A. Fonctions numériques

1. Définitions

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle :

$$f : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}.$$

- Chaque réel x admet au plus une **image**, notée alors $f(x)$:

$$x \rightsquigarrow f(x).$$

- Les réels admettant une image par f constituent l'**ensemble de définition** de f, $\mathcal{D}_f$.

- Les réels admettant au moins un antécédent par f constituent l'**ensemble image** de f, $f(\mathcal{D}_f)$.

- L'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ dans le plan rapporté à un repère cartésien, où x est élément de $\mathcal{D}_f$, est la **courbe représentative** de f.

- A désignant une partie de $\mathbb{R}$, on appelle **restriction** de f à A la fonction g d'ensemble de définition $A \cap \mathcal{D}_f$ définie par :

$$\forall x \in A, \quad g(x) = f(x).$$

Exemple

✎ La fonction partie entière est présentée dans le chapitre 4 (§ B).

La restriction de la fonction partie entière ✎ à l'intervalle $[0, 1[$ est la fonction nulle sur cet intervalle.

- f étant définie sur $\mathcal{D}_f$ et A désignant une partie de $\mathbb{R}$ contenant $\mathcal{D}_f$, la fonction g définie sur A de telle façon que sa restriction à $\mathcal{D}_f$ coïncide avec f s'appelle un **prolongement de f à A.**

Exemple

Si f est la fonction nulle sur $[0, 1[$ et si g est la fonction définie sur $[0, 2]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ g(x) = 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

alors g est un prolongement de f à $[0, 2]$.

2. Éléments remarquables

2.1 – Maximum – Minimum

Définitions

- x_0 appartenant à $\mathcal{D}_f$, on dit que f atteint un **maximum** (resp. **minimum**) en x_0 lorsque :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$
$$(\text{resp. } \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) \geqslant f(x_0)).$$

- Lorsque cette propriété, non réalisée sur $\mathcal{D}_f$ entier, l'est sur un intervalle ouvert I contenant x_0, on dit que f admet un **extremum (maximum ou minimum) local** en x_0.

On note $f(x_0) = \max(f)$ (resp. $\min(f)$) ou $f(x_0) = \max\limits_{x \in I}[f(x)]$ (resp. $\min\limits_{x \in I}[f(x)]$).

Exemples

1) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$1 = 1 + 0^2 \leqslant 1 + x^2 \;\Rightarrow\; 1 = \sqrt{1+0^2} \leqslant \sqrt{1+x^2}$$
$$\Rightarrow\; 1 = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ainsi, la fonction $f : x \rightsquigarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, définie sur $\mathbb{R}$, atteint un maximum en 0 ; elle prend en ce point la valeur 1, le maximum de f est donc égal à 1.

2) Le polynôme $P : x \rightsquigarrow x^3 - 3x$ atteint un maximum local en -1 ; en effet :

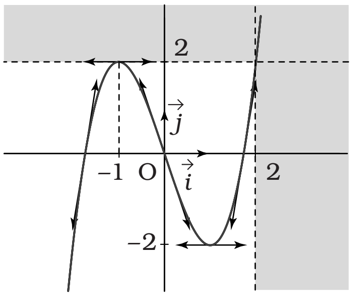
$P(-1) = 2$

et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) - P(-1) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$$

d'où : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) \geqslant P(-1) \Leftrightarrow x \geqslant 2.$$



2.2 – Majorant – Minorant

Définitions

- On dit que le réel M **majore** (resp. **minore**) ✎ la fonction f lorsque :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\quad f(x) \leqslant M$$
$$(\text{resp. } \forall x \in \mathcal{D}_f,\quad f(x) \geqslant M).$$

- Une fonction à la fois majorée et minorée est dite **bornée** :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall x \in \mathcal{D}_f,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$$

ce qui revient à :

$$\exists k \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |f(x)| \leqslant k.$$

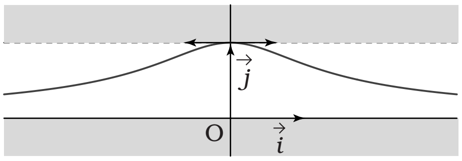
✎ On dit aussi que f est **majorée** (resp. **minorée**) par M.

