Sommaire

CHAPITRE

1 Éléments d'analyse vectorielle et rappels mathématiques

Introduction

La démarche du physicien n'est pas qu'empirique. Il crée des modèles mathématiques qui permettent de « mettre en équations » les événements.

Le but de ce chapitre est de mettre à disposition de l'étudiant les outils mathématiques dont il aura besoin en seconde année dans l'étude des phénomènes physiques du programme.

L'approche physique est privilégiée par rapport à la technique de calcul, le but étant d'appréhender correctement l'interprétation physique des équations ou résultats de calculs auxquels aboutit l'outil mathématique.

Plan du chapitre 1

A. Systèmes de coordonnées

On rappelle les trois systèmes qui ont déjà été rencontrés en première année dans le cours d'électromagnétisme, entre autres.

A.1. Coordonnées cartésiennes

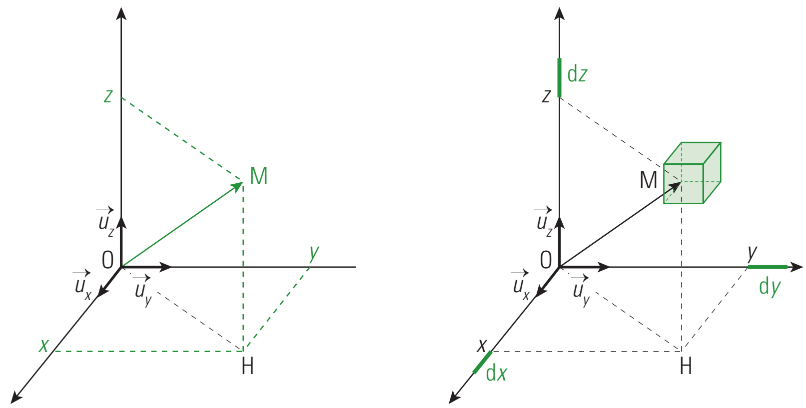


Fig. 1 - Le système de coordonnées cartésiennes.

Dans le repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$), un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z). Le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \boldsymbol{x\vec{u}_x} + \boldsymbol{y\vec{u}_y} + \boldsymbol{z\vec{u}_z}.$$

Lorsque les coordonnées x, y ou z de M subissent une variation élémentaire dx, dy ou dz, le point M se déplace respectivement de d$x\,\vec{u}_x$, d$y\,\vec{u}_y$ ou d$z\,\vec{u}_z$. Ainsi, le volume élémentaire dV est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes dx, dy et dz :

$$\mathbf{dV} = \mathbf{d}\boldsymbol{x} \times \mathbf{d}\boldsymbol{y} \times \mathbf{d}\boldsymbol{z}.$$

A.2. Coordonnées cylindriques

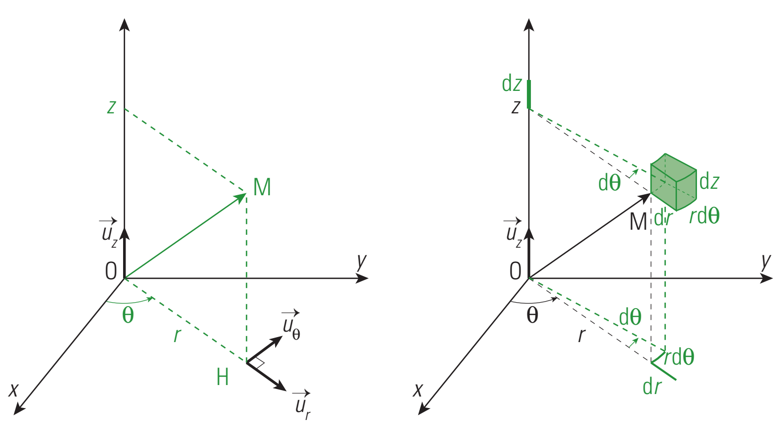


Fig. 2 - Le système de coordonnées cylindriques.

