# Sommaire

**Chapitre 1 . Notions de base** . . . . . 7

A. Démonstration par récurrence . . . . . 8
B. Ensembles. . . . . . 9
C. Applications . . . . . 12
D. Calcul de sommes . . . . . 17
*Méthodes* . . . . . 22
*Exercices* . . . . . 23
*Solutions des exercices* . . . . . 25

**Chapitre 2 . Nombres complexes Polynômes** . . . . . 33

A. Propriétés fondamentales de $\mathbb{C}$ . . . . . 34
B. Ensemble $\mathbb{K}[X]$ . . . . . 39
*Méthodes* . . . . . 47
*Exercices* . . . . . 54
*Solutions des exercices* . . . . . 58

**Chapitre 3 . Espaces vectoriels et applications linéaires** . . . . . 75

A. Espaces vectoriels – Sous-espaces vectoriels . . . . . 76
B. Familles de vecteurs . . . . . 79
C. Somme de sous-espaces vectoriels . . . . . 85
D. Applications linéaires . . . . . 87
*Méthodes* . . . . . 95
*Exercices* . . . . . 103
*Solutions des exercices* . . . . . 107

**Chapitre 4 . Espaces vectoriels de dimension finie** . . . . . 121

A. Espaces vectoriels de dimension finie . . . . . 122
B. Sous-espaces vectoriels en dimension finie . . . . . 128
C. Rangs . . . . . 131
*Méthodes* . . . . . 136
*Exercices* . . . . . 142
*Solutions des exercices* . . . . . 145

**Chapitre 5 . Calcul matriciel** . . . . . 157

A. Espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,\,p}(\mathbb{K})$ . . . . . 158
B. Produit matriciel . . . . . 163
C. Ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ . . . . . 165

D. Transposition . . . . . 172
E. Rang d'une matrice . . . . . 174
*Méthodes* . . . . . 177
*Exercices* . . . . . 184
*Solutions des exercices* . . . . . 189

**Chapitre 6 . Systèmes d'équations linéaires** . . . . . 207
*Exercices* . . . . . 215
*Solutions des exercices* . . . . . 216

**Chapitre 7 . Réduction des endomorphismes et des matrices carrées** . . . . . 221
A. Changement de bases . . . . . 222
B. Réduction des endomorphismes . . . . . 224
C. Diagonalisation des matrices carrées . . . . . 226
*Méthodes* . . . . . 232
*Exercices* . . . . . 238
*Solutions des exercices* . . . . . 242

**Chapitre 8 . Algorithmique** . . . . . 257
A. Programmation . . . . . 258
B. Méthodes numériques . . . . . 270
*Exercices* . . . . . 280
*Solutions des exercices* . . . . . 285

CHAPITRE

# 1 Notions de base


A. Démonstration par récurrence . . . 8

B. Ensembles . . . 9

1. Appartenance . . . 9
2. Inclusion . . . 9
3. Opérations sur les ensembles. . . . 10

C. Applications . . . 12

1. Définitions. . . . 12
2. Composition des applications . . . 12
3. Restriction - Prolongement. . . . 13
4. Injection - Surjection - Bijection . . . 13
5. Fonction indicatrice d'une partie de E . . . 16

D. Calcul de sommes . . . 17

1. Formule du binôme . . . 17
2. Sommes doubles . . . 19

**Méthodes** : L'essentiel . . . 22

**Exercices niveau 1** . . . 23

**Exercices niveau 2** . . . 24

**Solutions des exercices**. . . . 25

# A. Démonstration par récurrence

**But** : Démontrer qu'une propriété qui dépend d'un entier naturel est vérifiée pour tout $n \geqslant n_0$.

**Méthode 1**

✎ $n_0 \in \mathbb{N}$, le plus souvent $n_0 = 0$ ou $1$.

Soit $R(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel $n$.
**1)** On montre que $R(n_0)$ est vraie. ✎
**2)** Pour un entier $n$ quelconque tel que $n \geqslant n_0$, on suppose que $R(n)$ est vraie et on montre qu'alors $R(n+1)$ est vraie.
On peut en conclure que pour tout $n \geqslant n_0$, $R(n)$ est vraie.

## Exemple 1

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

✎ Ici $n_0 = 1$.