Remarques

- Un majorant, quand il existe, n'est pas unique ; en effet, si M majore f, alors tout réel supérieur à M majore aussi f.
- Même remarque pour le minorant.

Exemple

Tout réel négatif est un minorant de $x \rightsquigarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et tout réel supérieur à 1 en est un majorant.



On notera que 1 en est le majorant le plus petit et que la fonction admet cette valeur comme maximum ; 0 est le minorant le plus grand, tandis que la fonction n'admet pas de minimum : cette situation illustre la notion de borne inférieure définie au paragraphe suivant.

2.3 – Borne supérieure – Borne inférieure

Définition

On appelle borne **supérieure** (resp. **inférieure**) de la fonction f, lorsqu'il existe, le plus petit des majorants de f (resp. le plus grand des minorants). On la note $\sup(f)$ (resp. $\inf(f)$).

Lorsqu'une fonction admet un maximum (ou un minimum), celui-ci est bien entendu aussi sa borne supérieure (ou inférieure).

Exemple

D'après l'exemple du paragraphe précédent, on a :

$$0 = \inf\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$1 = \max\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \sup\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

3. Opérations

3.1 – Définitions

f, g désignant des fonctions numériques d'une variable réelle et λ un nombre réel :

On définit ainsi l'addition de deux fonctions.

• La somme (ou l'addition) de f et de g est la fonction notée $f + g$ et définie par :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

On définit ainsi la multiplication de deux fonctions.

• Le produit de f et de g est la fonction notée $f \cdot g$ et définie par :

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x).$$

On définit ainsi la multiplication d'une fonction par un réel.

• Le produit du réel λ par la fonction f est la fonction notée λf définie par :

$$(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x).$$

On définit ainsi la composition de deux fonctions.

• La composée de f par g est la fonction notée $g \circ f$ et définie par :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

Exemples

1) Un monôme est le produit d'un réel par une fonction puissance d'exposant entier naturel.
2) Un polynôme est une somme de monômes.
3) $x \rightsquigarrow \ln(1+x^2)$ est la composée du polynôme $x \rightsquigarrow 1 + x^2$ par le logarithme népérien.

Remarque

Exprimer une fonction numérique d'une variable réelle donnée en faisant appel aux opérations ci-dessus et à des fonctions « élémentaires » (puissances, polynômes, logarithme népérien, exponentielle…) est un préalable implicite à la résolution de la plupart des exercices et problèmes. En effet, de nombreuses propriétés (ensemble de définition, continuité, dérivabilité…) s'argumentent grâce à cette expression.

3.2 – Propriétés

• En faisant appel au vocabulaire et aux notions présentées dans le chapitre 8,
– on reconnaît dans l'addition, la multiplication et la composition de deux fonctions trois **lois de composition interne** dans l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle ;
– on reconnaît dans la multiplication d'une fonction par un réel une **loi de composition externe** à opérateur réel dans l'ensemble des fonctions numériques.

• Ainsi, l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un **espace vectoriel réel**.
Une telle affirmation est le constat qu'un nombre réduit de propriétés essentielles – nécessaires à la « bonne marche » des calculs – sont vérifiées (par exemple l'associativité et la commutati-

vité de l'addition … entre autres) et que d'autres (des « règles de calcul » bien utiles) en découlent (ainsi la simplificabilité pour l'addition).

• Dans ce dernier contexte, l'opération qui a deux fonctions f et g et à deux réels λ et μ associe la fonction $\lambda f + \lambda g$ est appelée une **combinaison linéaire** de f et de g.

Ainsi, un polynôme, par définition, est une combinaison linéaire de fonction puissance d'exposant entier naturel.

4. Propriétés remarquables

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, de courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère cartésien orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

4.1 – Symétries

Définition

f est dite **paire** (resp. **impaire**) lorsque :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \in \mathscr{D}_f \Rightarrow -x \in \mathscr{D}_f) \\ \forall x \in \mathscr{D}_f, \; f(-x) = f(x) \quad \text{(resp. } f(-x) = -f(x)\text{)}. \end{cases}$$

On notera que ces appellations ont été choisies en prenant les fonctions $x \rightsquigarrow x^n$ (où $n \in \mathbb{N}$) pour références, la parité de la fonction correspondant à celle de l'exposant.