On peut aussi repérer tout point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) (fig. 2) :

– r représente la distance du point M à l'axe Oz ($r > 0$) ;

– θ définit la position du point M autour de Oz (θ angle compris entre 0 et 2π) ;

– z représente la cote du point M.

[1] Cette base est une base locale, car les directions des vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ dépendent de la position du point M.

On définit la base[1] orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ en posant $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{OH}$ (H projection orthogonale du point M sur le plan xOy). Dans le repère orthonormé, le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \boldsymbol{r}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{z}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}.$$

Lorsque les coordonnées r, θ ou z de M subissent une variation élémentaire $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$ ou $\mathrm{d}z$, le point M se déplace respectivement de $\mathrm{d}r\,\vec{u}_r$, $r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta$ ou $\mathrm{d}z\,\vec{u}_z$. Ainsi, le volume élémentaire dV est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes $\mathrm{d}r$, $r\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}z$:

$$\mathbf{dV} = \mathbf{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{d}\boldsymbol{z}.$$

A.3. Coordonnées sphériques

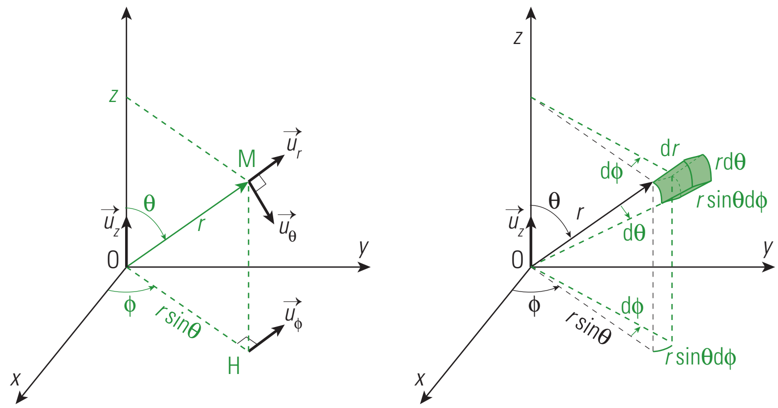


Fig. 3 - Le système de coordonnées sphériques.

[2] L'angle θ n'est pas le même que celui des coordonnées cylindriques, car, en coordonnées sphériques, c'est l'angle ϕ qui donne la position de M autour de Oz.

[3] Cette base est une base locale, car les directions des vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\phi$ dépendent de la position du point M.

Enfin, on peut aussi repérer tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) (fig. 3) :

– r représente la distance du point M au point O ($r = OM > 0$) ;

– θ et ϕ[2] définissent la direction dans laquelle, depuis le point O, on voit le point M (θ angle compris entre 0 et π, ϕ angle compris entre 0 et 2π).

On définit la base[3] orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ en posant $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{OH}$.

Dans le repère orthonormé $(O\,;\, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$, le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \boldsymbol{r}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}.$$

Lorsque les coordonnées r, θ ou ϕ de M subissent une variation élémentaire $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$ ou $\mathrm{d}\phi$, le point M se déplace respectivement de $\mathrm{d}r\,\vec{u}_r$, $r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta$ ou $r\sin\theta\mathrm{d}\phi\,\vec{u}_\phi$. Ainsi, le volume élémentaire dV est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes $\mathrm{d}r$, $r\mathrm{d}\theta$ et $r\sin\theta\mathrm{d}\phi$:

$$\mathbf{dV} = \mathbf{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}\mathbf{sin}\boldsymbol{\theta}\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}.$$

A.4. Intégrales multiples

[4] Cette propriété est une application du théorème de Fubini.