Soit $R(n)$ la propriété : « $\dfrac{1}{1\times 2}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ ». ✎

**(1)** $R(1)$ est vraie car : $\dfrac{1}{1\times 2}=\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

**(2)** Soit $n \geqslant 1$. Supposons $R(n)$ vraie et montrons que $R(n+1)$ est vraie.

$\dfrac{1}{1\times 2}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ car $R(n)$ est vraie.

$$\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

Donc $R(n+1)$ est vraie.

*Conclusion* : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R(n)$ est vraie.

**Remarque**

La méthode 1 n'est utilisable que si la démonstration de « $R(n+1)$ est vraie » n'utilise que le fait que $R(n)$ est vraie et pas $R(n-1)$ vraie...
Sinon, il faut utiliser la méthode suivante.

**Méthode 2**

✎ $n_0 \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$
Le plus souvent : $n_0 = 0$, ou $1$ et $p = 0$ ou $1$.

Soit $R(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel $n$.
**1)** On montre que $R(n_0), \ldots, R(n_0+p)$ sont vraies.
**2)** Pour $n \geqslant n_0 + p$, on suppose que $R(n_0), \ldots, R(n_0+p), \ldots, R(n)$ sont vraies ✎ et on montre qu'alors $R(n+1)$ est vraie.
On peut en conclure que pour tout $n \geqslant n_0$, $R(n)$ est vraie.

## Exemple 2

Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et $a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrons que $a_n$ est un entier relatif pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $R(n)$ la propriété : « $a_n \in \mathbb{Z}$ ».
**(1)** $R(0)$ et $R(1)$ sont vraies par hypothèse.
**(2)** Soit $n \geqslant 1$. Supposons $R(0), R(1), \ldots, R(n)$ vraies et montrons que $R(n+1)$ est vraie.
$a_{n+1} = -a_n + a_{n-1}$, $a_n \in \mathbb{Z}$ et $a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ car $R(n)$ et $R(n-1)$ sont vraies, donc $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$ et $R(n+1)$ est vraie.

*Conclusion* : $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Remarque**

Si par définition, on avait eu $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et si on avait oublié de considérer $R(1)$ (qui est fausse dans ce cas !), on aurait obtenu une conclusion fausse.

# B. Ensembles

## 1. Appartenance

- Un ensemble $E$ est défini lorsque pour tout objet $x$, on peut dire si $x$ est élément de $E$ ou si $x$ n'est pas élément de $E$.
Si $x$ est élément de $E$, on dit que **$x$ appartient à $E$** et on note $x \in E$.
Si $x$ n'appartient pas à $E$, on note $x \notin E$.
- Deux ensembles sont **égaux** s'ils sont constitués des mêmes éléments.
- On peut définir un ensemble $E$ en énumérant ses éléments ou en définissant une propriété qui **caractérise** ses éléments, c'est-à-dire vérifiée par les éléments de $E$, et seulement par les éléments de $E$.

*Par exemple* : $E = \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{x \in \mathbb{N}/x$ pair et $x < 10\}$.

- Par définition, l'ensemble vide ne contient aucun élément, il est noté $\varnothing$.

**Notations usuelles pour les ensembles de nombres**

- $\mathbb{N}$ : ensemble des entiers naturels,
- $[\![1, \ n]\!]$ : ensemble des entiers naturels compris entre $1$ et $n$,
- $\mathbb{Z}$ : ensemble des entiers relatifs,
- $\mathbb{Q}$ : ensemble des nombres rationnels, ✎
- $\mathbb{R}$ : ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$ : ensemble des nombres complexes.

✎ $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x = \dfrac{p}{q}$ avec $\begin{cases} p \in \mathbb{Z} \\ q \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

## 2. Inclusion

Soit $E$ et $F$ deux ensembles.

$F$ est inclus dans $E$ lorsque tout élément de $F$ est élément de $E$.
On note alors $F \subset E$ et on dit que $F$ est une **partie de $E$** ou un **sous-ensemble de $E$**.
L'ensemble des parties de $E$ est noté $\mathscr{P}(E)$.
Par convention, $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$ pour tout ensemble $E$.

| Pour montrer que | on peut montrer que |
|---|---|
| $E \subset F$ | $\forall x \in E, x \in F$ |
| $E \not\subset F$ | $\exists x \in E, \ x \notin F$ |
| $E = F$ | $E \subset F$ et $F \subset E$ |