Exemple

$$f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_f &= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -1 \text{ et } \frac{x-1}{x+1} > 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -1 \text{ et } (x-1)(x+1) > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -1 \text{ et } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\} \\ &=]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

et de plus :

• $x \in \mathscr{D}_f \Rightarrow -x \in \mathscr{D}_f$

• $\forall x \in \mathscr{D}_f$:

$$f(-x) = \ln\frac{-x-1}{-x+1} = \ln\frac{x+1}{x-1} = -\ln\frac{x-1}{x+1} = -f(x)$$

f est donc impaire.

Remarque

f est paire $\Leftrightarrow$ l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

f est impaire $\Leftrightarrow$ l'origine du repère est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

Plus généralement : a et b désignant deux réels quelconques,

▪ **La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de** $\mathscr{C}$ lorsque :

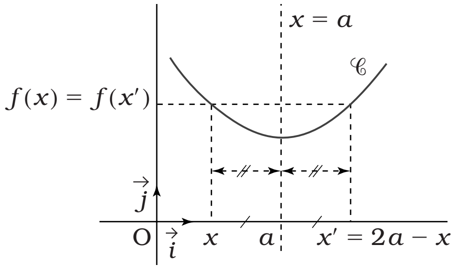
✎ $$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \in \mathscr{D}_f \Rightarrow 2a - x \in \mathscr{D}_f) \\ \forall x \in \mathscr{D}_f, \; f(2a - x) = f(x). \end{cases}$$

✎ Ceci équivaut à :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (a - x \in \mathscr{D}_f \\ \qquad \Rightarrow a + x \in \mathscr{D}_f) \\ \forall x \in \mathscr{D}_f, \; f(a - x) \\ \qquad = f(a + x) \end{cases}$$

puisque

$$a = \frac{x + x'}{2} \Leftrightarrow x' = 2a - x.$$

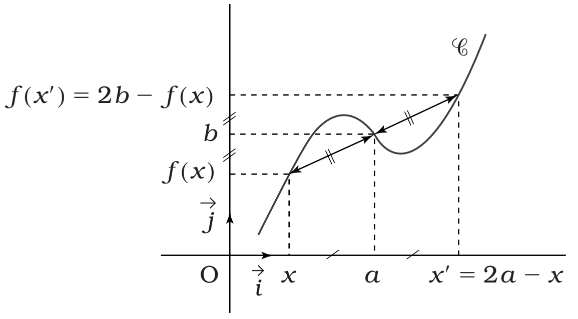


■ **Le point de coordonnées (a, b) est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$** lorsque :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \in \mathscr{D}_f \Rightarrow 2a - x \in \mathscr{D}_f) \\ \forall x \in \mathscr{D}_f \ , \ f(2a - x) = 2b - f(x). \end{cases}$$

✎ Ceci équivaut à :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (a - x \in \mathscr{D}_f \\ \qquad\qquad \Rightarrow a + x \in \mathscr{D}_f) \\ \forall x \in \mathscr{D}_f \ , \ f(a - x) \\ \qquad\qquad + f(a + x) = 2b. \end{cases}$$



Pour établir l'une des deux symétries précédentes, on peut soit vérifier ces propriétés soit effectuer un changement de repère pour obtenir une fonction paire ou impaire (exemple 2).

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$$

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

de plus : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$x \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow 2 - x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \qquad f(2 - x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$$

$$f(2 - x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{x-1}}} = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1}$$

$$f(2 - x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} + 1 - 1}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1}$$

$$f(2 - x) = 2 \times \frac{1}{2} - f(x).$$

Par suite, le point de coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de f.

■ ***Autre méthode (changement de repère) :***

Soit le point I de cordonnées $\left(1, \frac{1}{2}\right)$; on désigne par (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ et par (X, Y) les coordonnées du même point M dans le repère $(\mathrm{I}, \vec{i}, \vec{j})$. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{IM}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathrm{X} + 1 \\ y = \mathrm{Y} + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, une équation de la courbe est : $y = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}$; on cherche alors une équation de la courbe dans le repère $(\mathrm{I}, \vec{i}, \vec{j})$.

$$\mathrm{Y} + \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{X}}}} \Leftrightarrow \mathrm{Y} = \frac{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{X}}}}{2\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{X}}}\right)}$$

et si on note $\mathrm{Y} = \mathrm{F}(\mathrm{X})$, la fonction F est impaire ; en effet :
$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^*, \ -\mathrm{X} \in \mathbb{R}^*$

et $\mathrm{F}(-\mathrm{X}) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{X}}}}{2\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{X}}}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{X}}} - 1}{2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{X}}} + 1\right)} = -\mathrm{F}(\mathrm{X})$.