Lorsqu'on intègre sur une surface ou un volume, il est nécessaire de faire varier plusieurs coordonnées. Le calcul d'une telle intégrale, dans le cas général, est compliqué. Cependant, si la fonction à intégrer est un produit de fonctions de chacune des coordonnées et que les bornes d'intégration de chaque coordonnée sont indépendantes des autres coordonnées, alors l'intégrale multiple est égale au produit des intégrales simples[4] :

$$\iiint f(x)g(y)h(z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \int_{y_0}^{y_1} g(y)\,dy \int_{z_0}^{z_1} h(z)\,dz.$$

Cette propriété est en général toujours vérifiée, ce qui permet de se ramener dans tous les cas étudiés aux calculs d'intégrales simples.

Application 1 **Calcul d'un volume**

Calculer, en utilisant une intégrale, le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon R.

Solution

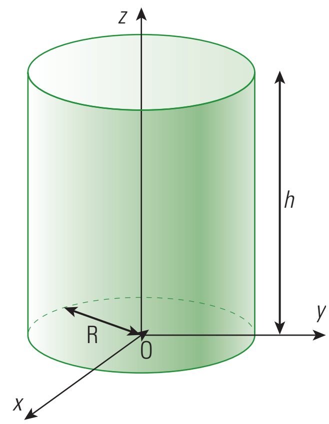
Le système de coordonnées le mieux adapté à cette géométrie est le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z). On choisit l'axe de révolution du cylindre comme axe Oz, son origine O étant placée au centre de l'une des bases du cylindre. Un élément de volume dV s'écrit :

$$dV = dr \times r\,d\theta \times dz.$$

Le volume V est la somme de tous les éléments de volume dV :

$$V = \iiint dV = \iiint dr \times r\,d\theta \times dz,$$

avec r variant entre 0 et R, θ variant entre 0 et 2π, z variant entre 0 et h. Comme la fonction à intégrer est un produit de fonctions de chacune des coordonnées, on a :



$$\mathbf{V} = \int_0^R r\,dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^h dz = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi} \times [z]_0^h = \frac{R^2}{2} \times 2\pi \times h = \boldsymbol{\pi R^2 h}.$$

B. Flux d'un champ[1] de vecteurs

Soit $\vec{W}$ un champ de vecteurs et S une surface. Le flux Φ du champ $\vec{W}$ à travers la surface S s'écrit :

$$\boldsymbol{\Phi} = \iint_S \vec{W}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS,$$

où $d\vec{S}$ est « le vecteur surface élémentaire » de l'élément de surface dS centré sur un point P de S. Le vecteur $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à l'élément de surface au point P. Son orientation dépend de la nature de la surface.

1. Un champ est une grandeur physique qui est définie en tout point d'un volume de l'espace (ou, plus rarement, d'une surface). La grandeur concernée dépend donc des coordonnées du point que l'on considère, mais peut aussi dépendre du temps. Un champ stationnaire est indépendant du temps. Un champ uniforme ne dépend pas du point où on le considère (indépendant des coordonnées).

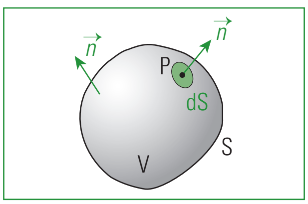


Fig. 4 - Surface fermée.

B.1. Cas d'une surface « fermée »

Si la surface S est fermée (fig.4), alors elle délimite un volume V et la normale à la surface est toujours orientée sortant de S (convention). Afin de montrer que S est fermée, on note alors :

$$\boldsymbol{\Phi} = \oiint_S \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS.$$

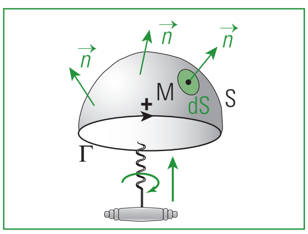


Fig. 5 - Surface ouverte.

B.2. Cas d'une surface « ouverte »

Si la surface S est ouverte, alors elle s'appuie nécessairement sur une ligne fermée (un contour) Γ (fig.5). On choisit un sens « + » à un parcours le long de Γ (on l'oriente). Le sens de $\vec{n}$ est alors déterminé à partir de cette orientation par « la règle du tire-bouchon ».