chapitre 5. Sont mises en évidence les différentes descriptions associées à des physiques locales de diffusion pure puis de diffusion-advection. Cette dernière situation, atteinte à fort niveau d'écoulement, se traduit par une dispersion à l'échelle macroscopique. Le champ de validité de chacun de ces modèles est explicitement spécifié. Le chapitre 6 exploite et complète ces résultats en portant l'attention sur des matériaux spécifiques. La procédure numérique d'homogénéisation périodique est illustrée par la détermination des coefficients de milieux fibreux et granulaires. Pour comparaison, des estimations analytiques auto-cohérentes classiques sont rappelées. Enfin, la confrontation à des résultats expérimentaux permet de juger de la pertinence de ces modèles pour décrire les propriétés de matériaux réels.

La troisième partie (tome 2) est consacrée à la modélisation d'écoulements de fluide newtonien en milieu poreux rigide.

Le chapitre 7 traite des fluides incompressibles par la méthode asymptotique à échelles multiples. Il débute par le problème canonique de la loi de Darcy (régime permanent laminaire). Il se poursuit par la prise en compte des effets inertiels, d'une part en régime dynamique linéaire ce qui conduit aux effets de mémoire par couplage visco-inertiel, et d'autre part en régime permanent advectif, où le correcteur dû à de faibles non-linéarités est établi. Les écoulements en milieu poreux de fluides compressibles tels que les gaz font l'objet du chapitre 8. Avec la méthode asymptotique, sont abordés successivement les écoulements sous forte pression en régime permanent, les effets de glissement en paroi de gaz raréfiés et, en régime dynamique, la description acoustique sous faible perturbation de pression avec couplage thermique. Le passage des résultats théoriques d'homogénéisation à leur formulation numérique est illustré au chapitre 9. La résolution des problèmes locaux établis par homogénéisation périodique est présentée pour le calcul de la perméabilité de Darcy de milieux granulaires et fibreux. Enfin, le chapitre 10 reprend les problèmes linéaires traités dans cette partie dans le cadre d'une approche auto-cohérente. Des estimations analytiques et des bornes sont ainsi établies pour les perméabilités statique et dynamique, les effets thermiques, les corrections de glissement en paroi, et – par analogie – pour la constante de piégeage.

La quatrième partie (tome 2) est dédiée aux comportements des milieux poreux saturés déformables.

Le chapitre 11 considère les comportements en régime quasi statique, en examinant d'abord celui de la matrice poreuse vide (cas particulier de composite élastique) puis celui du milieu saturé, introduisant de fait le couplage fluide-solide. Selon l'ampleur du contraste de propriétés en cisaillement du fluide et du solide, la méthode asymptotique à échelles multiples conduit à trois comportements distincts dont les propriétés sont discutées. L'étude des comportements poro-élastiques est étendue au régime dynamique dans le chapitre 12. Les caractéristiques des trois comportements possibles – incluant le modèle biphasique de type Biot – font l'objet d'une analyse approfondie, en particulier sur les propriétés des coefficients effectifs. Le champ de validité de chacune des descriptions est spécifié. Le chapitre 13 met en oeuvre numériquement les résultats de l'homogénéisation pour mener une analyse paramétrique des coefficients élastiques et de couplage du modèle biphasique. Parallèlement, ces résultats obtenus sur des milieux granulaires cohésifs sont comparés aux estimations classiques auto-cohérentes et aux bornes. Au chapitre 14 le comportement homogénéisé biphasique est exploité en vue de décrire la propagation d'ondes en milieux poreux saturés. Après avoir précisé les propriétés des trois modes de propagation, la transmission d'ondes à une interface poroélastique est examinée. On établit également dans le cadre de la poro-élasticité l'expression des fonctions de Green, la formulation intégrale, et les champs rayonnés par des dislocations ponctuelles.

Pour compléter la présentation de cet ouvrage il est utile de mentionner certains sujets importants qui n'y sont pas traités (ou seulement évoqués de manière très partielle).

L'un de ces sujets est celui des microstructures complexes. De fait, nous ne considérerons que des milieux dont la géométrie locale est suffisamment simple pour être caractérisée par une taille typique d'hétérogénéité et dont les problèmes locaux sont formulés en termes de milieu continu. Ce choix laisse de côté :

- les milieux dont l'architecture fait intervenir des tailles caractéristiques très différentes (tels que les milieux à double porosité). Ceux-ci peuvent être le siège de phénomènes physiques variés interagissant à chaque échelle. Ces multiples opportunités de couplages augmentent grandement la diversité des comportements macroscopiques, certains n'étant possibles que dans ces milieux ;
- les milieux tels que le fonctionnement de la microstructure peut se réduire à celui de quelques points matériels en interactions (par exemple les noeuds de structures treillis). Il est alors préférable d'utiliser une description locale discrète et de passer à une description continue par homogénéisation. Cette alternative ne sera pas exposée ici.

Un deuxième aspect seulement esquissé est celui des correcteurs des descriptions macroscopiques établies au premier ordre significatif. En effet, pour l'essentiel, les résultats présentés ici se restreignent au premier terme significatif, et conduisent à des descriptions de type milieu continu matériellement simples, descriptions valides dans la masse du milieu hétérogène. A ces descriptions il conviendrait d'apporter deux correcteurs :

- ceux émergeant à la frontière du milieu. Ils se traduisent par une couche limite, d'épaisseur de l'ordre de la taille du volume élémentaire représentatif, permettant le raccord entre les conditions aux limites locales et homogénéisées ;
- ceux permettant d'approcher les situations de faible séparation des échelles obtenus en intégrant les termes d'ordres supérieurs aux descriptions homogénéisées. Ces correcteurs des modèles continus simples introduisent des effets non locaux dont la portée spatiale est de l'ordre de la taille du volume élémentaire représentatif.

Enfin, un troisième vaste sujet que nous ne développerons pas est celui de la prise en compte de non-linéarités. L'ensemble des cas présentés se rapporte à des phénomènes linéaires, ou parfois faiblement non linéaires, de sorte que la non-linéarité se traite comme une perturbation d'une solution linéaire. Qu'elles soient d'origine matérielles ou géométriques, les non-linéarités introduisent des difficultés théoriques considérables vis-à-vis des situations linéaires. Si l'établissement de critères par analyse limite locale, la rhéologie de composites élastiques non linéaire en loi de puissance, ou l'écoulement de fluides non newtoniens à loi de puissance en milieu poreux ont pu être traités avec succès, les non-linéarités posent, d'une manière générale, un véritable défi aux méthodes de changement d'échelles.

Ces trois thématiques omises – microstructures complexes, correcteurs, non linéarités – sont très intéressantes, riches et mériteraient à elles seules des développements conséquents. Nous espérons que ce volume apporte une base suffisamment claire et solide pour guider le lecteur qui souhaite explorer ces domaines.

Cet ouvrage est le fruit d'une collaboration de longue date entre ses auteurs. Il s'est bien sûr nourri du travail et des réflexions de nombreux amis, collègues, doctorants que nous sommes heureux de remercier pour l'aide qu'ils nous ont apportée, et tout particulièrement : P. Adler, I. Andrianov, L. Arnaud, P. -Y. Bard, J. F. Bloch, G. Bonnet, L. Borne, L. Dormieux, H. Ene, M. Lefik, T. Levy, J. Lewandowska, C.C. Mei, X. Olny, L. Orgéas, P. Royer, E. Sanchez-Palencia, T. Strzelecki. Notre gratitude s'adresse tout particulièrement à P. Adler dont les conseils judicieux et les remarques critiques ont permis d'enrichir cet ouvrage.