La courbe représentative de f admet donc l'origine du nouveau repère comme centre de symétrie, il s'agit du point $\mathrm{I}\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

4.2 – Périodicité

Certaines fonctions reprennent à intervalles réguliers les mêmes valeurs : leur étude s'en trouve simplifiée, puisqu'il suffit d'établir leur variation sur une partie seulement de leur ensemble de définition.

Définitions

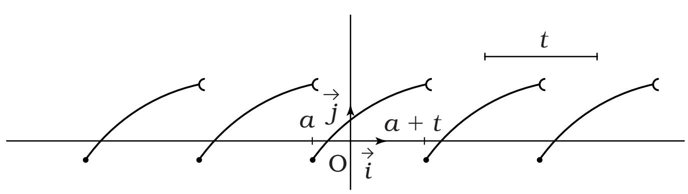
- On dit que f **est périodique de période** t $(t \in \mathbb{R}_+^*)$ lorsque :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \ (x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow x + kt \in \mathcal{D}_f) \\ \forall x \in \mathcal{D}_f \ , \qquad f(x + kt) = f(x). \end{cases}$$

- Si t est une période de f, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, kt est aussi une période de f.

La plus petite période de f s'appelle **la** période de f.

La courbe représentative d'une fonction périodique de période t s'obtient à partir de l'arc correspondant à un intervalle d'amplitude t par les translations de vecteur $kt\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.



Exemple

La fonction « partie décimale »

Int désignant la fonction « partie entière », définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{Z}$:

$$n = \mathrm{Int}(x) \Leftrightarrow n \leqslant x < n + 1,$$

la fonction d définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad d(x) = x - \mathrm{Int}(x) \ ✎$$

✎ Pour les réels **positifs**, d fournit la partie décimale.

est périodique, de plus petite période 1 ; en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad d(x + 1) = d(x).$$

4.3 – Monotonie

Définitions

Soit I un intervalle sur lequel f est définie ; on dit que :

- f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur I lorsque :
$\forall (x_1, x_2) \in \mathrm{I}^2$,
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leqslant f(x_2)$$
$$(\text{resp.} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

- f est **strictement croissante** (resp. **décroissante**) sur I lorsque :
$\forall (x_1, x_2) \in \mathrm{I}^2$,
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$
$$(\text{resp.} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)).$$

Remarque

f est croissante (resp. strictement croissante) sur I *si, et seulement si* :
$\forall (x_1, x_2) \in \mathrm{I}^2$,
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geqslant 0 \quad (\text{resp.} \ > 0).$$

Propriétés

- Toute somme, toute composée de fonctions croissantes est une fonction croissante.
- La composée de deux fonctions décroissantes est une fonction croissante.
- La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est une fonction décroissante.

Exemples

1) La fonction $x \rightsquigarrow \sqrt{1+x^2}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ comme composée de $x \rightsquigarrow x^2$, croissante sur $\mathbb{R}^+$, par $x \rightsquigarrow 1+x$, croissante sur $\mathbb{R}^+$, et par $x \rightsquigarrow \sqrt{x}$, croissante sur $[1, +\infty[$.

2) La fonction $x \rightsquigarrow 1 - \dfrac{1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée des fonctions décroissantes $x \rightsquigarrow \dfrac{1}{x}$ par $x \rightsquigarrow 1 - x$.

B. Applications

1. Définitions

Soit A et B deux ensembles.

- On appelle **application de A vers B** toute fonction de A vers B pour laquelle tout élément de A possède une image.

On note B^{A} l'ensemble des applications de A vers B.

■ Lorsque f est une application de A vers B, A est l'**ensemble de définition de** f et on définit l'**ensemble image** de la façon suivante :

$$f(A) = \{y \in B \ / \exists x \in A,\ \ y = f(x)\}$$

ce qui équivaut à :

$$f(A) = \{f(x) \in B \ \ / x \in A\}.$$

■ Lorsque $b = f(a)$, b est l'**image** de a par f et a est un **antécédent** de b par f.

✎ On dit aussi, abusivement, « image de X par f ».

■ Lorsque $X \subset A$, on appelle **image directe** de X ✎ par f l'ensemble des images des éléments de X ; on le note $f(X)$. On a :

$$f(X) = \{f(x) \in B \ \ / x \in X\}.$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$f(X) = \{y \in B \ / \exists x \in X,\ \ y = f(x)\}.$$

Attention :
ces notations sont la source d'un **risque de confusion** entre les deux notions d'image :
si x est un **élément** de A, $f(x)$ est un **élément** de B ;
si x est un **sous-ensemble** de A, $f(x)$ est un **sous-ensemble** de B.

■ Lorsque $Y \subset B$, on appelle **image réciproque** de Y par f l'ensemble des antécédents des éléments de Y ; on le note $f^{-1}(Y)$. On a :

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \ \ / f(x) \in Y\}.$$

2. Injectivité – Surjectivité – Bijectivité

2.1 – Définitions

Soit f une application de l'ensemble A vers l'ensemble B.

■ f **est injective** (ou est une **injection**) de A **dans** B lorsque des éléments deux à deux distincts de A ont toujours des images deux à deux distinctes dans B :

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall(x_1,\ x_2) \in A^2 : \\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\end{array}}$$

ce qui équivaut à la contraposée :

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall(x_1,\ x_2) \in A^2 : \\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\end{array}}$$

c'est-à-dire : des images égales ont des antécédents égaux,
ou encore : toute image dans B a un seul antécédent dans A.

Exemples

1) $f : [\![0\ ,\ 2]\!] \to \mathbb{R}$
$\qquad x \mapsto x^2$
est injective.

2) $f : [\![-1\ ,\ 2]\!] \to \mathbb{R}$
$\qquad x \mapsto x^2$
n'est pas injective (puisque $f(-1) = f(1)$).

■ f **est surjective** (ou est une **surjection**) de A **sur** B lorsque tout élément de l'ensemble B a au moins un antécédent par f dans A :

$$\boxed{\forall y \in B,\ \exists x \in A \ / f(x) = y}$$

ce qui équivaut à : B est l'ensemble image par f de A :

$$\boxed{B = f(A)}$$

Exemples

1) $f : [\![-1\ ,\ 2]\!] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$

n'est pas est surjective ; en effet, 3 n'est le carré d'aucun entier compris entre -1 et 2.

2) $f : [\![-1\ ,\ 2]\!] \to \{0,\ 1,\ 4\}$

$x \mapsto x^2$

est surjective puisque :

$$\begin{aligned} f([\![-1\ ,\ 2]\!]) &= \{f(-1),\ f(0),\ f(1),\ f(2)\} \\ &= \{1,\ 0,\ 1,\ 4\} \\ &= \{0,\ 1,\ 4\}. \end{aligned}$$

▪ ***f* est bijective** (ou est une **bijection**) de A **sur** B lorsque tout élément de B admet un antécédent dans A et un seul :

$$\boxed{\forall \boldsymbol{y} \in \mathbf{B},\ \exists! \boldsymbol{x} \in \mathbf{A} \ /\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$$

Cela équivaut à l'existence d'une application de B vers A, appelée **la réciproque de *f***, notée f^{-1}, et définie par :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{A},\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbf{B}, \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \end{array}}$$

Ainsi, la définition d'une bijection s'énonce aussi :

$$\boxed{\boldsymbol{f} \text{ bijective} \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ admet une réciproque}}$$

Exemple

$f :\ [\![0\ ,\ 2]\!] \to \{0,\ 1,\ 4\}$

$x \mapsto x^2$

est une bijection ; en effet :

▪ ***1re méthode :***

$\forall x \in [\![0\ ,\ 2]\!]$:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1 \\ f(x) = 4 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

▪ ***2e méthode :***

$g :\ \{0,\ 1,\ 4\} \to [\![0\ ,\ 2]\!]$

$x \mapsto \sqrt{x}$

est telle que : $\forall x \in [\![0\ ,\ 2]\!],\ \forall y \in \{0,\ 1,\ 4\}$:

$$y = \underbrace{x^2}_{f(x)} \Leftrightarrow x = \underbrace{\sqrt{y}}_{g(y)}$$

ainsi : g est la réciproque de f.

Remarque

Lorsque f est une application de l'ensemble A vers l'ensemble B et g une application de B vers l'ensemble C, on définit une application de A vers C, appelée **composée de *f* par *g*** et noté $g \circ f$ par :

$$\forall x \in \mathrm{A},\quad g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Exemple

$f :\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$

$g :\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto x + y$

alors $g \circ f$: $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$.

Propriété

Quelles que soient les applications f de A vers B et g de B vers A :

$$\boldsymbol{g = f^{-1} \Leftrightarrow (g \circ f = \mathrm{Id}_A \ \text{ et } \ f \circ g = \mathrm{Id}_B)}$$

où Id_A (resp. Id_B) désigne l'application identité dans A (respectivement dans B) :

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_\mathrm{A} : \mathrm{A} &\to \mathrm{A} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Exemple

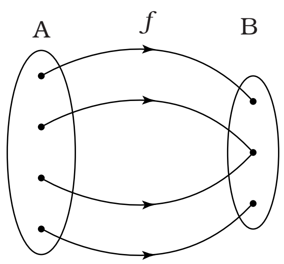
$$\left.\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ \ln[\exp(x)] = x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp[\ln(x)] = x \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \exp = \ln^{-1}.$$

- **Propriété caractéristique**

f est bijective $\Leftrightarrow$ f injective et f surjective.

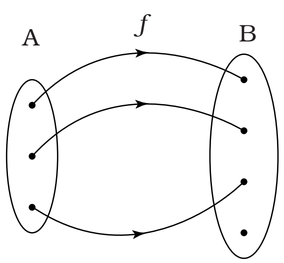
Exemples

1)



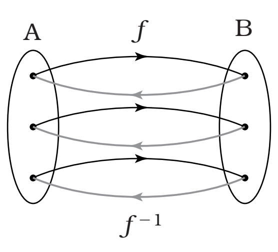
Cette application n'est pas injective,
mais elle est surjective.

2)



Cette application est injective,
mais elle n'est pas surjective.

3)



Cette application est injective et surjective,
c'est une bijection de A sur B.

Ce dernier diagramme illustre certaines propriétés des bijections de A sur B lorsque les ensembles **A et B sont finis** :

- lorsque les ensembles A et B sont **finis**, s'il existe une bijection de A sur B, alors A et B ont le même nombre d'éléments.
- lorsque les ensembles A et B ont le **même nombre d'éléments**, on a les équivalences suivantes :

$$f \text{ **injective** } \Leftrightarrow f \text{ **surjective** } \Leftrightarrow f \text{ **bijective**}.$$

Exemples

1) L'identité, définie dans un ensemble E par : $\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{Id}(x) = x$, est une bijection de E sur lui-même.

2) L'application $f\colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

est surjective et non injective.

3) L'application $g\colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

n'est ni surjective ni injective.

4) L'application $h\colon \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

est bijective.

2.2 – Travaux pratiques

Démontrer que l'application

$$\boldsymbol{f}\colon\ \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{1\}$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}$$

est une bijection.

Soit $y \in \mathbb{R} - \{1\}$, montrons que cet élément a un unique antécédent $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ par f :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-2} && \text{(où } x \neq 2\text{)} \\ &\Leftrightarrow x(y-1) = 2y + 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{y-1} && \text{puisque } y \neq 1. \end{aligned}$$

On vérifie que $x \neq 2$ puisque $[x = 2 \Leftrightarrow 2y - 2 = 2y + 1]$ ce qui est impossible.
Pour un y fixé dans $\mathbb{R} - \{1\}$, cette dernière formule donne bien un x unique dans $\mathbb{R} - \{2\}$; on a bien démontré :

$$\forall y \in \mathbb{R} - \{1\},\ \exists! x \in \mathbb{R} - \{2\} \ /\quad y = f(x)$$

et f est une bijection de $\mathbb{R} - \{2\}$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

2.3 – Une remarque importante

Les notions de bijection ou d'application réciproque peuvent être utilisées pour résoudre certaines équations.
En effet, si f est une application de A dans B et si $y_0 \in \mathrm{B}$, résoudre dans A l'équation :

$$y_0 = f(x)$$

revient à étudier l'existence d'un antécédent par f dans A de y_0.
Le cas échéant, cette résolution pourra consister à établir que f est une bijection de A sur B et à calculer sa réciproque, voire à se limiter à ce seul calcul.

Exemple

Énoncé : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x} + 2 = 3.$$

Solution : la fonction $f\colon \mathbb{R} \to]2, +\infty[$

$$x \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^x} + 2$$

c'est-à-dire : prendre l'exponentielle, puis inverser, puis ajouter 2
admet pour réciproque :

la fonction $f^{-1}\colon\ ]2, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

c'est-à-dire : retrancher 2, puis inverser, puis prendre le logarithme népérien.
Par suite :
$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x = f^{-1}(3) = \ln\left(\frac{1}{3-2}\right) = 0.$$

Remarque
0 est une solution évidente de l'équation, mais le raisonnement ci-dessus établit que c'est **la seule**.

3. Applications réciproques

3.1 – Composée de deux bijections

Théorème

Si f est une bijection de A sur B et si g est une bijection de B sur C,
alors $g \circ f$ est une bijection de A dans C.

3.2 – Propriétés de l'application réciproque

Soit f est une bijection de A sur B et f^{-1} son application réciproque.

- f^{-1} est une bijection de B sur A et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$.

- Si f est une application de A vers B telle qu'il existe une application g de B vers A vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_A$, alors f est une bijection de A sur B et $g = f^{-1}$.

Remarque
Si f est une **bijection** de A sur B et s'il existe une application g de B vers A telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ (ou bien : $f \circ g = \mathrm{Id}_B$), alors $g = f^{-1}$;
dans ce cas, une égalité suffit pour conclure.

- Si f est une bijection de A sur B et si g est une bijection de B sur C, alors :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Exemples

1) L'application Id_E admet pour réciproque : $(\mathrm{Id}_E)^{-1} = \mathrm{Id}_E$.

2) La bijection

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^2$$

admet pour réciproque l'application

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

3) La bijection

$$g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x$$

admet pour réciproque l'application

$$g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, \quad x \mapsto e^x.$$

3.3 – Travaux pratiques

1) Vérifier que l'application

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1} \end{aligned}$$

est une bijection et déterminer son application réciproque.

- Soit le nombre réel y, montrons qu'il a un unique antécédent par f :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = 2x - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y + 1) \end{aligned}$$

donc : $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists! x \in \mathbb{R} \ / \ y = f(x),$

f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et on a :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R},$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y + 1).$$

La réciproque de f est donc l'application

$$\begin{aligned} f^{-1}: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1). \end{aligned}$$

- ***Autre méthode***

f est la composée de

$$\begin{aligned} f_1 : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto 2x \end{aligned}$$

bijection de réciproque :

$$\begin{aligned} f_1^{-1} : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{x}{2} \end{aligned}$$

par

$$\begin{aligned} f_2 : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x - 1 \end{aligned}$$

bijection de réciproque :

$$\begin{aligned} f_2^{-1} : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x + 1. \end{aligned}$$

Donc $\underbrace{f}_{= f_2 \circ f_1}$ est bijective, de réciproque $f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$

soit :

$$\begin{aligned} f^{-1}: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{1}{2}(x + 1). \end{aligned}$$

2) Vérifier que l'application

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} : \ & \mathbb{R} - \{\mathbf{2}\} \to \mathbb{R} - \{\mathbf{1}\} \\ & \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x} + \mathbf{1}}{\boldsymbol{x} - \mathbf{2}} \end{aligned}$$

est une bijection et déterminer son application réciproque.

Dans l'exercice traité au paragraphe B.2.2., nous avons démontré que f était bijective et de plus :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, \quad \forall y \in \mathbb{R} - \{1\},$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{2y + 1}{y - 1}.$$

La réciproque de l'application f est donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}: \ & \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\} \\ & x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}. \end{aligned}$$